Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101314**

ID профиля: **182928**

Вариант 17

№1 Чистовик

$$\begin{cases} S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9 + a_{10} \\ a_6 \cdot a_{12} > S + 1 \\ a_7 a_{11} < S + 17 \end{cases}$$

Выразим все через a_1 и разность прогрессии d:

$$\begin{cases} S = \dfrac{2a_1 + d(10-1)}{2} \cdot 10 = 10a_1 + 45d \\ (a_1 + 5d)(a_1 + 11d) > S + 1 \\ (a_1 + 6d)(a_1 + 10d) < S + 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16da_1 + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 \\ a_1^2 + 16da_1 + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + a_1(16d - 10) + 55d^2 - 45d - 1 > 0 \quad (1) \\ a_1^2 + a_1(16d - 10) + 60d^2 - 45d - 17 < 0 \quad (2) \end{cases}$$

1) $D = 256d^2 - 320d + 100 - 220d^2 + 180d + 4 =$

$= 36d^2 - 140d + 104 \geq 0$

$$d = \frac{140 \pm \sqrt{140^2 - 4 \cdot 36 \cdot 104}}{72} = \frac{35 \pm \sqrt{1225 - 936}}{18} = \frac{35 \pm 17}{18}$$

$d_1 = \dfrac{26}{9} \quad d_2 = 1$

21101314 (U182928 M1304102)

Чистовик

$$\begin{cases} a_1^2+16da_1+55d^2-10a_1-45d-1>0 \\ a_1^2+16da_1+55d^2-10a_1-45d-1<16-5d^2 \end{cases}$$

Т.к. прогрессия возрастающая то $d>0$, а т.к. члены прогрессии целые числа, то разность прогрессии d - целое число.

Чтобы данная система выполнялась нужно, чтобы $16-5d^2>0$, а это возможно только при $d=1$

Перепишем систему подставив d:

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1-10a_1+55-45-1>0 \\ a_1^2+16a_1-10a_1+55-45-1<16-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+6a_1+9>0 \\ a_1^2+6a_1-2<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+3)^2>0 \\ a_1^2+6a_1-2<0 \end{cases}$$

$D=36+8=44$

$a_1=\frac{6\pm2\sqrt{11}}{2}=3\pm\sqrt{11}$

$$\begin{cases} a_1\in(-\infty;3)\cup(3;\infty) \\ \cancel{a\in(3-\sqrt{11})\cup(3+\sqrt{11})}\ a_1\in(3-\sqrt{11};3+\sqrt{11}) \end{cases} \Rightarrow a\in(3-\sqrt{11};3)\cup(3;3+\sqrt{11})$$

Тогда нам подходят значения $a_1\in\{0;1;2;4;5;6\}$

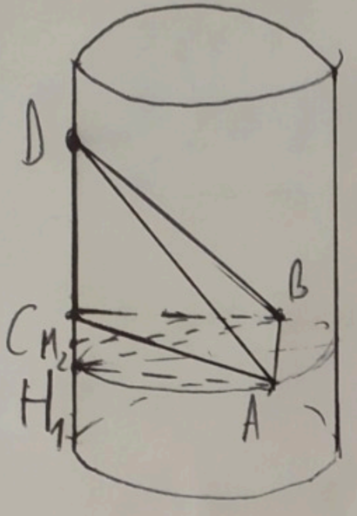
Ответ: $a_1\in\{0;1;2;4;5;6\}$

Чистовик

№2

Дано: ABCD - тетраэдр

$AB = 2$, $AC = CB = 5$, $AD = DB = 6$

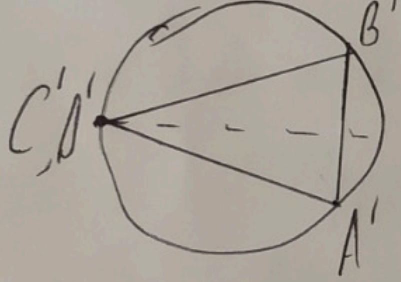


Найти: CD

Решение:

Т.к тетраэдр вписан и $CD \parallel$ боковой поверхности, то и CD лежит на боковой поверхности

Спроецируем тетраэдр на основание цилиндра



1) $\triangle ACD = \triangle BCD$ по трем сторонам $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACD = \angle BCD \Rightarrow \angle ACH_1 = \angle BCH_2$

(где AH_1, BH_1 высоты на прямую CD)

Тогда $\left.\begin{aligned} CH_1 &= AC \cdot \cos\angle ACH_1 \\ CH_2 &= BC \cdot \cos\angle BCH_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow CH_1 = CH_2$

т.е. H_1 и H_2 совпадают $\Rightarrow$ плоскость ABH параллельна плоскости основания $\Rightarrow AB \parallel A'B' \Rightarrow A'B' = AB = 2$

2) Т.к $ABH \parallel$ плоскости основания, а (·)H лежит на прямой CD, то $\triangle A'C'B'$ - равнобедренный ($A'C' = B'C' = a$)

Распишем площадь $\triangle A'B'C'$ два раза:

$$S = \frac{A'C' \cdot B'C' \cdot A'B'}{4R} = \frac{1}{2} A'B' \sqrt{A'C'^2 - \left(\frac{A'B'}{2}\right)^2}$$

$$\frac{2a^2}{4R} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{a^2 - 1}$$

Чистовик

$$\frac{a^2}{2R}=\sqrt{a^2-1}$$

$$R=\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-1}}$$

$$R'=\frac{2a\cdot 2\sqrt{a^2-1}-a^2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{\sqrt{a^2-1}}}{4(a^2-1)}=\frac{4a(a^2-1)-2a^3}{4(a^2-1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2a^3-4a}{4(a^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

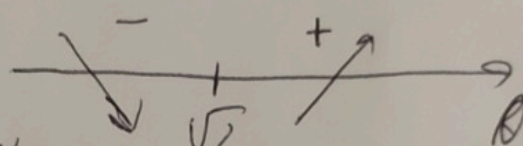
Найдем минимум:

$R'=0$

$4a^3-4a-2a^3=0$

$2a^3=4a$

$a=\sqrt{2}$



$\Rightarrow$ минимум

Т.к при $a=A'C'=B'C'=\sqrt{2}$ радиус цилиндра минимален

3) Т.к. $A'B'C' \parallel ABH$ то, $AH=BH=A'C'=B'C'=2$

Из $\triangle AHC$ ($\angle AHC$ - прямой т.к. CD перпендикулярно основанию) по теореме Пифагора:

$$CH=\sqrt{AC^2-AH^2}=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$$

Из $\triangle DAH$

$$DH=\sqrt{AD^2-AH^2}=\sqrt{36-4}=\sqrt{32}$$

$CD=DH-CH=\sqrt{32}-\sqrt{21}$ если H лежит ниже C

4) Если $H \in$ отрезку CD то: Чистовик

$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{36-4} = \sqrt{32}$

$CD = CH + DH = \sqrt{32} + \sqrt{21}$

Ответ: $CD = \sqrt{32} - \sqrt{21}$ или $CD = \sqrt{32} + \sqrt{21}$

21101314 (U182928 M1304102)

Чистовик

№7

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le \min(2(a+b);2)\end{cases}$$

При $2(a+b)\le 2$

$a^2+b^2\le 2(a+b)$

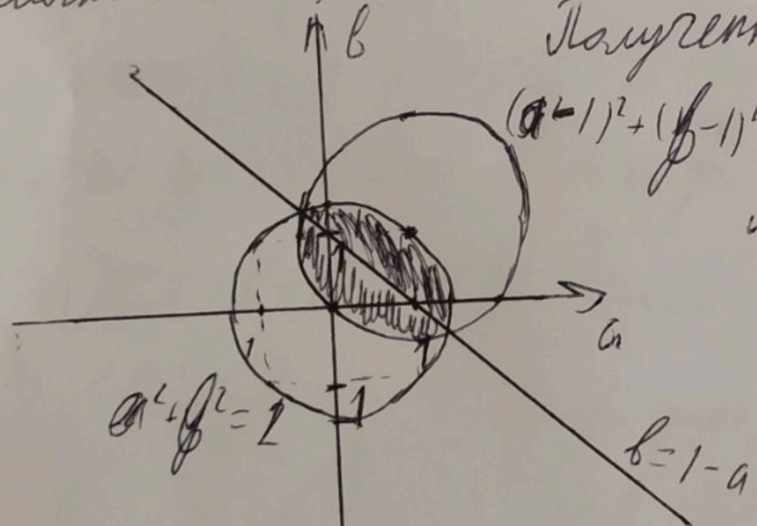
$a^2-2a+1+b^2-2b+1\le 2$

$$\begin{cases}(a-1)^2+(b-1)^2\le 2\\ a+b\le 1 \Rightarrow b\le 1-a\end{cases}$$

При $2<2(a+b)$

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 2\\ a+b>1 \Rightarrow b>1-a\end{cases}$$

Изобразим множество возможных чисел a, b, на плоскость $(a;b)$



Полученное множество точек

Точки пересечения окружностей:

$$\begin{cases}(a-1)^2+(b-1)^2=2\\ a^2+b^2=2\end{cases}$$

При чем точки лежат на прямой $b=1-a$

$a^2+(1-a)^2=2$

$a^2+1-2a+a^2=2$

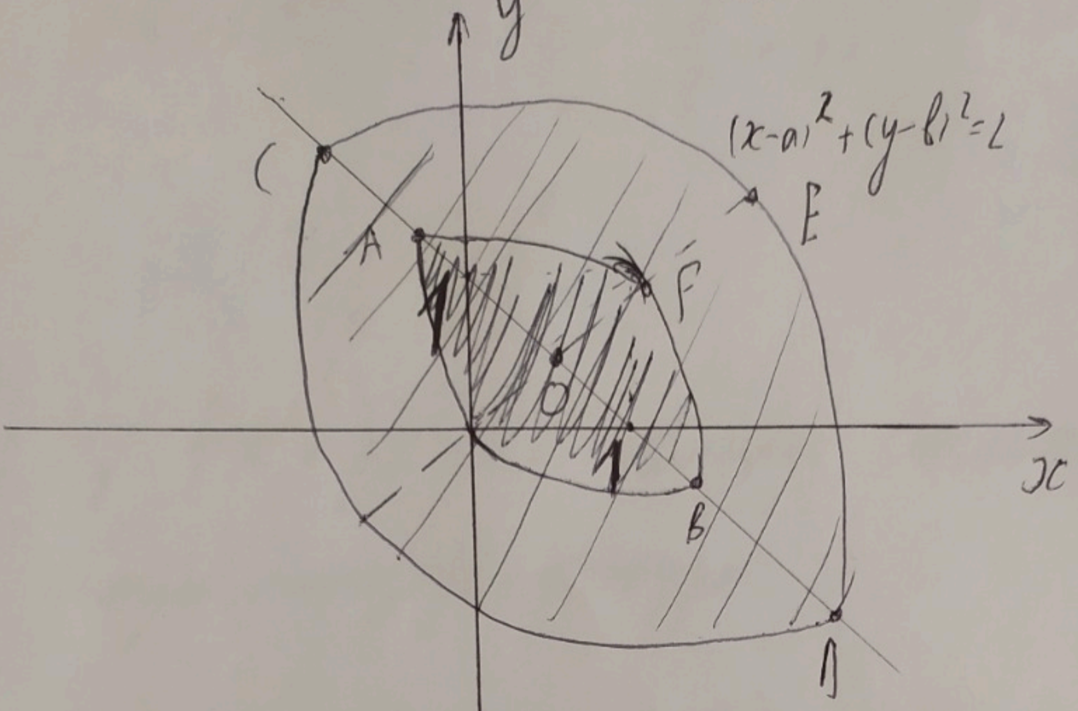
$2a^2-2a-1=0$

$a=\frac{2\pm\sqrt{4+8}}{4}=\frac{2\pm2\sqrt3}{4}=\frac{1\pm\sqrt3}{2}$

Тогда точки: $\left(\frac{1+\sqrt3}{2};\ \frac{1-\sqrt3}{2}\right)$ и $\left(\frac{1-\sqrt3}{2};\ \frac{1+\sqrt3}{2}\right)$

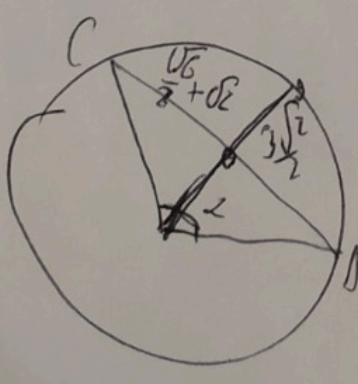
Чистовик

$$AB=\sqrt{\left(\frac{\sqrt3}{2}+\frac12+\frac{\sqrt3}{2}-\frac12\right)^2+\left(\frac{\sqrt3}{2}-\frac12+\frac{\sqrt3}{2}+\frac12\right)^2}=$$
$$=\sqrt6$$



Из каждой точки внутри сильно закрашенной области проводим окружность радиусом $\sqrt2$. Получаем подобную фигуру, т.е сегмент окружности причем $CD=AB+2\sqrt2=\sqrt6+2\sqrt2$, а наиболее удаленная точка от CD это E. Тогда

$$OE=OF+\sqrt2=\sqrt2-\frac{\sqrt2}{2}+\sqrt2=\sqrt2\left(2-\frac12\right)=\frac{3\sqrt2}{2}$$



Тогда радиус такой окружности:

$$R^2=\left(R-\frac{3\sqrt2}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt6}{2}+\sqrt2\right)^2$$

$$\cancel{R^2}=\cancel{R^2}-3\sqrt2R+\frac32+\frac32+2\sqrt3+2$$

$$3\sqrt2R=5+2\sqrt3$$

$$R=\frac{5+2\sqrt3}{3\sqrt2}$$

21101314 (U182928 M1304102)

Чистовик

Площадь сегмента:

$$\cos\alpha = \frac{2R^2 - CD^2}{2R^2} = 1 - \frac{CD^2}{2R^2} = 1 - \left(\frac{\frac{\sqrt{6}}{2} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \frac{5+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}}\right)^2 =$$

$$= 1 - \left(\frac{3\sqrt{6} + 6\sqrt{2}}{10 + 4\sqrt{3}}\right)^2$$

$S_1 = \frac{\alpha}{2}R^2 + \frac{1}{2}R^2\sin\alpha$ – площадь сегмента

Тогда площадь фигуры:

$$S = 2S_1 = \alpha R^2 + R^2\sin\alpha = R^2(\alpha + \sin\alpha), \text{ где } \alpha = \arccos\left(1 - \left(\frac{3\sqrt{6}+6\sqrt{2}}{10+4\sqrt{3}}\right)^2\right)$$

$$R = \frac{5+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$$

Ответ: $S = \left(\frac{5+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^2(\alpha + \sin\alpha)$, где $\alpha = \arccos\left(1 - \left(\frac{3\sqrt{6}+6\sqrt{2}}{10+4\sqrt{3}}\right)^2\right)$

Черновик

$9d^2-35d+26=0$

$D=1225-936=289$

$d=\frac{35\pm17}{18}$

$d_1=\frac{52}{18}=\frac{26}{9}$

$d_2=1$

$\times\begin{array}{r}36\\26\\\hline 216\\72\\\hline 936\end{array}$ $\times\begin{array}{r}49\\25\\\hline 245\\98\\\hline 1225\end{array}$

$D=256d^2-320d+100-240d^2+180d+68=16d^2-140d+168$

$4d^2-35d+42=0$

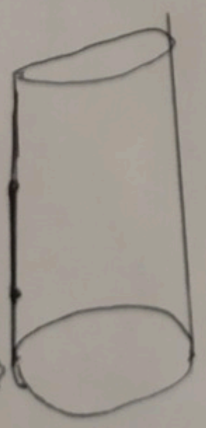
$D=1225-672=553$

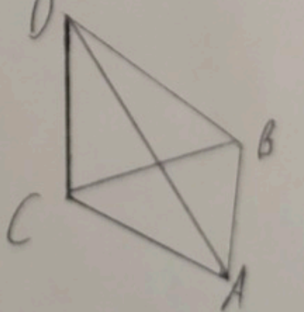
$-\begin{array}{r}1225\\672\\\hline 553\end{array}$ $\times\begin{array}{r}168\\4\\\hline 672\end{array}$

$a_1^2+16da_1+55d^2-S>1$

$a_1^2+16da_1+55d^2-S<17-5d^2$

1





$R=2a\sqrt{4a^2-b^2}-a^2\frac{1}{2}\frac{8a}{\sqrt{4a^2-b^2}}$

$\frac{a^2b}{4R}=\frac{1}{2}b\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}$

$2a(4a^2-b^2)-4a^3=4a^3-2ab^2=0$

$2a^2=b^2 \quad a=\frac{b}{\sqrt2}$

$R=\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}}=\frac{a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101314**

ID профиля: **182928**

Вариант 17

Черновик

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

$a=a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$ $\quad a=2^{x_1}\cdot 3^{y_1}$

$b=b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n$ $\quad b=2^{x_2}\cdot 3^{y_2}$

$c=c_1\cdot c_2\cdot\ldots\cdot c_n$ $\quad c=2^{x_3}\cdot 3^{y_3}$

Т.к. $НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16}$, то a, b, c можно представить в виде произведений двоек и троек. Причем из НОД следует, что каждое число содержит минимум одну двойку и тройку и что в одном из чисел содержится только одна тройка и одна двойка (но может быть уже в другом числе)

Другими словами:

$$\begin{cases} \min(x_1;x_2;x_3)=1 \\ \min(y_1;y_2;y_3)=1 \\ \max(x_1;x_2;x_3)=15 \\ \max(y_1;y_2;y_3)=16 \end{cases}$$

Пусть $x_1=1$, $x_2\neq 1$, $x_3\neq 1$. Тогда:

$x_2\in\{2,3,4\ldots 15\}$

$x_3\in\{2,3,4\ldots 15\}$

Всего имеем $14\cdot 14=196$ способов

Аналогично для $x_2=1$, $x_1\neq 1$, $x_3\neq 1$ и $x_3=1$, $x_1\neq 1$, $x_2\neq 1$ получаем еще по 196 способов

21101314 (U182928 M1304103)

Чистовик.

При $x_1 = x_2 = 1, x_3 \neq 1 \Rightarrow x_3 = 15$ - т.е один способ,

аналогично $x_1 = x_3 = 1, x_2 \neq 1$ и $x_2 = x_3 = 1, x_1 \neq 1$ имеем

ещё по 1 способу.

В итоге степени двойки можно выбрать:

$196 \cdot 3 + 3 = 591$ способом

Проведя аналогичные рассуждения для степеней 3

получим:

$3 \cdot 15 \cdot 15 + 3 = 3(225+1) = 678$ способов

Каждой комбинации степени 2 можно сопоставить

любую комбинацию степеней 3, поэтому всего имеем

$591 \cdot 678$ возможных наборов a, b, c

Ответ: $591 \cdot 678 = 400698$ наборов чисел

N5

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

ОДЗ: $\begin{cases} 4x+1>0 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ 5x-1>0 \\ \sqrt{5x-1}\neq 1 \\ 4x+1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-\frac{1}{4} \\ x>-4 \\ x>\frac{1}{5} \\ 5x\neq 2 \\ 4x\neq 0 \\ \frac{x}{2}\neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \\ x\neq 0 \\ x\neq -2 \end{cases} \Rightarrow x\in\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{2}{5};\infty\right)$

~~Разберем все случаи:~~

$\cancel{1)\ \begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \\ \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)-\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) \end{cases}}$

Пусть $4x+1=a$, $\sqrt{5x-1}=b$, $\frac{x}{2}+2=c$

Тогда имеем $\log_b a$, $\log_a c^2$, $\log_c b^2$

Разберем все случаи:

1) $\begin{cases} \log_b a=\log_a c^2 \\ \log_a c^2-\log_c b^2=1 \end{cases}$

$\frac{\log a}{\log b}-\frac{\lg c^2}{\lg a}=0$

$\cancel{\lg^2 a-\lg b\,\lg c^2=0}$

7400 | 4
1850
4
34
32
20

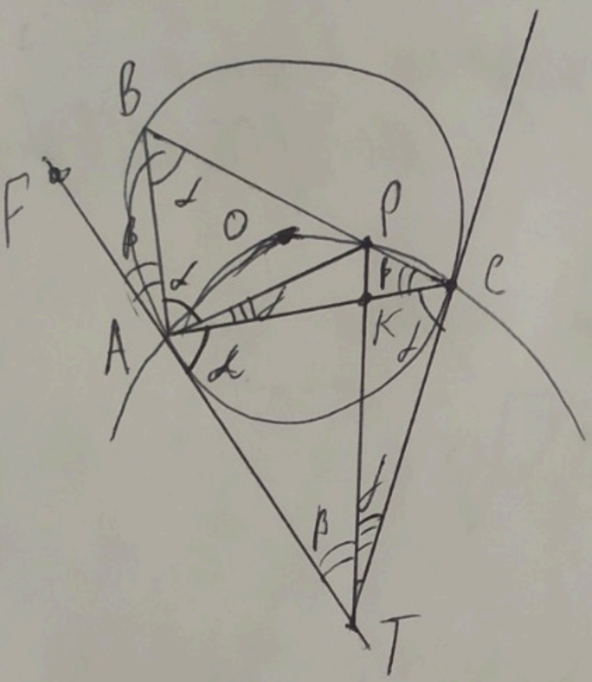
21
16
126
21
336

1514

Чистовик

№6

Дано: $\triangle ABC$ вписан в окружность ω



AT, CT – касательные

$S_{APK}=6$, $S_{CPK}=4$

$\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{7}{5}$

Найти: AC, $S_{\triangle ABC}$

Решение:

1) $\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{\frac{1}{2}AK \cdot h_{AC}}{\frac{1}{2}CK \cdot h_{AC}} = \frac{AK}{CK} = \frac{6}{4}$ (у треугольников одинаковая высота из точки P на прямую AC)

2) Пусть $\angle ABC = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, тогда

$\angle TAC = \angle ABC = \alpha$, $\angle TCA = \angle ABC = \alpha$ как углы между хордой и касательной

Аналогично: $\angle BAF = \angle ACB = \beta$.

$\angle ATP = \angle ACB = \beta$ как опирающиеся на одну дугу окружности проходящей через (·) A, O, C.

21101314 (U182928 M1304103)

Чистовик

3) Т.к. $\angle ATP = \angle FAB = \beta$, то $TP \parallel AB$ (соответственные углы)

Т.к. $TP \parallel AB$, то $\angle ABC = \angle KPC = \alpha$ как соответственные

$\Delta ABC \sim \Delta KPC$ по 1 первому признаку подобия

($\angle ABC = \angle KPC$, $\angle ACB$ - общий)

4) $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta KPC}} = k^2$, где k - коэффициент подобия

$k = \frac{AC}{KC} = \frac{AK+KC}{KC} = \frac{AK}{KC} + 1 = \frac{6}{4} + 1 = \frac{5}{2}$

$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta KPC} \cdot k^2 = 4 \cdot \frac{25}{4} = \underline{\underline{25}}$

5) Пусть $\angle CTP = \gamma$, тогда $\angle PAC = \angle CTP = \gamma$ как опирающиеся на одну дугу.

Из ΔACT: $2\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

6) $\angle BAP = 180^\circ - \angle BAF - \angle PAC - \angle CAT = 180^\circ - \alpha - \beta - \gamma = \alpha$

7) Т.к. $\angle BAP = \angle ABP = \alpha$, то ΔABP - равнобедренный ($AP = BP$)

$\angle APB = 180^\circ - 2\alpha$.

8) $S_{\Delta ABP} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta APK} - S_{\Delta CPK} = 25 - 6 - 4 = 15$

$S_{\Delta ABP} = \frac{1}{2} AP \cdot AP \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha)$

$AP = \sqrt{\frac{2 S_{\Delta ABP}}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{\frac{15}{\sin\alpha \cos\alpha}}$

Чистовик

$tg\alpha = \frac{7}{5}$

$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \frac{49}{25}$

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{74}}$ $\quad \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{74}} = \frac{7}{\sqrt{74}}$

$AP = \sqrt{\frac{15}{\frac{5}{\sqrt{74}} \cdot \frac{7}{\sqrt{74}}}} = \sqrt{\frac{74 \cdot 3}{7}} = \sqrt{\frac{222}{7}} = BP$

$AB = 2AP \sin\frac{180° - 2\alpha}{2} = 2AP \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \sqrt{\frac{222}{7}} \cdot \frac{7}{\sqrt{74}} = 2\sqrt{21}$

9) Из подобия

$\frac{CB}{CP} = k$

$\frac{BP + CP}{CP} = \frac{5}{2}$

$\frac{BP}{CP} = \frac{3}{2}$

$CP = \frac{2}{3} BP$

$BC = BP + CP = \frac{5}{3} BP = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{222}{7}} = 5\sqrt{\frac{74}{21}}$

10) Из $\triangle ABC$ по теореме косинусов:

$AC = \sqrt{AB^2 + CB^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha} = \sqrt{84 + 25 \cdot \frac{74}{21} - 2 \cdot 2\sqrt{21} \cdot 5\sqrt{\frac{74}{21}} \cdot \frac{5}{\sqrt{74}}} =$

Чистовик

$$= \sqrt{84 + 25 \cdot \frac{74}{21} - 100} = \sqrt{\frac{1850 - 16 \cdot 21}{21}} = \sqrt{\frac{1850 - 336}{21}} = \sqrt{\frac{1514}{21}}$$

Ответ: $S_{\Delta ABC} = 25$, $AC = \sqrt{\frac{1514}{21}}$

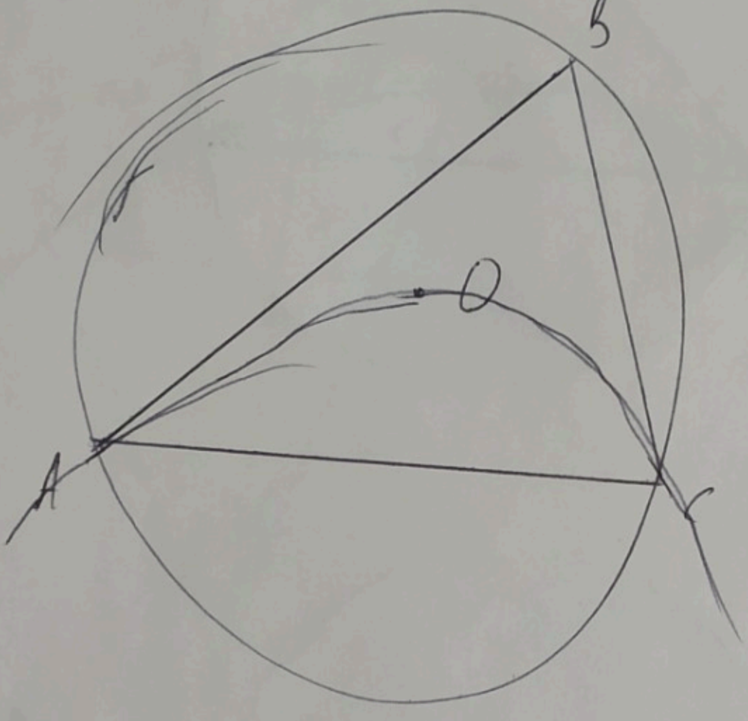
21101314 (U182928 M1304103)

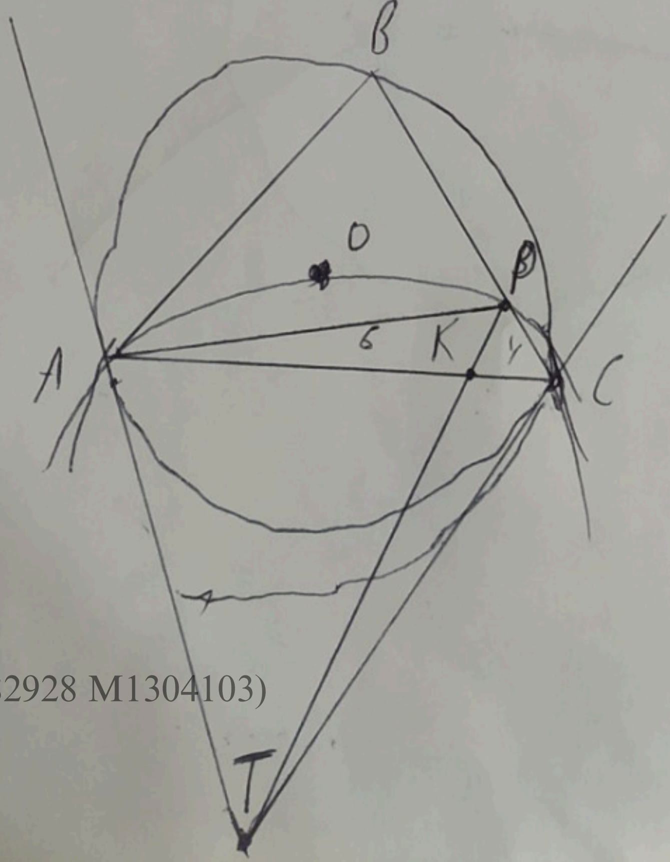
Черновик

$1 = \log_a c^2 \cdot \log_a b$ $\quad$ $\log_2 8 \cdot \log_2 \sqrt[3]{2}$

$b = a$

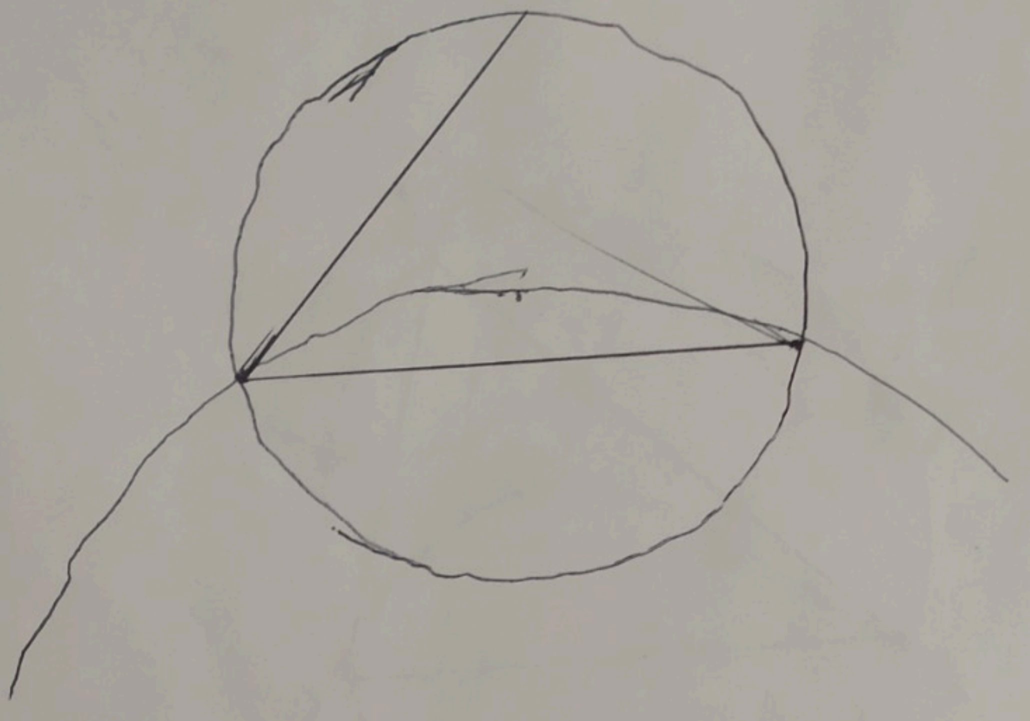
$c^2 = a$

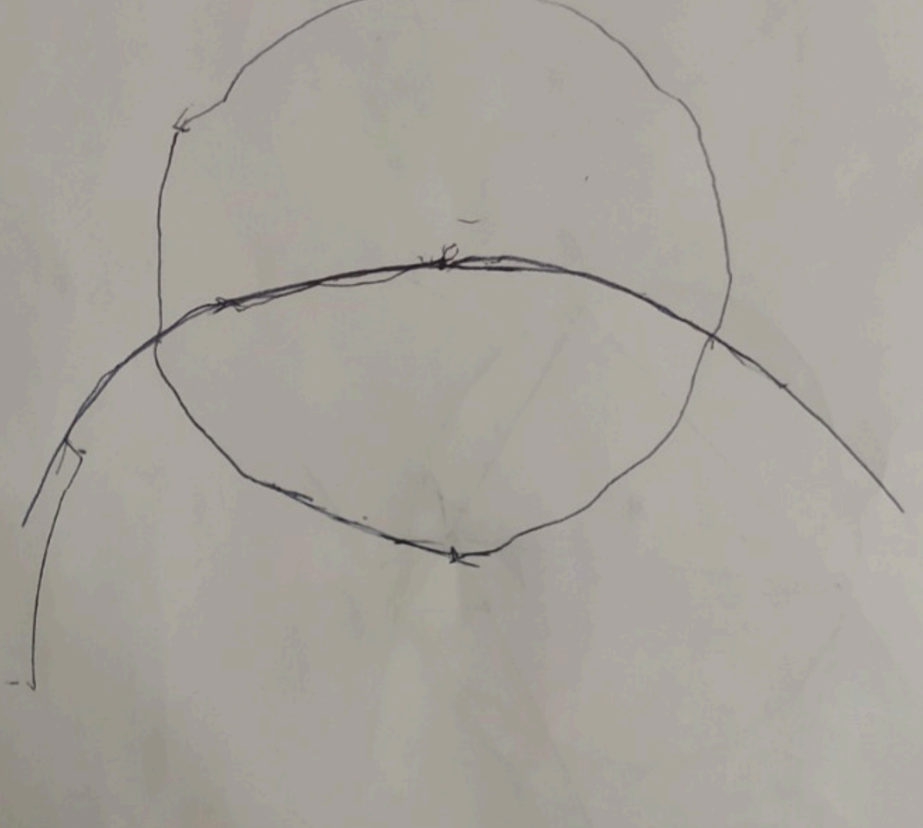




21101314 (U182928 M1304103)

Черновик



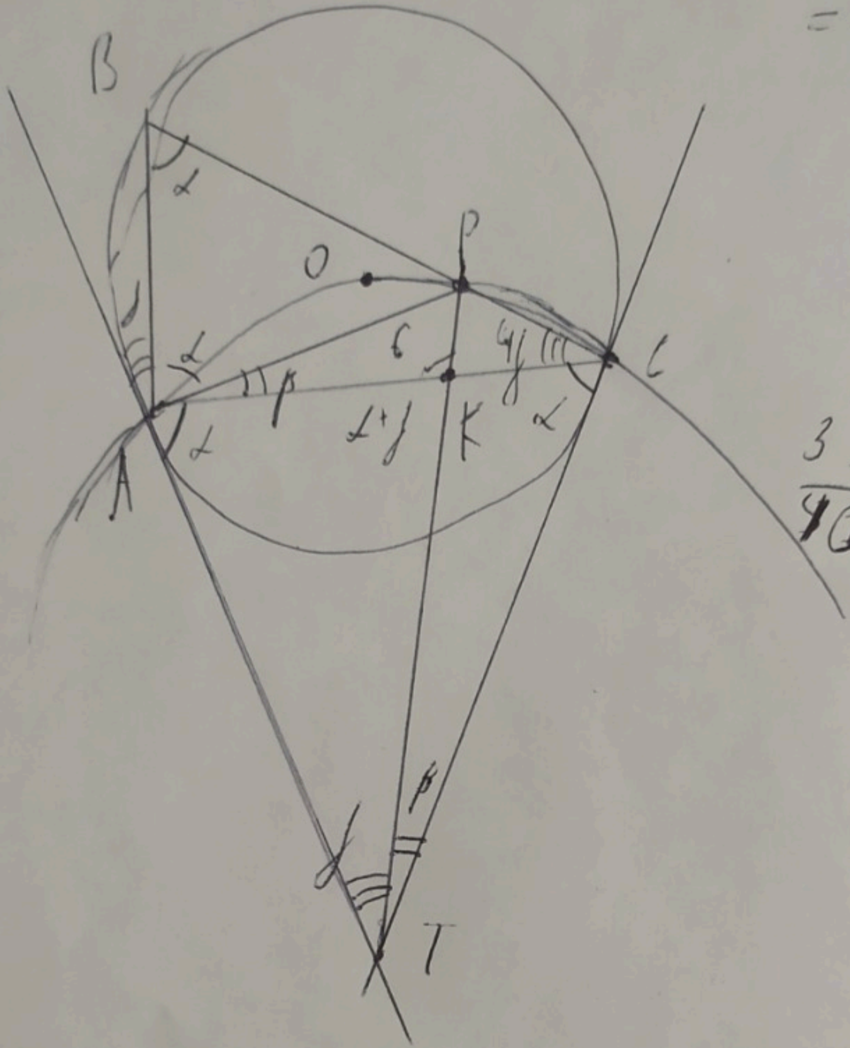


Черновик

$5400+630+72=$

$=5400+702$

$$\begin{array}{r} \times\; 678 \\ 591 \\ \hline 678 \\ 6102 \\ 3390 \\ \hline 400698 \end{array}$$



$\log_a c^2 \cdot \log_a b = 1$

Черновик

21101314 (U182928 M1304103)