Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101296**

ID профиля: **862959**

Вариант 17

Задача 1 Чистовик

$$S = \frac{a + a + 9b}{2} \cdot 10 = 5 \cdot (2a+9b)$$

$$\begin{cases} (a+5b)(a+11b) > 5(2a+9b)+1 \\ (a+6b)(a+10b) < 5(2a+9b)+17 \end{cases}$$

$$+\begin{array}{l} a^2 + 16ab + 55b^2 > 5(2a+9b)+1 \quad | \cdot (-1) \\ a^2 + 16ab + 60b^2 < 5(2a+9b)+17 \end{array}$$

$5b^2 < 16 \Rightarrow b = 1$, единственное решение, т.к. последовательность возрастает и целые числа

$$\begin{cases} a^2 + 16a + 55 > 10a + 46 \\ a^2 + 16a + 60 < 10a + 62 \end{cases}$$

$$10a + 46 < a^2 + 16a + 55 < 10a + 57$$

$$0 < a^2 + 6a + 9 < 11$$

$$0 < (a+3)^2 < 11$$

целые решения: $-6, -5, -4, -2, -1, 0$.

Ответ: $-6, -5, -4, -2, -1, 0$.

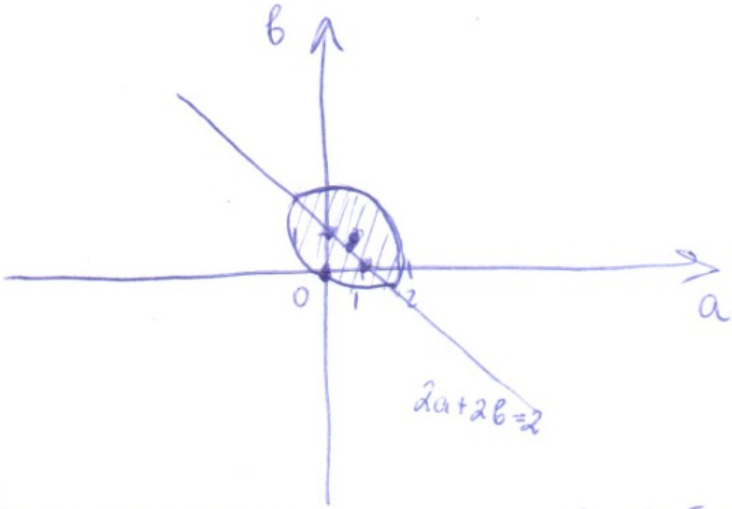
Задача 3 Чистовик

Изобразим второе уравнение в координатах $(a;b)$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \leq 2 \\ 2a + 2b \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \leq 2 + 2b \\ 2a + 2b \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-1)^2 + (b-1)^2 \leq 2 \\ 2a + 2b \leq 2 \end{cases}$$



Наша окружность с центром (x, y) будет пересекать заштрихованную область при условии, что

$$\rho((x;y), (1;1)) \leq \sqrt{2}$$

$$\rho((x;y), (0;0)) \leq \sqrt{2}$$

Решим систему уравнений и найдём точку пересечения

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2x = 1 \end{cases}$$

$2 - 2x + 2y = 0$

$x + y = 1$

$x^2 + y^2 = 2$

$x^2 + (1-x)^2 = 2$

$2x^2 - 2x + 1 = 2$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \\ y &= \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2} \end{aligned}}$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101296**

ID профиля: **862959**

Вариант 17

Задача 5 (1стр.) Чистовик

$$\begin{cases} 5x-1>0 \\ 4x+1>0 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ 5x-1\neq 1 \\ 4x+1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases} \Rightarrow x\in\left[\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{2}{5};+\infty\right)$$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2\log_{5x-1}4x+1=a$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=b$

$\log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1)=c$

$abc=4$ по св-ву логарифма пусть кто-что из н

a,b,c равен $x-1$, а оставшиеся x $\Rightarrow$

$x^2(x-1)=4$

$x^3-x^2=4$

$(x-2)(x^2+x+2)=0$

1) $x=2 \Rightarrow$ кто ровен 1, а что-то 2

$2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=2 \Rightarrow 4x+1=\frac{x}{2}+2$

$8x+2=x+4$

$x=\frac{2}{7}$

$2\log_{5x-1}4x+1=2 \Rightarrow 5x-1=4x+1 \Rightarrow x=2\neq\frac{2}{7}$ - не решение

2) $2\log_{4x+1}\left(\frac{7}{2}+2\right)=1 \Rightarrow \frac{x}{2}+2=\sqrt{4x+1}$

$(x+4)^2=16x+4$

$x^2-8x+12=0$

$x_1=2 \quad x_2=6$

21101296 (U862959 M1296098)

Задача 5 (стр. 2) Чистовик

$\log_{\frac{x}{2}+2} 5x-1=2 \Rightarrow 5x-1=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \Rightarrow x^2+8x+16=20x-4$

$x^2-12x+20=0$

$x_1=2 \quad x_2=10$

$\boxed{x=2}$ подходит в кошлое, проверим:

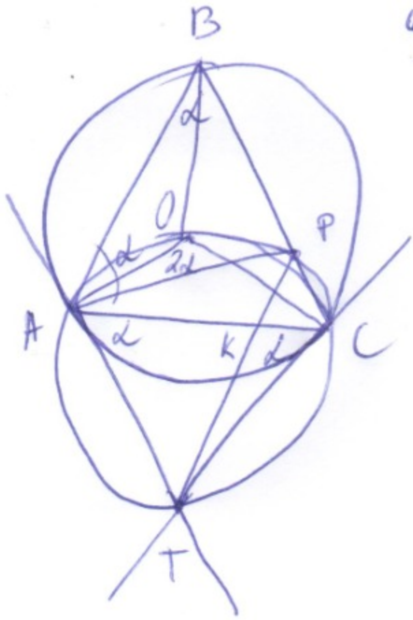
$2\log_9 9=2 \Rightarrow$ подходит

21101296 (U862959 M1296098)

Задача 6

Чистовик

~~Пусть~~



а) Тогда $\angle APT = \angle ACT = \angle\alpha$ (как деля опир. на дугу AT) $\Rightarrow \angle TPC = 2\alpha - \alpha = \alpha$

Имеем $\angle BAP = \angle TPC = \angle\alpha \Rightarrow$ Но $\angle BAP$ и $\angle TPC$ - накрест. леж. при $AB \parallel PT$ и сек. AP

$\Delta CPK \sim \Delta CBA$ (по 2 углам)

$S_{APC} = \frac{1}{2} AC \cdot h = 10$

$S_{PKC} = \frac{1}{2} KC \cdot h = 4 \Rightarrow \frac{AC}{KC} = \frac{10}{4} = 2{,}5$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CPK}} = k^2 = 6{,}25 \Rightarrow S_{ABC} = 4 \cdot 6{,}25 = \boxed{25}$

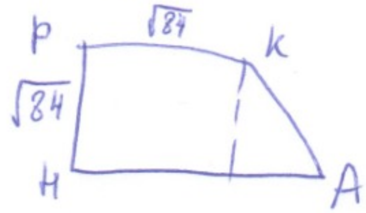
б) $S_{ABC} = 25$ $S_{ABP} = 25 - 10 = 15$ $S_{ABP} = \frac{AB^2}{4\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{AB^2 \operatorname{tg}\alpha}{4} = \frac{AB^2 \cdot 7}{20} = 15$

$AB = \sqrt{\frac{15 \cdot 20}{7}} = 5\sqrt{\frac{12}{7}}$

Проведём высоту PH, $O \in PH$, ΔABP - равноб

$PH = \frac{AB}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{12 \cdot 7} = \sqrt{84}$

$\angle OPT = 90°$ (угол между биссектрис.) $\Rightarrow$ HPKA - прямоуг трапеция



21101296 (U862959 M1296098)

Задача 4. Чистовик

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1}$

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2}$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3}$

Используем определение НОД и НОК

НОД $(a, b, c) = 2^{\min(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)} \cdot 3^{\min(\beta_1 \beta_2 \beta_3)}$

НОК $(a, b, c) = 2^{\max(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)} \cdot 3^{\max(\beta_1 \beta_2 \beta_3)}$

Из условия:

$\min(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = 1$

$\max(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = 15$

$\min(\beta_1, \beta_2 \beta_3) = 1$ (*)

$\max(\beta_1 \beta_2 \beta_3) = 16$ (**)

. Найдём кол-во $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ с учётом (*) и (**)

Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$

Таких комбинаций ровно 13. Поскольку все числа раззличны, нам следует 12 умножить на 6 (6 - это кол-во ~~перестановок~~ $(x, y, z), (x, z, y) \ldots$)

Рассмотрим 2 оставшихся случая $\alpha_1 = \alpha_2 < \alpha_3$ и $\alpha_1 < \alpha_2 = \alpha_3$. Их ровно 6 (с учётом перестановок)

Получаем $13 \cdot 6 + 6 = 14 \cdot 6$

Аналогично рассмотрим $(\beta_1 \beta_2 \beta_3)$

$14 \cdot 6 + 6 = 15 \cdot 6$

С учётом всех случаев получаем ответ: $15 \cdot 6 \cdot 14 \cdot 6 = \underline{14 \cdot 15 \cdot 6^2}$

21101296 (U862959 M1296098)