

Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101150**

ID профиля: **372882**

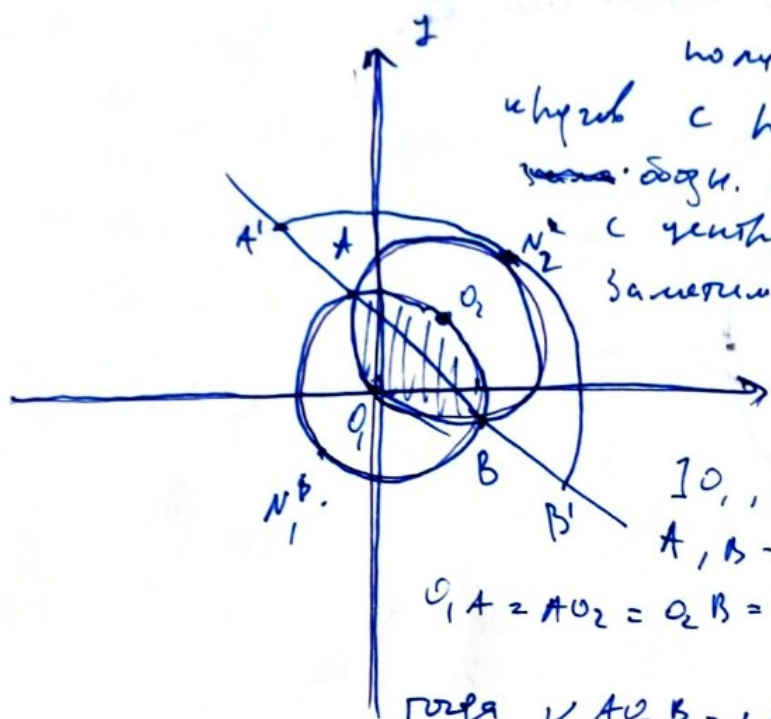
Вариант 17

3

Условие

стр. 3

1) Рассм. всевозм. пары (a, b) , где кот. $a^2 + b^2 \leq \min(2a + 2b, 2)$ \Leftrightarrow
 $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 \leq 2a + 2b \\ a^2 + b^2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (b-1)^2 \leq 2 \\ a^2 + b^2 \leq 2 \end{cases}$ \Leftrightarrow $\begin{cases} \text{угол } \omega_1 \text{ с центром в } (1,1) \text{ радиус } \sqrt{2} \\ \text{угол } \omega_2 \text{ с центром в } (0,0) \text{ радиус } \sqrt{2} \end{cases}$



получим перес. двух окружностей с радиусом $\sqrt{2}$ и центрами в $(0;0)$ и $(1;1)$
 ω_1 - угол с центром в $(0;0)$ за ω_1 ,
 ω_2 с центром в $(1,1)$ за ω_2 .
 Заметим, что $(0,0)$ лежит на ω_2 , а $(1,1)$ лежит на ω_1 , т.к.
 $\sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$.
 O_1, O_2 - центры ω_1 и ω_2 соответственно,
 A, B - т. кас. (см. рис).
 $O_1A = AO_2 = O_2B = BO_1 = \sqrt{2} \Rightarrow \triangle O_1AB = \triangle AO_2B$
 по 3 сторонам.

тогда, $\angle AO_2B = \angle AO_1B$ $\Leftrightarrow \angle AO_2B = \angle AO_1B = 120^\circ$
 $\angle AO_1B = 360^\circ - 2\angle AO_1B$
 \leftarrow условие выкл.

2) тогда, по свойству углов,
 $\angle AO_2B = \angle AO_1B = 120^\circ$

ЗМ перес. дуги AB в т. A' и B' , ок-ты - в N_1 и N_2 (см. рис)

Заметим, что A', N_2, B' (лежащая на м-ле m) - дуга ок-ты в 120° , т.к. мы только убавилим длину на $\sqrt{2}$ в каждой точке дуги.
 $(N_2$ лежит на ω_2 , т.к. $O_2N_2 = \sqrt{2}$). тогда длина дуги $A'B'$ на кот. N_2 лежит ω_2 - $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

3) тогда $S_{A'N_2B'} = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2}{2} \cdot \sin 120^\circ = r^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$
 формула сектора $r = 2\sqrt{2}$

4) ~~Минимум~~ Аналогично, $S_{A'N_1B'} = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$

сумма, $S(m) = S_{A'N_2B'} + S_{A'N_1B'} = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}$

21101150 (U372882 M1302400)
 Ответ: $\frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}$

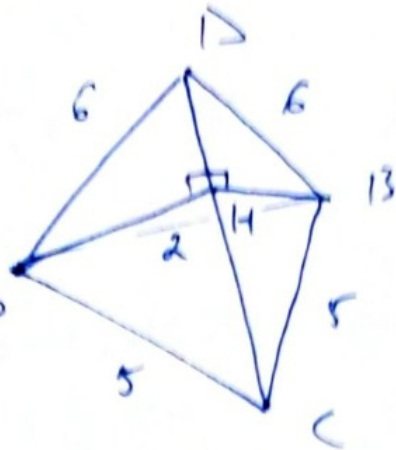
2

Угловик

срн. 2

1) Ишоб. висоту AH в $\triangle ADC$
и висоту BH' в $\triangle BCD$

Т.к. $\triangle ACD = \triangle CBD$ по 3 сторонам, то
 $\frac{DH}{HC} = \frac{DH'}{H'C} \Rightarrow H = H' \Rightarrow AH = HB$



2) DC — нахал. оси угла $\angle C$ \Rightarrow (ABH) — параллельная основанию плоскость сечения угла $\angle C$ на — то ABH .



$\triangle ABH$ вписан в окр-ть \Rightarrow хорда AB — диаметр
угла $\angle C$. по т. син, $R = \frac{AB}{2 \sin \alpha} = \frac{2}{2 \sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}$,
где $\alpha = \angle C$.
Круги \Rightarrow $R = \frac{1}{\sin \alpha}$

где $\alpha = \angle AHB$ т.к. $\frac{1}{\sin \alpha} \geq 1 \forall \alpha$, то $R \geq 1$. Т.е. $R = 1$ — наим.
возм. радиус.

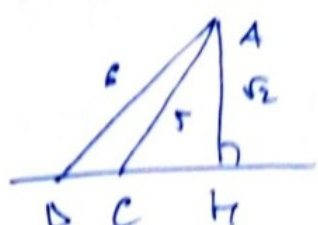
значит $R = 1$ достигнута при $\angle AHB = 90^\circ$.

по т. Пифагора, $AH = HB = \sqrt{2}$.

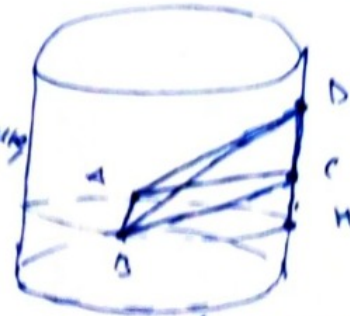


3) расскл. $\triangle ABC$. по высоте AD — миним. перем. расстояние
с ней стороны $\triangle ABC$ — прямоугольный (либо $\angle A = 90^\circ$, либо $\angle C = 90^\circ$)
по т. Пифагора, $AC = \sqrt{23}$, $AD = \sqrt{34}$.

сл-но, $CD = AD - AC = \sqrt{34} - \sqrt{23}$



4) докажем что такой тетраэдр \exists .
вспомогат. $\epsilon > 0$:
отметим на окружн. тетраэдра C, H, D .
в окр-ти, вхожд. радиус R , нахал. осевую CH .
отметим дугу CD радиуса R , $\epsilon > 0$,
сл-но $AB = 2$. по теореме Пифагора,
можем найти AD — высоту, отн.
совпадает с ϵ — радиусом в условии, $ABCD$ вписан соотв. условию



21101150 (U372882 M1302400)

Ответ: $\sqrt{34} - \sqrt{23}$

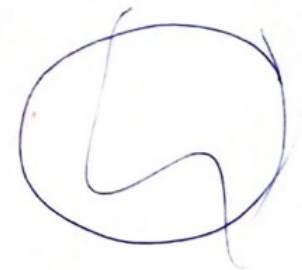
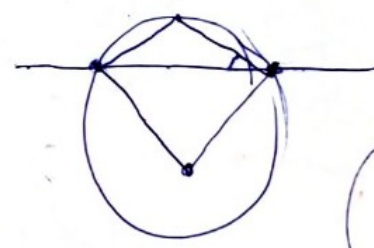
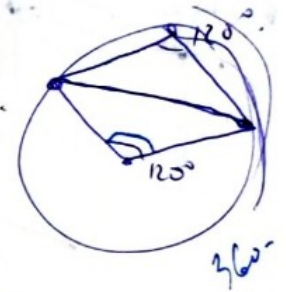
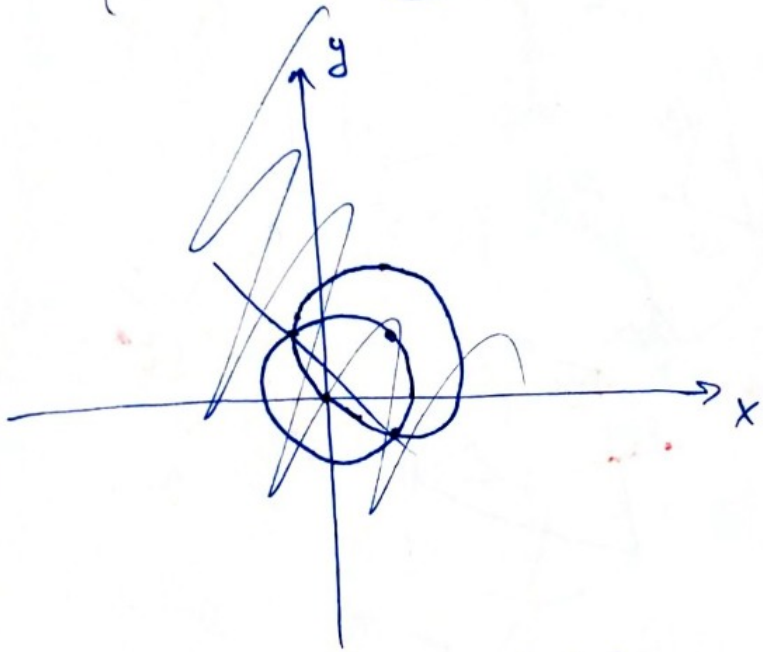
3)

~~Задача~~

ЗЕРКОВИК

1) Рассмотрим всевозм. пары (a, b) , где которых
 $a^2 + b^2 \leq \min(2a + 2b, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 \leq 2a + 2b \\ a^2 + b^2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (b-1)^2 \leq 2 \\ a^2 + b^2 \leq 2 \end{cases}$

а т.е. это мн-во на коор. м-ти: пересечение двух окр-тей, Лагранжа S_2 , с г. в точках $(0; 0)$ и $(1; 1)$



$\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$a < 2$

$$S(a_1 + a_{10}) = 2$$

$$= S(2a + 8b) = 10a + 8b$$

$$8b^2 < -6a + 16$$

$$8b^2 < 16 - 6a$$

$6\pi \sqrt{12\sqrt{3}}$
 $4\pi \sqrt{3\sqrt{3}}$

$$(a + 8b) / (a + 8b)^2 - 8b^2 > 16a + 45b + 1$$

$$| a + 8b |^2 - 4b^2 > 16a + 45b + 1$$

~~$(a + 8b)^2$~~

~~$(a + 8b)^2 \rightarrow 16a + 45b + 1$~~

3.1

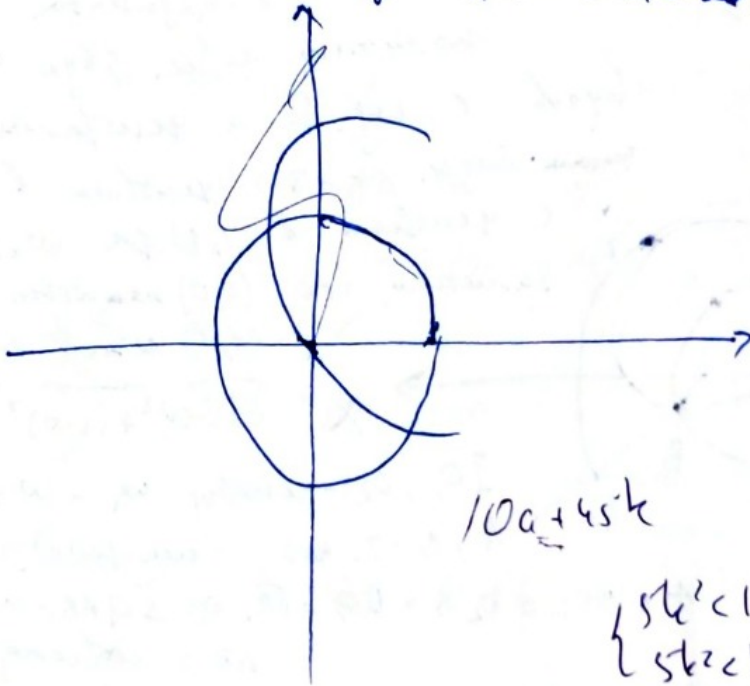
~~Решение~~

решибик

Рассмотрим всевозможные случаи (a; b), где известны ~~данные~~

$$a^2 + b^2 \leq \min(2a + 2b, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 \leq 2a + 2b \\ a^2 + b^2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (b-1)^2 \leq 2 \\ a^2 + b^2 \leq 2 \end{cases}$$

удобнее всего на координатной плоскости.



b = 1.

$$1 < k < \frac{16}{5}$$

10a + 45k

$$\begin{cases} 5k^2 < 16 \\ 5k^2 < 16 - 6a \end{cases}$$

6a < 16 - 5 = 11

a < 1

6a, a_{12} > a_2 a_{11} - 16

~~$$a^2 + 6ak + 15k^2 > a^2 + 16ak + 6ak^2 - 16$$~~

5k^2 < 16

3 - sqrt(11) < a < 3 + sqrt(11)

D = 9 + 12 < 11



0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

a^2 + 6a - 2 < 0

$$\begin{cases} a^2 + 16a + 60 < 10a + 45k \\ a^2 > - \end{cases}$$

a^2 + 16a + 5 > 16a + 48

45k < 4

1

Условие

стр. 1

$\exists a = a_1; k = a_2 - a_1$ ($k > 0$ и т.д.; $k, a \in \mathbb{Z}$ и т.д.) тогда $S = 10a + 91k$
(или $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$)

$$(x) \begin{cases} a_6 a_{12} > S+1 \\ a_7 a_{11} < S+17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_6 a_{12} > S+1 \\ a_7 a_{11} - 16 < S+1 \end{cases} \Rightarrow a_7 a_{11} - 16 < a_6 a_{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+6k)(a+10k) - 16 < (a+7k)(a+11k) \Leftrightarrow 60k^2 - 16 < 55k^2 \Leftrightarrow 5k^2 < 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 < \frac{16}{5} \Leftrightarrow |k| < \frac{4}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow k < \frac{4}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow k = 1 \text{ т.е. } \underline{\text{единственный}} \\ k > 0$$

можно не учитывать отрицательные значения $k = -1$

$$(x) \Leftrightarrow \begin{cases} (a+5)(a+11) > 10a+45+1 \\ (a+6)(a+10) < 10a+45+17 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 16a + 55 > 10a + 45 + 1 \\ a^2 + 16a + 60 < 10a + 45 + 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 6a + 9 > 0 \\ a^2 + 6a - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+3)^2 > 0 \\ a^2 + 6a - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -3 \\ a^2 + 6a - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -3 \\ -3 - \sqrt{11} < a < -3 + \sqrt{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -3 \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = 2 \\ a = 3 \\ a = 4 \\ a = 5 \\ a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\frac{D}{4} = 9 + 2 = 11$, т.е. $\sqrt{11}$
не целое, т.е. не целое

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -3 \\ a = -6 \\ a = -5 \\ a = -4 \\ a = -3 \\ a = -2 \\ a = -1 \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{тогда } a \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$$

бл. целых чисел (где $k = 1$) - стр. 105
или a не отриц.

Ответ: $\{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101150**

ID профиля: **372882**

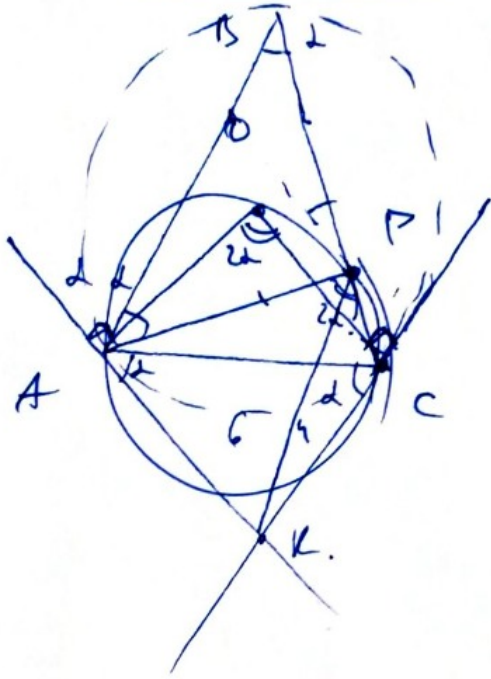
Вариант 17

6

Углубление

чл 3

a).



$\angle B = \alpha \Rightarrow \angle APC = 2\alpha \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle BAP = \alpha$, биссек.

$\angle ACK = \alpha = \angle CAK$,
 др. биссек

§ $\triangle ABC$

CA-но, AP=PB, ~~но др. др.~~
 уг. ~~отрезки~~ биссек.
 only

5

1) Заметим, что логarithмы берем все интервалы
равно 4 (но ОДЗ: $x > \frac{1}{5}$)

2) $4 = 2 \log_{5x-1}(4x+1) \cdot 2 \log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2) \cdot \log_{\frac{x}{2}+2}(5x+1) = 4 \cdot 1$

2) Сделаем substitution a , тогда получим
 $a-1$, тогда $a^2(a-1) = 4 \Leftrightarrow a^3 - a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (a-2)(a^2+a+2) = 0$
минимум 2014

$\Leftrightarrow a=2, \Rightarrow a-1=1$

3) найдем корни, логarithм 1. ($\log_m n = 1 \Leftrightarrow m=n$)

$$\begin{cases} 5x-1 = 4x+1 \\ 4x+1 = (\frac{x}{2}+2)^2 \\ \frac{x}{2}+2 = 5x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-1 = 16x^2 + 8x + 1 \quad (a) \\ 4x+1 = \frac{x^2}{4} + 2x + 4 \quad (b) \\ \frac{x}{2}+2 = 5x-1 \quad (c) \end{cases} \begin{cases} x = \frac{2}{3} \quad (1) \\ x = 2 \quad (5) \\ x = 6 \quad (6) \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \quad (1) \\ x = 6 \quad (5) \\ x = 2 \quad (6) \end{cases}$

4) проверим: (для $x = \frac{2}{3}$; т.е. $\frac{x}{2}+2 = 5x-1$, тогда \rightarrow делаем $z = t$)

$2 \log_{5x-1}(4x+1) = 2 \log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2) \Leftrightarrow \log_t(4x+1) = \log_{4x+1} t \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \log_t \frac{11}{3} = \log_{\frac{11}{3}} t$ - не верно

$x = 6: 4x+1 = (\frac{x}{2}+2)^2 \rightarrow$ делаем $z = t^2$

$2 \log_{4x+1} t^2 = \log_t(5x-1) \Leftrightarrow 4 \log_{29} t^2 = \log_t 29 \Leftrightarrow 4 \log_{29} 25 = \log_{29} 29$
не верно

$x = 2: 2 \log_{5x-1} 9 = 2; \log_9 9 = 2$ - верно $\rightarrow x=2$ не подходит

Ответ: $\{2\}$

$$\begin{cases} \text{kop}(a, b, c) = 6 \\ \text{kok}(a, b, c) = 2^{15} \cdot 3^{16} \end{cases}$$

$$a = b - 1 = \frac{1}{ab} - 1 = \frac{1}{a(b+1)} - 1$$

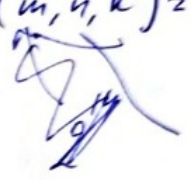
~~$$a = b - 1 = \frac{1}{a(b+1)}$$~~

$$\begin{matrix} 12 & 15 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{matrix} \log_{10} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \right)$$

$$b = 5 - 6$$



$$\begin{cases} (m, n, k) = 1 \\ \text{kok}(m, n, k) = 2^{14} \cdot 3^{15} \end{cases}$$



$$0 < \sqrt{5} + x < \frac{4}{2x}$$

$$15 \cdot 16 \cdot 3!$$

$$h + x > \frac{4}{2x} \quad 11 - 15$$

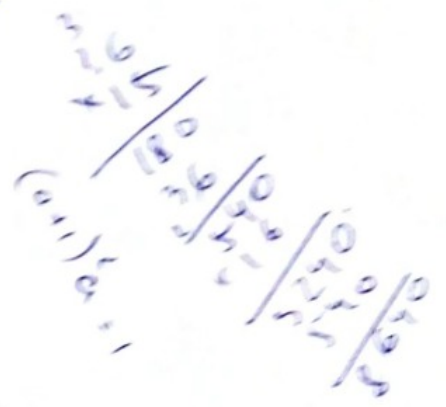
$$\begin{matrix} n = 2^4 \\ m = 3^3 \\ k = 2^2 \cdot 3^5 \end{matrix}$$

$$\frac{3}{2} \wedge x$$

$$8 \wedge x \wedge 6$$

$$5x - 1 \vee \frac{2}{x} \wedge 11 - 15$$

$$2^2 \cdot 3^3 \cdot 2^{14} \cdot 3^{15} = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 16$$



$$x > \frac{1}{5}$$

$$\frac{2}{x} + 2 < 4x + 1$$

$$\log_{10} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \right) = \log_{10} \frac{3}{2}$$

a, b, c
ab = 1
a(b+1) = 1

$$\log_{10} \frac{3}{2} < \log_{10} \frac{4}{2x}$$

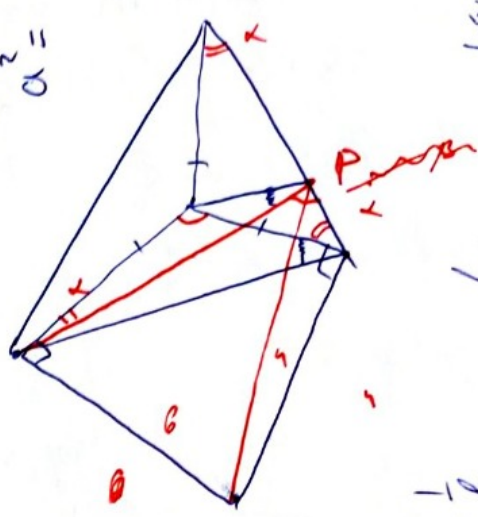
$$x > \frac{1}{5}$$

$$4x + 1 > \frac{2}{x} + 1$$

$$\log_{10} \frac{1}{4x+1}$$

~~a = a~~

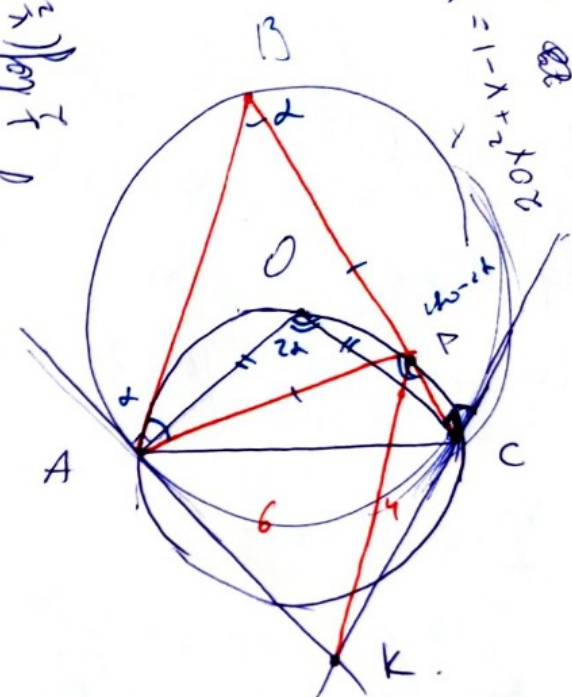
$$a^2 = \frac{1}{b}$$



$$T = (1-x)(1-x) \dots (1-x)$$

$$ab = \frac{1}{b}$$

$$a^2 = \frac{1}{b}$$



$$a^2 = \frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}}(4v+1) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} + 2 \right)$$

$$\log_a b \log_a c = 1$$

$$= \log_a c$$

$$(a^2 + 2a + 1)$$

$$b = a^n$$

$$\log_a n c \log_a b = n \log_a n c = \log_a c$$

$$\log_{(v+1)} \left(\frac{1}{2} + 2 \right)$$

$$ab = \frac{1}{c} \quad abc = 1 \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}$$

$$(a+1)^2 a = 1$$

$$a^3 + 2a^2 + a - 1 = 0$$

$$a^2(a+1) = 1$$

$$\begin{cases} a^3 - a^2 - 1 = 0 \\ a^3 + 2a^2 + a - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

$$3 \log_a a = 0$$

$$t = \frac{1}{ab} = a - 1$$

$$\frac{1-b}{1} = 2 \quad a^2 b - ab - 1 = 0$$

$$\frac{2b}{1} = 1 - 0$$

$$\frac{1}{1} = 0$$

$$\frac{1}{3} + 2 = \frac{10}{3} - 1$$

$$4.5x = 3 \quad x = \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{2}x = 4$$

~~$$\log_{5x-1} (4x+1) + 1 = 2$$~~

$$2 \log_{5x-1} (4x+1)$$

$$\left(\frac{1}{2} \log_{5x-1} (4x+1) + 1\right)^2 = 1 \log_{5x-1} (4x+1)$$

$$a^2(a-1) = 4$$

$$8 - 4 - 4$$

$$a^3 = a^2 + 4a -$$

$$a^3 - a^2 - 4 = 0$$

$$a = 2$$

$$- (a^2 - 2a - 4)$$

$$\begin{array}{r} a^3 - a^2 - 4 \quad | \quad a-2 \\ a^3 - 2a^2 \quad | \quad a^2 + a + 2 \\ \hline \end{array}$$

$$(a-2)(a^2+a+2) = 0$$

$$\begin{array}{r} a^2 - 4 \\ a^2 - 2a \\ \hline 2a - 4 \end{array}$$

$$a = 2$$

$$6x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$-2$$

$$4+8$$

$$x^2 - 14x + 15 = 0$$

$$36$$

$$+6$$

$$y^2 - 4y + 12 = 0$$

$$36 - 24 - 12$$

$$(c) \log$$

$$(x-$$

$$x = 2$$

$$5x - 1 = 4x + 1$$

$$\log \frac{3}{11}$$

$$\log \frac{25}{25}$$

$$\frac{3}{7}$$

$$\log \frac{3}{8} + 1$$

$$x$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$\log \frac{125}{125}$$

$$\log \frac{3}{11} + 2$$

$$\frac{|\frac{1}{2} \log_2 b|}{\log_2 a} > 1 \quad \frac{2 \log_2 c}{\log_2 a}$$

$$\frac{y}{5} + 1$$

$$5y-1 \cdot (4y+1)^2 \cdot 4x$$

$$5y-1 \cdot (16x^2 + 8x + 1) \cdot 4x$$

$$16x^2 + 13x + 2 > 0 \quad \text{for } x$$

$$-\frac{1}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{4}{10}$$

$$\frac{1}{2} \log_2 3$$

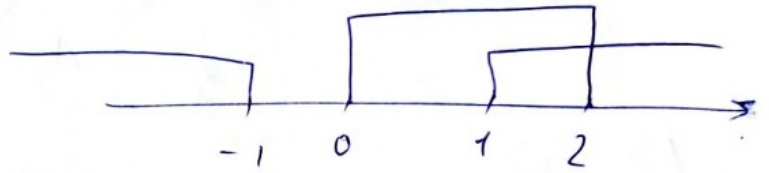
$$\frac{3}{10}$$

$$-\frac{1}{2} \log_2 5$$

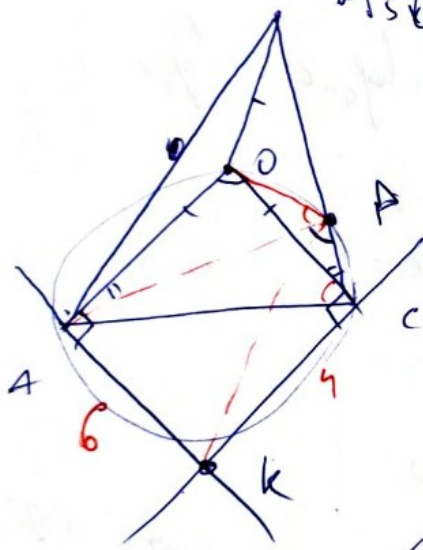
~~$$\frac{1}{2} \log_2 a$$~~

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \log_2 b > 1 \\ \frac{1}{2} \log_2 b < -1 \end{cases} \quad 0 < 2 \log_2 c < 2$$

$$\frac{y}{2} + 2 \vee 5x - 1$$

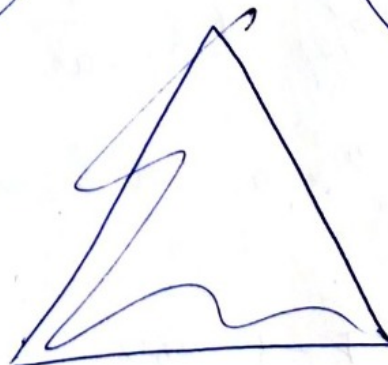
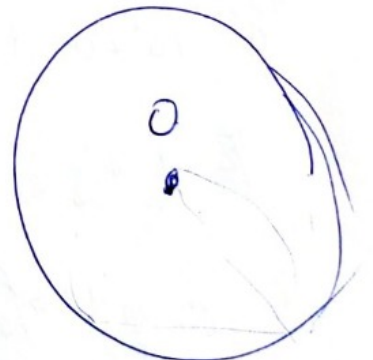
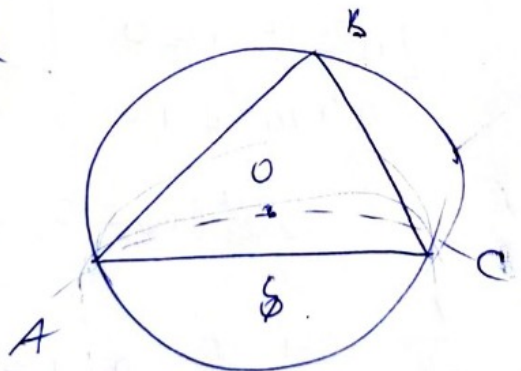


$$\frac{1}{2} \log_{(5x-1)} (4x+1) = 2 \log_{(4x+1)} \left(\frac{y}{2} + 2 \right)$$



$$\log_{(4x+1)} \left(\left(\frac{y}{2} + 2 \right) (5x-1) \right) = \frac{1}{4}$$

$$(4x+1)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{y}{2} + 2 \right) (5x-1)$$



4

Числовик

стр 1

1) Рассмотрим числа $m = \frac{a}{6}$, $n = \frac{b}{6}$, $k = \frac{c}{6}$. очевидно, что любой тройке (a, b, c) соответствует одна и только одна (m, n, k) , т.е. каждой (a, b, c) столько же, сколько (m, n, k) . т.к. $\begin{cases} a, b, c \in \mathbb{N} \\ a, b, c \in \mathbb{N} \end{cases}$
 $m, k, n \in \mathbb{N}$

2) $\begin{cases} \text{НОД}(m, k, n) = 1 \\ \text{НОК}(m, k, n) = \frac{2^{15} \cdot 3^{16}}{6} = 2^{14} \cdot 3^{15} \end{cases} \quad (1)$
 (2) — тогда m, k, n — взаимно простые 2 и 3.

3) (1) $\Rightarrow \exists$ такие $x(m, n, k)$, что $\begin{cases} m \leq 2 \\ n \leq 2 \\ k \leq 2 \end{cases}$ — это не более двух
 каждая степень 2 (не нулеву) аналог. для 3.

~~какая связь $m = 2^k$, $n = 3^k$, $k = 2^k$~~
 также одна из степеней 2 это 14, одна из степеней 3 это 15
 4) пусть числа $2^d, 3^d, 2^d, 3^d$, где $d \in \{0, 1, \dots, 14\}$ — так же,
 что $m \cdot n \cdot k = 2^{14+d} \cdot 3^{15+\beta}$, где $\beta \in \{0, 1, \dots, 15\}$

тогда эти числа соответствуют $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2$ каждой тройке (m, n, k)
 т.е. 36 тройкам (m, n, k) , более того, для любой тройки мы
 можем найти числа $2^d, 3^d, 2^d, 3^d$ — берем, ок не более
 тогда троек (m, n, k) в 36 раз больше, чем $(2^d, 3^d, 2^d, 3^d)$, а их
 $15 \cdot 16$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $2 \quad 3$

5) тогда всего троек (m, n, k) : $36 \cdot 15 \cdot 16 = 8640$
 6) каждая тройка (a, b, c) столько же, сколько (a, b, c)

Answer 8640
 21101150 (U372882 M1302401)