Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

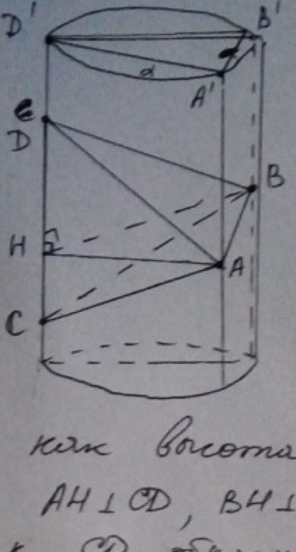
Шифр: **21101215**

ID профиля: **245246**

Вариант 17

Чистовик (лист 1)

№2



- Цилиндр β.
- $D \in \beta$, $C \in \beta$, $CD \parallel$ оси $\beta \Rightarrow$ $\Rightarrow CD$ - образующая β.

$\triangle BDC = \triangle ADC$ по 3 сторонам ($AD = BD$, $AC = BC$, CD - общая); пусть $AH \perp CD$, $H \in CD$, но тогда и $BH \perp CD$, как высота в равном треугольнике

- $AH \perp CD$, $BH \perp CD \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB \Rightarrow$ т.к. CD образующая, то $AB \parallel \alpha$, где α - верхнее основание цилиндра.
- Спроецируем точки D, A и B на α, получим соответственно: D', A', B', но $A'B' = AB = 2$, т.к. $AB \parallel \alpha$, для $\triangle D'A'B'$ по т. синусов:

$\frac{A'B'}{2\sin\angle A'D'B'} = R$ - радиус цилиндра $\Rightarrow R \to \min$, если $\sin\angle A'D'B' = 1 \Rightarrow \angle A'D'B' = 90°$ и $R = \frac{2}{2} = 1$, тогда $A'D' = B'D' = 1 \cdot \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$AHD'A'$ - $\underbrace{\text{прямоугольник}}_{}$ $(AH \perp HD', AH \perp AA', A'D' \perp HD', \text{т.к. } HD' \perp \alpha, A'D' \subset \alpha)$, $\Rightarrow D'A' = HA$

Пусть $DH = x$, $CH = y$, тогда по т. Пифагора в $\triangle AHD$

$$x = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{36 - \frac{1}{2}} = \sqrt{35{,}5}$$

~~y =~~ По т. Пифагора из $\triangle AHC$:

$$y = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{25 - \frac{1}{2}} = \sqrt{24{,}5}$$

Если высота, как на рисунке, падает на CD, то $CD = x + y = \sqrt{35{,}5} + \sqrt{24{,}5}$. Если она падает вне CD, то

Чистовик (лист 2)

тогда $CD = x - y = \sqrt{35,5} - \sqrt{24,5}$

Ответ: $CD = \sqrt{35,5} + \sqrt{24,5}$ или $CD = \sqrt{35,5} - \sqrt{24,5}$

№1

Пусть d - разность арифм. прогрессии $d>0$,

тогда $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 5(a_1 + a_1 + 9d) =$

$= 10a_1 + 45d$

$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S+1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S+17 \end{cases}$, $\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+11d) > S+1 \\ (a_1+6d)(a_1+10d) < S+17 \end{cases}$,

$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 > S+1 \\ a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 < S+17 \end{cases}$, $\begin{cases} a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 > S+1 \ (1) \\ S+17 > a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 \ (2) \end{cases}$

(1) + (2) $\cancel{a_1^2} + \cancel{16a_1d} + 55d^2 + \cancel{S} + 17 > \cancel{S} + 1 + \cancel{a_1^2} + \cancel{16a_1d} + 60d^2$

$16 > 5d^2 \Rightarrow \frac{16}{5} > d^2 \xRightarrow{\boxed{\text{т.к. } d>0}} \sqrt{\frac{16}{5}} > d > 0$

$\frac{16}{5} = 3,2 \Rightarrow 2 > \sqrt{\frac{16}{5}} > 1 \Rightarrow d = 1$, т.к.

~~$a_i \in \mathbb{N}$~~ и $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_{i+1} \in \mathbb{Z}$, то и $d \in \mathbb{Z}$,

ведь ~~$a_i \pm a$~~ $a_{i+1} = a_i + d$

$d = 1$

$\begin{cases} (a_1+5)(a_1+11) > S+1 \\ (a_1+6)(a_1+10) < S+17 \end{cases}$, $\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 46 \\ a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 62 \end{cases}$,

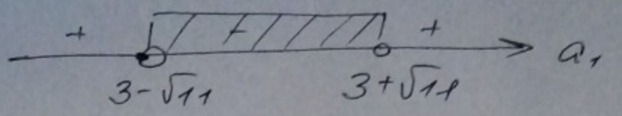
$\begin{cases} a_1^2 - 6a_1 + 9 > 0 \ (1) \\ a_1^2 - 6a_1 - 2 < 0 \ (2) \end{cases}$

~~$(1) \ (a-3)^2$~~ (2) $a_1^2 - 6a_1 - 2 = 0$

$D = 36 + 8 = 44$

$a_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{44}}{2} = 3 \pm \sqrt{11}$

Чистовик (лист 3)



$3<\sqrt{11}<4 \Rightarrow -1<3-\sqrt{11}<0$ и $6<3+\sqrt{11}<7$,
тогда т.к. $a_1\in\mathbb{Z}$, то $a_1\in\{0;1;2;3;4;5;6\}$ (*)

(1) $(a_1-3)^2>0$

$a_1\in(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$, видно, что из (*) нам подходит всё, кроме $a_1=3$.

Ответ: $a_1\in\{0;1;2;4;5;6\}$

Черновик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2 \\ a^2+b^2\le \min(2a+2b,2)\end{cases}$$

$a^2+b^2\le 2$

$2(a+b)<2$

$a+b<1$

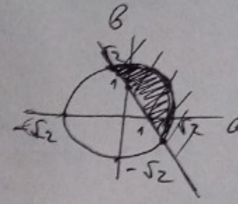
если $a+b \geqslant 1$, то $b\ge 1-a$

$a\le\sqrt{2}$ $b\le\sqrt{2}$

$a^2+b^2\le 2 \Rightarrow a^2\le 2-b^2$

$(a+b)^2-2ab\le 2$

$x^2-2xa+\underline{a}^2+y^2-2yb+\underline{b}^2\le 2$



$a+b=1$

$a^2+b^2=2$

$1-2ab=2$

$-2ab=+1$

$ab=-1$

$a(1-a)=-1$

$-a^2+a+1=0$

$D=1+4=5$

$a=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{-2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

если $a+b<1$, то

$a^2+b^2\le a+b$

$\underbrace{(a+b)}_{y<x}{}^2-2ab\le \underbrace{a+b}_{x}$

Черновик

$a_i = a_1 + d(i-1)$

$d > 0$

$S = a_1 + a_1 + \ldots + a_{10} =$

$= 10a_1 + \frac{d+9d}{\cancel{2}2} \cdot \cancel{4}9 = 10a_1 + 45d$

$$\begin{cases}(a_1+5d)(a_1+11d) > 10a_1+45d+1 \\ (a_1+6d)(a_1+10d) < 10a_1+45d+17\end{cases},$$

$$\begin{cases}a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 < 10a_1 + 45d + 1 & (1) \\ a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 > 10a_1 + 45d + 17 & (2)\end{cases}$$

~~(2)-(1)~~ ~~$5d^2$~~ $(1) + (2)$ перев.

$\cancel{10a_1} + \cancel{45d} + 17 + \cancel{a_1^2} + \cancel{16a_1d} + 55d^2 < \cancel{10a_1} + \cancel{45d} + 1 + \cancel{a_1^2} + \cancel{16a_1d} + 60d^2$

$17 < 5d^2 \Rightarrow \cancel{\frac{17}{5}}\ d^2 > \frac{17}{5}$ $\quad d > \sqrt{\frac{17}{5}} > \sqrt{3}$

90

360

$a_1 \in \mathbb{Z}$ $\quad d \in \mathbb{Z}$

$d \geq 2$

если $d = 2$

$$\begin{cases}a_1^2 + 32a_1 + 220 < 10a_1 + 90 + 1 \\ a_1^2 + 32a_1 + 240 > 10a_1 + 90 + 17\end{cases}, \quad \begin{cases}a_1^2 + 22a_1 + 129 < 0 \\ a_1^2 + 22a_1 + 133 > 0\end{cases},$$

$a_1^2 + 2 \cdot 11 \cdot a_1 + 121 + 8 < 0$

$(a_1 + 11)^2 + 8 < 0$

$d \neq 2$

если $d = 3$: $a_1^2 + 38a_1 + 359 < 0$

$(a_1 + 19)^2 - 2 < 0$

$a_1 + 19 \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$

$-1; 0; 1$

$a_1 = \left[\begin{array}{l}-20 \\ -19 \\ -18\end{array}\right.$

$a_1^2 + 38a_1 + 388 > 0$

$$\begin{cases}a_1^2 + (16d - 10)a_1 + 55d^2 - 45d - 1 < 0 \\ a_1^2 + (16d - 10)a_1 + 60d^2 - 45d - 17 > 0\end{cases}$$

$55d^2 - 1 < 60d^2 - 17$

$16 < 5d^2$

$\frac{16}{5} = 3{,}2$ $\quad \frac{16}{5} < d^2$ $\quad d > \frac{4\sqrt{5}}{5}$

$d > \sqrt{\frac{16}{5}}$

$2 > \sqrt{\frac{16}{5}} > \sqrt{3}$ $\quad d > 2$

$550 - 55 = 495$

$495 - 135 = 360$

$22 \times 22 = 484$

$540 - 405 = 135$

$135 - 17 = 118$

$19 \times 19 = 361$

$450 - 45 = 405$

$45 \times 3 = 135$

$540 - 135 = 405$

$405 - 17 = 388$

$16 \times 16 = 256$

$256 \times 4 = 1024$

-1124

80

$104 \times 36 = 3744$

4900

4096

$4196 - 1280 = 2916$

$4900 - 3744 = 1856$

$16 \times 16 = 256$

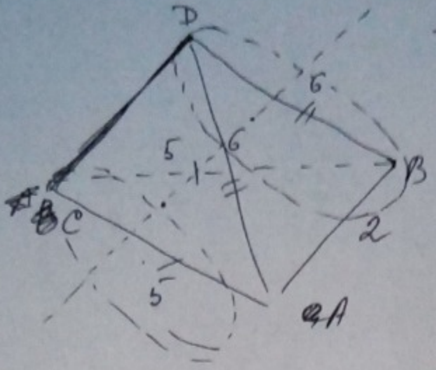
1856

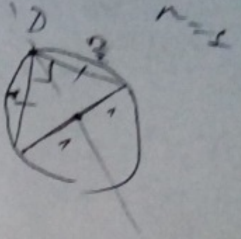
$55 \times 16 = 880$

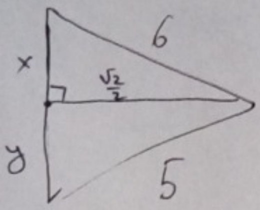
$880 - 180 = 700$

Черновик

$R = \frac{a}{2\sin\alpha}$

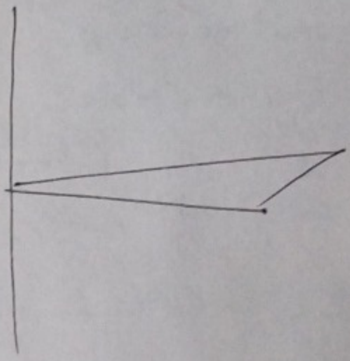






$$x^2 + \frac{1}{2} = 36$$

$$y^2 + \frac{1}{2} = 25$$



Черновик

6.

$$\begin{array}{r} {}^{4}\,27 \\ \times\, 27 \\ \hline 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{3}\,55 \\ \times\, 16 \\ \hline +\,330 \\ 55 \\ \hline 880 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{2}\,45 \\ \times\, 4 \\ \hline 180 \end{array}$$

8 700

$d = 4$

$a_1^2 + 54a_1 + 6699 < 0$

$54 = 2 \cdot a_1 \cdot \cancel{27}$

$\left(\frac{16d-10}{2}\right)^2 > 55d^2 - 45d - 1$

$256d^2 - 320d + 100 > 220d^2 - 180d - 4$

$36d^2 - 140d + 104 > 0$

$(6d)^2 - 2 \cdot 6d \quad \frac{D}{4} = 4900 - 3744 = 1856$

$f(x) = 55d^2 - 45d - 1$

min $d = \frac{45}{110} < 2 \Rightarrow f(d)$ - возр при $d > 2$

$f_{min} = f(2) = 220 - 90 - 1 = 129$

$a_1^2 + (16d-10)a_1 + f(d) < 0$

$(a_1)^2 + 2 \cdot \frac{16d-10}{2} \cdot a_1 + \left(\frac{16d-10}{2}\right)^2 + f(x) - \left(\frac{16d-10}{2}\right)^2 < 0$

$\left(a_1 + \frac{16d-10}{2}\right)^2 + f(x) - \left(\frac{16d-10}{2}\right)^2 < 0$

-289

$\left(\frac{16d-10}{2}\right)^2 > 55d^2 - 45d - 1$

$256d^2 - 320d + 100$

$(16d-10)(16d-10)$

$256d^2 - 160d - 160d + 100$

$$\begin{array}{r} {}^{3\,3}\,256 \\ \times\, 16 \\ \hline +\,1536 \\ 256 \\ \hline 4096 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 320 \\ 4 \\ \hline 1280 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4196 \\ -\,1280 \\ \hline 2916 \end{array}$$

64

$(8d-5)^2 > 55d^2 - 45d - 1$

$64d^2 - 80d + 25 > 55d^2 - 45d - 1$ $\quad 60d^2 - 45d - 17$

$9d^2 - 125d$

$-9d^2 + 35d - 26$

$a_1^2 + (16d-10)a_1 + 60d^2 - 45d - 17 > 0$

$(a_1^2 + (8d-5))^2 + 60d^2 - 45d - 17 - (8d-5)^2 > 0$

~~a_1+~~

Черновик

$$(a_1+8d-5)^2 \cancel{+} -9d^2+35d-26<0$$

$$(a_1+8d-5)^2-4d^2+35d-42>0$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101215**

ID профиля: **245246**

Вариант 17

Чистовик (лист 1)

$n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

№4

$$\left.\begin{array}{l} \text{НОД}(a;b;c) = 6 \\ \text{НОК}(a;b;c) = 2^{15} \cdot 3^{16} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} a = 6 \cdot 2^{n_1} \cdot 3^{m_1} = 2 \cdot 3 \cdot 2^{n_1} \cdot 3^{m_1} \\ b = 6 \cdot 2^{n_2} \cdot 3^{m_2} = 2 \cdot 3 \cdot 2^{n_2} \cdot 3^{m_2} \\ c = 6 \cdot 2^{n_3} \cdot 3^{m_3} = 2 \cdot 3 \cdot 2^{n_3} \cdot 3^{m_3} \end{array}$$

- если среди n_1, n_2 и n_3 нет 0, а наименьшее из них $n_i \neq 1$, то НОД$(a;b;c) = 6 \cdot n_i$, значит, среди n_1, n_2 и n_3 есть хотя бы 1 ноль. Аналогично среди m_1, m_2, m_3 есть хотя бы 1 ноль.
- определим число различных троек $(n_1; n_2; n_3)$

⊗ если среди них ровно 1 ноль, то одно из чисел равно 14, а другое принимает любые значения от 1 и до 14, и наоборот, когда ~~второе~~ другое число равно 14, но вариант, когда оба из них равны 14 мы учли дважды $\Rightarrow$ при фиксированном месте нуля вариантов $14 + 14 - 1 = 27$

Т.к. нулем может быть любое из n_1, n_2 и n_3, то вариантов всего $27 \cdot 3 = 81$.

⊗ если среди них ровно 2 ноля, то другое число, не равное 0, равно 14, всего таких вариантов 3.

⊗ все числа n_1, n_2 и n_3 не могут одновременно быть 0, иначе в НОК$(a;b;c)$ множитель 2 входил бы только в 1 степени.

Всего троек $(n_1; n_2; n_3)$ $81 + 3 = \underline{84}$.

21101215 (U245246 M1302315)

Чистовик (лист 2)

- определим число различных троек $(m_1; m_2; m_3)$

⊗ если среди них ровно 1 ноль, то одно из оставшихся чисел равно 15, а другое принимает любые значения от 1 до 15, и наоборот, когда другое число равно 15, но вариант, когда оба из них равны 15 мы учли дважды $\Rightarrow$ при фиксированном месте нуля вариантов $15+15-1=29$

Т.к нулем может быть любое из m_1, m_2, m_3, то вариантов $29 \cdot 3 = 87$

⊗ если среди них ровно 2 ноля, то другое число, не равное 0, равно 15, всего таких троек $(m_1; m_2; m_3)$ будет 3.

⊗ все числа m_1, m_2 и m_3 не могут одновременно быть 0, иначе в НОК$(a; b; c)$ множитель 3 будет входить только в 1 степени.

Всего троек $(m_1; m_2; m_3)$ будет $87+3=\underline{90}$

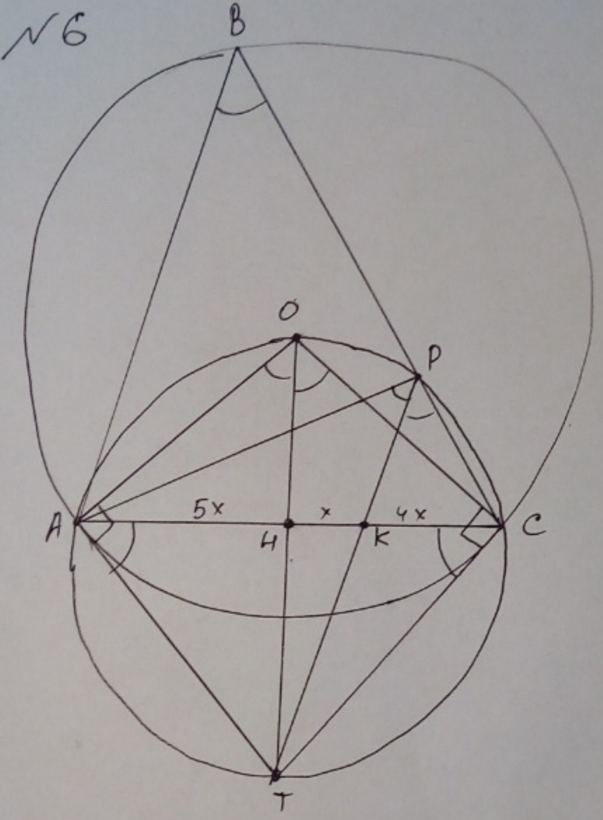
- каждая тройка $(a; b; c)$ – это выбор одной тройки из троек $(n_1; n_2; n_3)$ и одной тройки из $(m_1; m_2; m_3)$, т.к. тройки $(n_1; n_2; n_3)$ и $(m_1; m_2; m_3)$ независимы, то всего троек $(a; b; c)$ будет

$87 \cdot 90 = 7200 + 630 = 7830$

Ответ: 7830.

Чистовик (лист 3)

№6



- $\angle OAT + \angle OCT = 90° + 90° = 180°$ (т.к. $OC \perp CT$ и $OA \perp AT$)
  OACT - вписанный $\Rightarrow T \in$ окр Ω, где окр Ω описана около $\triangle AOC$
- $\frac{S_{APC}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{KC} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
- Пусть $KC = 4x$, тогда $AK = 6x$, $H \in AC$, $AH = HC = 5x$, тогда т.к. $AO = OC$ - радиусы, то OH - биссектр. и высота, серед. перпенд. к AC $\Rightarrow$ т.к. $T \in$ прямой HO, то $AC = TC \Rightarrow \triangle ATC$ р/б, $TH \perp AC$
- Пусть $\angle ACT = \beta = \angle TAC$ (т.к. $\triangle ATC$ р/б)
  $\angle ABC = \beta = \angle ACT$ - угол между хордой и касат.
  $\angle AOT = \angle ACT = \angle APT$ - вписанные, опир. на одну дугу

Чистовик

$\angle HOC = \beta = \angle AOH$ т.к. OH - биссектр.

$\angle TPC = \beta = \angle TAC$ - вписанные

в $\triangle APC$ PK - биссектр. $\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$\angle BPA = 180° - \angle APC = 180° - \beta - \beta$

$\cancel{\angle A}\ \angle BAP = 180° - \angle ABP - \angle BPA = 180° - \beta - 180° + 2\beta = \beta$

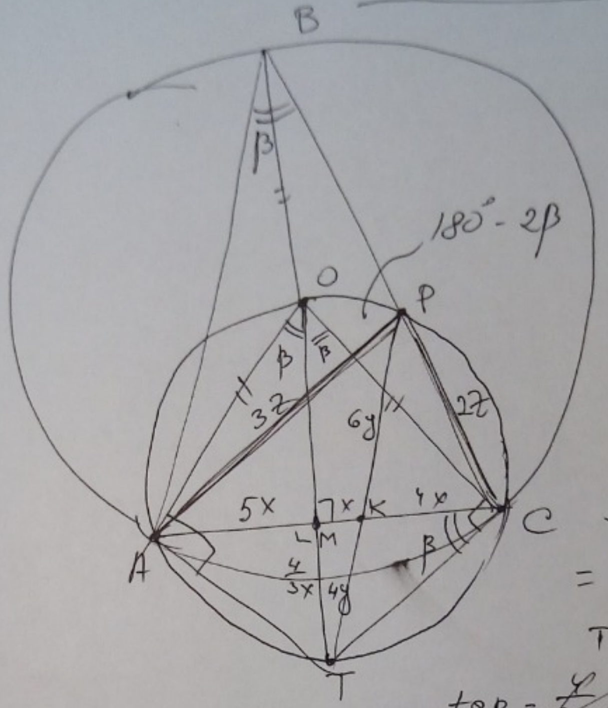
$\angle BAP = \angle ABP \Rightarrow \triangle BPA$ р/б $\Rightarrow AP = BP$

$\frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{BP}{PC} = \frac{AP}{PC} = \frac{3}{2} \Rightarrow S_{ABP} = \frac{3}{2} \cdot S_{APC} = \frac{3}{2}(S_{APK} + S_{KPC}) =$

$= \frac{3}{2} \cdot 10 = 15$

$S_{ABC} = 15 + 10 = 25$

Черновик.



$S_{AKT} = \frac{4}{6} \cdot 6 = 4$

$S_{CKT} = \frac{4}{6} \cdot 4 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

$S_{ACT} = 4 + \frac{8}{3} = \frac{12+8}{3} = \frac{20}{3} =$

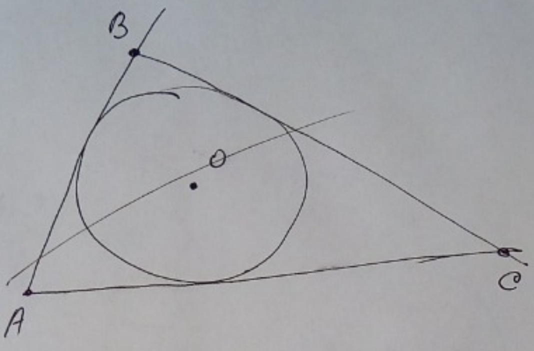
$= \frac{1}{2} \cdot TM \cdot AC = 5x \cdot TM$

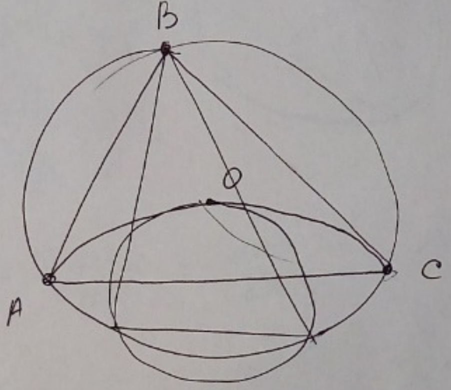
$TM = \frac{20}{15x} = \frac{4}{3x}$

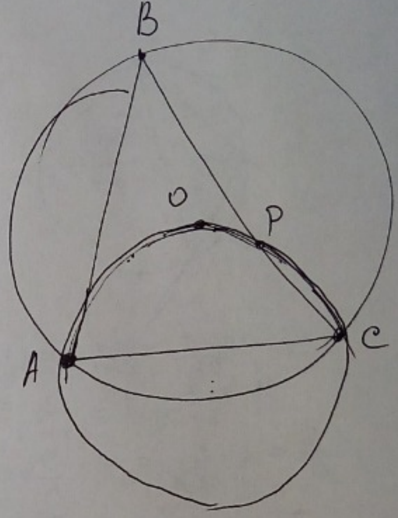
$tg\beta = \cancel{\frac{4}{3x \cdot 4x}} = \cancel{\frac{4}{12x^2}}\ \frac{4}{3x \cdot 4x} = \frac{1}{3x^2}$

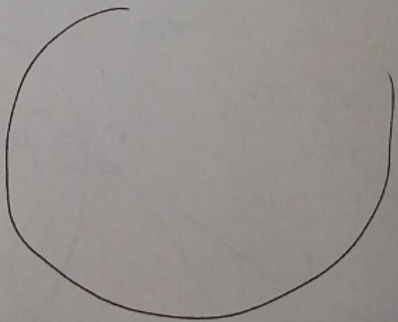
$tg\beta = \frac{AM}{OM} = \frac{5x}{OM} = \frac{1}{3x^2} \Rightarrow OM = 15x^3$

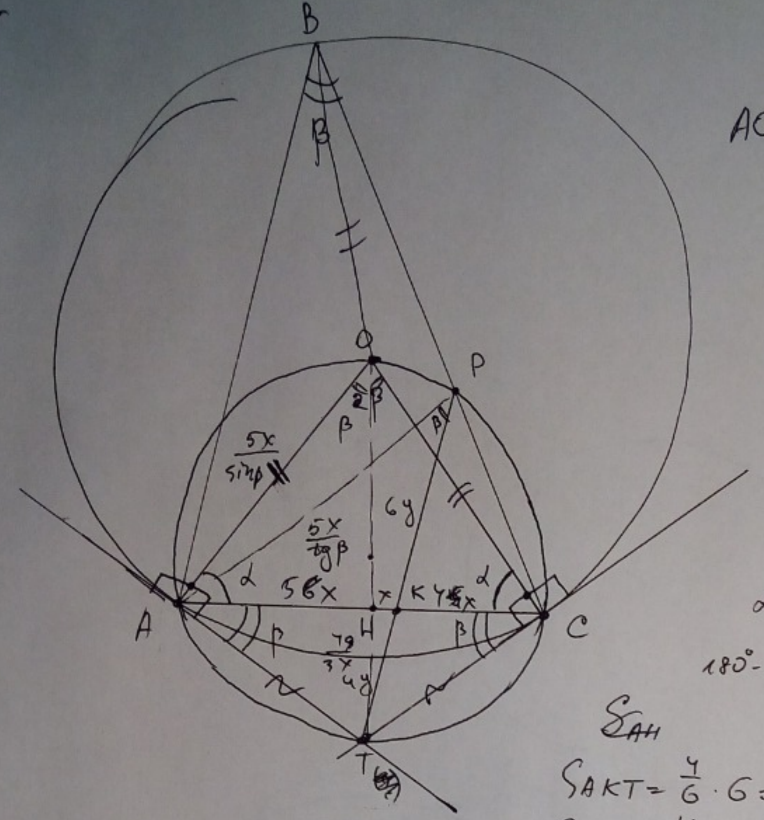
Черновик.











$AO = OC = R$

$S_{APK} = 6$

$S_{CPK} = 4$

S_{ABC}

$\alpha + \beta = 90°$

$180° - 2\alpha$

S_{AH}

$S_{AKT} = \frac{4}{6} \cdot 6 = 4$

$S_{CHT} = \frac{4}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$

$S_{ACT} = 4 + \frac{8}{3} = \frac{12+8}{3} = \frac{20}{3}$

$HT = \frac{2S_{ACT}}{AC} = \frac{40}{3 \cdot 10x} = \frac{4}{3x}$

$R = \frac{10x}{2\sin\beta} = \frac{5x}{\sin\beta}$

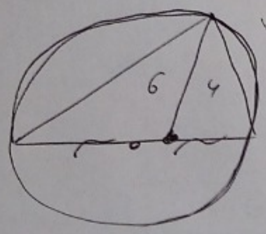
$\cancel{2}5x^2 = \frac{\cancel{5x}}{tg\beta} \cdot \frac{4}{3\cancel{x}}$

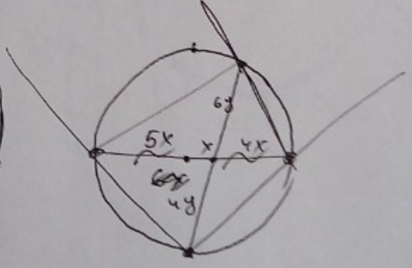
$5x^2 \cdot 3 tg\beta = 4$

$tg\beta = \frac{4}{15x^2}$

$\frac{5x}{}$

r_2





Черновик.

равен 0	max
n_1 m_2	n_2, m_1

Черновик.

НОД(a;в;c)=6

$a=2\cdot3\cdot k$

$в=2\cdot3\cdot n$

$c=2\cdot3\ m$

НОД(k,n,m)=1

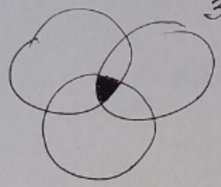
НОК(a;в;c)$=2^{15}\cdot3^{16}=$

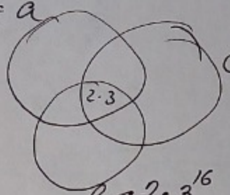
$=2\cdot3\cdot2^{14}\cdot3^{15}$

$a\cdot в\cdot c$

~~вх~~ = a

$3\cdot2^{15}$





$c=6=2\cdot3$

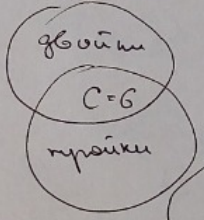
$в=2\cdot3^{16}$

$k\neq1$
$n\neq1$ – невозм.
$m\neq1$

одно из чисел = 6

$3\cdot2=\boxed{6\ в.}$

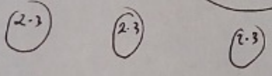
если одно из чисел = 6



двойки · 3
тройки · 2

6

о 15



если числа > 6

$\cdot\ 6,\ 6,\ 2^{15}\cdot2^{16}$ – $\boxed{3\ в.}$

$a=2\cdot3\cdot2^{14}$

$в=2\cdot3\cdot3^{15}$

$c=2\cdot3\cdot3^{n}$

$a=2\cdot3\cdot2^{n_1}3^{n_2}$

$в=2\cdot3\cdot2^{m_1}\cdot3^{m_2}$

$c=2\cdot3\cdot2^{k_1}\cdot3^{k_2}$

~~$\max(n_1;n_2;n$~~

$\max(n_1,m_1,k_1)=14$

$\max(n_2;n_2;k_2)=15$

кто-то из $(n_2,\ m_2,\ k_2)$ и $(n_1,m_1,k_1)=0$

равен 0		max	
n_1	n_2	m_1	m_2

вар.

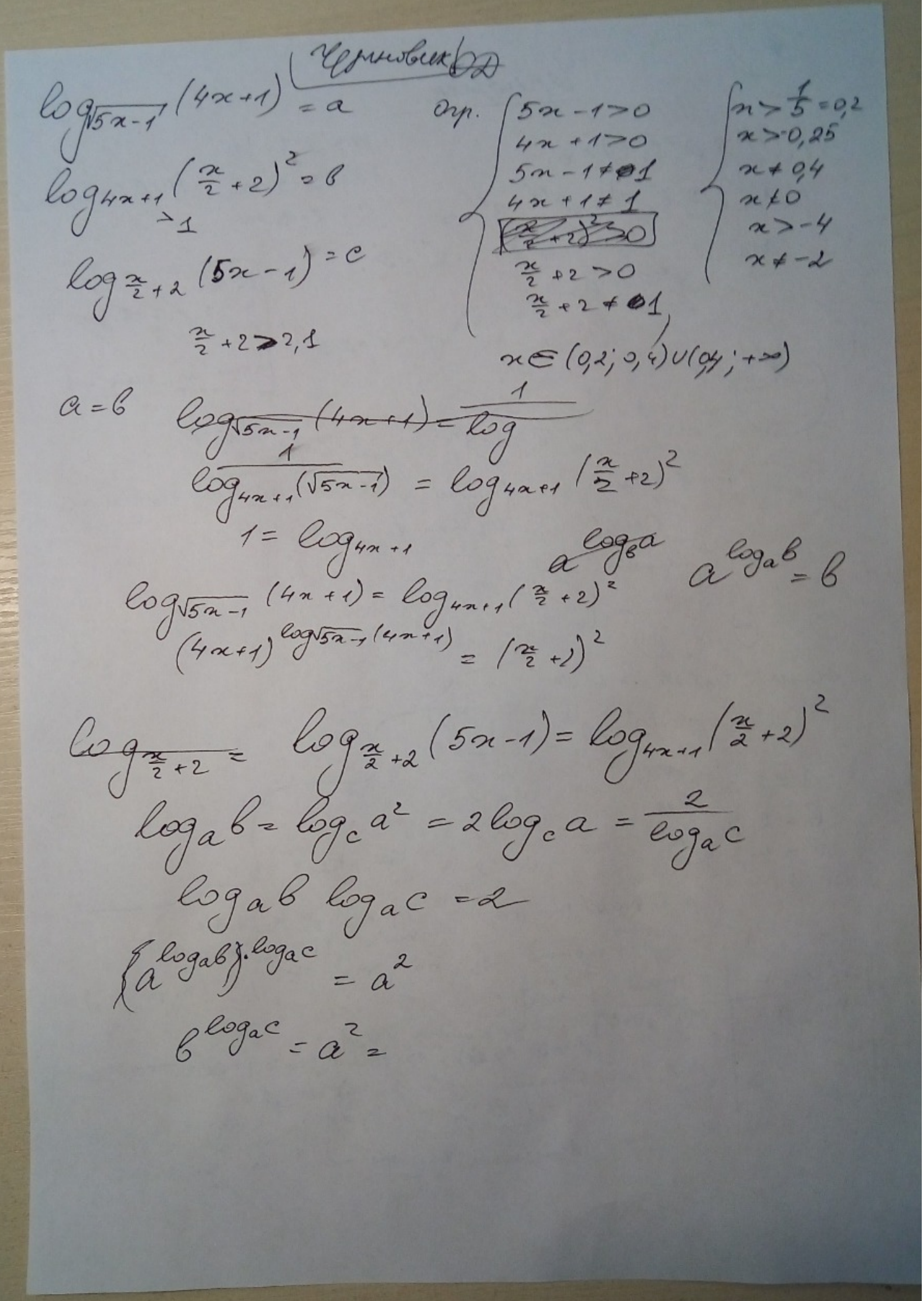
k_1 и k_2 – любое $\neq0$

$(14)(15)=15\cdot\cancel{16}^{14}$ ~~$=150+60+30=150+90=240$~~

Аналог. $\max(k_1,k_2)$ – 240

$\underline{-1\ в.}$ т.к. $k_1=m_1=\max$ $k_2=m_2=\max$

Аналог. $m_1\ m_2=0$ и $k_1\ k_2=0$



Черновик ОД

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=a$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=b$

>1

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=c$

$\frac{x}{2}+2 > 2,1$

Огр. $\begin{cases} 5x-1>0 \\ 4x+1>0 \\ 5x-1\neq 1 \\ 4x+1\neq 1 \\ \cancel{\left(\frac{x}{2}+2\right)^2>0} \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>\frac{1}{5}=0,2 \\ x>-0,25 \\ x\neq 0,4 \\ x\neq 0 \\ x>-4 \\ x\neq -2 \end{cases}$

$x\in(0,2;\,0,4)\cup(0,4;\,+\infty)$

$a=b$ ~~$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=\frac{1}{\log}$~~

$\frac{1}{\log_{4x+1}(\sqrt{5x-1})}=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$1=\log_{4x+1}$

$a^{\log_b a}$ $a^{\log_a b}=b$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$(4x+1)^{\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)}=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

~~$\log_{\frac{x}{2}+2}$~~ $=$ $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\log_a b=\log_c a^2=2\log_c a=\frac{2}{\log_a c}$

$\log_a b\,\log_a c=2$

$\left(a^{\log_a b}\right)^{\log_a c}=a^2$

$b^{\log_a c}=a^2=$

21101215 (U245246 M1302315)