Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101128**

ID профиля: **883076**

Вариант 17

Черновик

№1

$205+220=$

$S=\frac{(2a_1+9d)\cdot 10}{2}=5(2a_1+9d)=10a_1+45d$

$(a_1+5d)(a_1+11d)=a_1^2+5a_1d+11a_1d+55d^2=a_1^2+16a_1d+55d^2>S+1=10a_1+45d+1$

$a_1^2+16a_1d+55d^2>10a_1+45d+1;\ a_1^2+16a_1d+55d^2\geq 10a_1+45d+2$

~~$a_1^2+16a_1d-10a_1+55d^2-45d-1\geq 0;\ a_1^2+(16d-10)a_1+55d^2-45d-1\geq 0$~~

$(a_1+6d)(a_1+10d)=a_1^2+6a_1d+10a_1d+60d^2=a_1^2+16a_1d+60d^2<S+17=10a_1+45d+17$

$a_1^2+16a_1d+60d^2+1\leq 10a_1+45d+17$

$\cancel{a_1^2}+\cancel{16a_1d}+55d^2+\cancel{10a_1}+\cancel{45d}+17\geq \cancel{10a_1}+\cancel{45d}+2+\cancel{a_1^2}+\cancel{16a_1d}+60d^2+1$

$14\geq 5d^2;\ d^2\leq 2{,}8;\ d>0;\ d\leq\sqrt{2{,}8};\ d\in\mathbb{Z};\ 1<2{,}8<4;\ 1<\sqrt{2{,}8}<2;$

$d=1$

$a_1^2+16a_1+55\geq 10a_1+45+2;\ a_1^2+6a_1+8\geq 0;$ $a_{11}=-4;\ a_{12}=-2;$ $a_1\leq -4;\ a_1\geq -2$

$a_1^2+16a_1+60+1\leq 10a_1+45+17$

$a_1^2+6a_1-1\leq 0;\ D=36+4\cdot 1\cdot 1=40=(2\sqrt{10})^2$

$a_{11}=\frac{-6+2\sqrt{10}}{2}=-3+\sqrt{10};\ a_{12}=-3-\sqrt{10}$

$-3-\sqrt{10}\leq a_1\leq -3+\sqrt{10}$

$-3-\sqrt{10}\vee -6;\ -\sqrt{10}\vee -3;\ \sqrt{10}\vee 3;\ 10>9$, значит $-3-\sqrt{10}<-6$

$-3-\sqrt{10}\vee -7;\ -\sqrt{10}\vee -4;\ \sqrt{10}\vee 4;\ 10<16$, значит $-3-\sqrt{10}>-7$

$-3+\sqrt{10}\vee 0;\ \sqrt{10}\vee 3;\ 10>9$, значит $-3+\sqrt{10}>0$

$-3+\sqrt{10}\vee 1;\ \sqrt{10}\vee 4;\ 10<16$, значит $-3+\sqrt{10}<1$

$-6\leq a_1\leq 0$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a_1\leq -4\\ a_1\geq -2\end{array}\right.\\ -6\leq a_1\leq 0\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}-6\leq a_1\leq -4\\ -2\leq a_1\leq 0\end{array}\right.$ $a_1=-6;\ a_1=-5;\ a_1=-4;\ a_1=-2;\ a_1=-1;\ a_1=0$

1

21101128 (U883076 M1300045)

№3 Черновик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b;2)\end{cases}$$

$a+b\ge 0$

1) $a^2+b^2\le 2a+2b\le 2$ 1) $a^2+b^2\le 2a+2b<2$

2) $a^2+b^2\le 2\le 2a+2b$ 2) $a^2+b^2\le 2a+2b=2$

3) $a^2+b^2\le 2\le 2a+2b$

1) $0\le a+b<1$

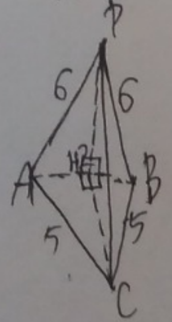
$a^2+b^2\le 2a+2b$

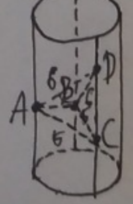
$a^2-2a+b^2-2b\le 0$

$D_1=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(b^2-2b)=4-4b^2+8b$; $4-4b^2+8b=0$; $b^2-2b-1=0$; $D_2=(-2)^2+4\cdot1\cdot1=4+4=8$

$b_1=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$; $b_2=1-\sqrt{2}$; $D_1\ge 0$ при $1-\sqrt{2}\le b\le 1+\sqrt{2}$

№2





$\cos\beta=\frac{1}{2\sqrt{6}}$

$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{35}}$

2

$\sqrt{35-1}=\sqrt{34}$

$\sqrt{24-1}=\sqrt{23}$

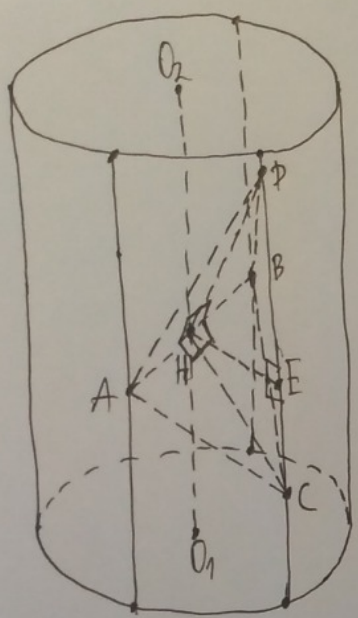
$CD=\sqrt{23}+\sqrt{34}$

21101128 (U883076 M1300045)

Чистовик

№2

Пусть DH – высота $\triangle ADB$, CH – высота $\triangle ACB$, т.к. $\triangle ADB$ и $\triangle ACB$ равнобедренные с основанием AB, то DH и CH пересекаются в середине AB точке H. $\angle AHD = \angle AHC = 90^\circ$, значит $AB \perp CHD$, значит $AB \perp CD$. Если CD параллельна оси цилиндра, то AB параллельна основаниям цилиндра.



Если CD параллельна оси цилиндра, значит C и D находятся по одну сторону от плоскости O_1AB, (O_1, O_2 – центры оснований цилиндра). AB – хорда окружности сечения цилиндра, равной основанию. Значит минимальный радиус цилиндра равен $\frac{AB}{2} = 1$. HE параллельна основаниям цилиндра, $HE \perp CD$, $E \in CD$. $HE = R = 1$. $DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{36-1} = \sqrt{35}$; $DE = \sqrt{DH^2 - HE^2} =$
$= \sqrt{35-1} = \sqrt{34}$; $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{25-1} = \sqrt{24}$; $EC = \sqrt{CH^2 - HE^2} = \sqrt{24-1} = \sqrt{23}$

$CD = DE + EC = \sqrt{34} + \sqrt{23}$

Ответ: $CD = \sqrt{34} + \sqrt{23}$.

Чистовик

$a_1 \in \mathbb{Z}$; Прогрессия состоит из целых чисел, значит $d \in \mathbb{Z}$. d-разность арифметической прогрессии; $d>0$, т.к. ~~она~~ прогрессия возрастающая.

$S=\frac{(2a_1+9d)\cdot 10}{2}=5(2a_1+9d)=10a_1+45d$

$a_6 a_{12}=(a_1+5d)(a_1+11d)=a_1^2+5a_1d+11a_1d+55d^2=a_1^2+16a_1d+55d^2>S+1=$
$=10a_1+45d+1$; т.к. a_1 и d целые, данное неравенство равносильно
$a_1^2+16a_1d+55d^2 \geq 10a_1+45d+2$ (1)

$a_7 a_{11}=(a_1+6d)(a_1+10d)=a_1^2+6a_1d+10a_1d+60d^2=a_1^2+16a_1d+60d^2<S+17=$
$=10a_1+45d+17$; т.к. a_1 и d целые, данное неравенство равносильно
$a_1^2+16a_1d+60d^2+1 \leq 10a_1+45d+17$ (2) Сложим неравенства (1) и (2).

$\cancel{a_1^2}+\cancel{16a_1d}+55d^2+\cancel{10a_1}+\cancel{45d}+17 \geq \cancel{10a_1}+\cancel{45d}+2+\cancel{a_1^2}+\cancel{16a_1d}+60d^2+1$

$14 \geq 5d^2$; $d^2 \leq 2{,}8$; $d>0$, т.к. прогрессия возрастающая, $d \in \mathbb{Z}$, значит
$d \leq \sqrt{2{,}8}$; $1<2{,}8<4$, $1<\sqrt{2{,}8}<2$; $0<d \leq 1$, значит $d=1$. Подставим в (1).
$a_1^2+16a_1+55 \geq 10a_1+45+2$; $a_1^2+6a_1+8 \geq 0$; $a_{11}=-4$; $a_{12}=-2$, значит $a_1 \leq -4$; $a_1 \geq -2$.
Подставим $d=1$ в (2). $a_1^2+16a_1+60+1 \leq 10a_1+45+17$; $a_1^2+6a_1-1 \leq 0$; $D=36+4\cdot1\cdot1=40=(2\sqrt{10})^2$
$a_{11}=\frac{-6+2\sqrt{10}}{2}=-3+\sqrt{10}$; $a_{12}=-3-\sqrt{10}$; $-3-\sqrt{10} \leq a_1 \leq -3+\sqrt{10}$; $a_1 \in \mathbb{Z}$

$-3-\sqrt{10} \vee -6$; $-\sqrt{10} \vee -3$; $\sqrt{10} \vee 3$; $10>9$, значит $-3-\sqrt{10}<-6$
$-3-\sqrt{10} \vee -7$; $-\sqrt{10} \vee -4$; $\sqrt{10} \vee 4$; $10<16$, значит $-3-\sqrt{10}>-7$
$\Rightarrow -7<-3-\sqrt{10}<-6$

$-3+\sqrt{10} \vee 0$; $\sqrt{10} \vee 3$; $10>9$, значит $-3+\sqrt{10}>0$
$-3+\sqrt{10} \vee 1$; $\sqrt{10} \vee 4$; $10<16$, значит $-3+\sqrt{10}<1$
$\Rightarrow 0<-3+\sqrt{10}<1$

Значит: $-6 \leq a_1 \leq 0$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a_1 \leq -4 \\ a_1 \geq -2 \end{array}\right. \\ -6 \leq a_1 \leq 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} -6 \leq a_1 \leq -4 \\ -2 \leq a_1 \leq 0 \end{array}\right.$$

$a_1=-6$; $a_1=-5$; $a_1=-4$; $a_1=-2$; $a_1=-1$; $a_1=0$

1

Ответ: $a_1=-6$; $a_1=-5$; $a_1=-4$; $a_1=-2$; $a_1=-1$; $a_1=0$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101128**

ID профиля: **883076**

Вариант 17

Чистовик

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

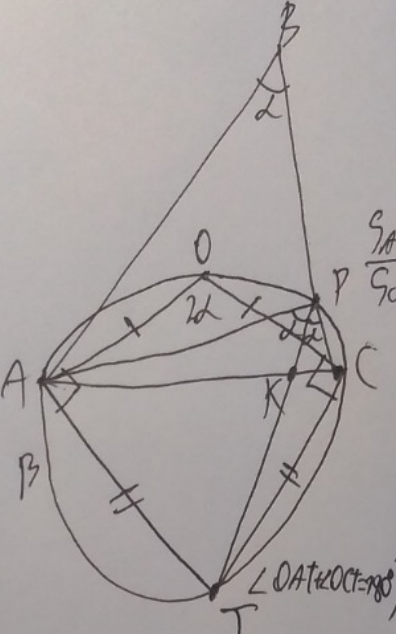
$6=2\cdot3$; ~~з~~ Заметим, что в НОК(a;b;c) ~~входят только простые~~ входят из простых множителей только ~~два~~ множители 2 и 3, значит числа a, b и c могут быть кратны только таким простым числам, как 2 и 3.

Пусть $a=2^k\cdot3^l$; $b=2^m\cdot3^n$; $c=2^p\cdot3^q$, где k,l,m,n,p,q целые ~~по~~ неотрицательные числа. Заметим, что числа a, b и c однозначно задаются числами k,l,m,n,p и q. По определению НОД, если НОД$(a;b;c)=2^1\cdot3^1$, то $\min(k,m,p)=1$ и $\min(l,n,q)=1$ (min – минимальное из набора чисел). По определению НОК, если НОК$(a;b;c)=2^{15}\cdot3^{16}$, то $\max(k,m,p)=15$, $\max(l,n,q)=16$ (max – максимальное из набора чисел). Из чисел k,m и p 15-ти может быть равно 3 числа, тогда 1 может быть равно уже 2 оставшихся числа, последнее число может быть от 1 до 15. То есть количество подходящих ~~наборов~~ троек k,m и p равно $3\cdot2\cdot15=90$. Из чисел l,n и q 16-ти может быть равно 3 числа, тогда 1 может быть равно уже 2 числа из оставшихся, последнее число может быть от 1 до 16. То есть количество подходящих троек l,n и q равно $3\cdot2\cdot16=96$. Заметим, что каждая ~~пара~~ подходящих троек k,m и p и l,n и q подходит. Значит количество ~~троек~~ подходящих троек a, b и c равно $90\cdot96=8640$.

Ответ: 8640.

Чистовик

№6



а) $\frac{S_{APK}}{S_{CPK}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1{,}5$. Пусть h – высота ΔAPC опущенная из P.

$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}}=\frac{AK\cdot h\cdot 2}{2\cdot KC\cdot h}=\frac{AK}{KC}=1{,}5$

AOPC вписан в окружность B. $\angle AOC=2\angle ABC=2\alpha$, т.к. он центральный. $\angle AOC=\angle APC=2\alpha$, т.к. они опираются на дугу $\cancel{AC}$. $\angle OAT=\angle OCT=90^\circ$, т.к. AOCT – вписан в окружность B. $\angle OAT+\angle OCT=180^\circ$; TA = TC – отрезки касательных.

$\smile AT=\smile CT \Rightarrow \angle APT=\angle TPC=\frac{\angle APC}{2}=\frac{2\alpha}{2}=\alpha$

Значит PT – биссектриса $\angle APC$. $\frac{AP}{PC}=\frac{AK}{KC}=1{,}5$. $AK=1{,}5KC$; $AP=1{,}5PC$; $AC=AK+KC=1{,}5KC+KC=2{,}5KC$. $\angle CPK=\angle CBA=\alpha$, $\angle ACB$ – общий. Значит $\Delta ABC\sim\Delta KPC$.

$\frac{AC}{KC}=\frac{2{,}5KC}{KC}=2{,}5$; $\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}}=2{,}5^2=6{,}25$; $S_{ABC}=6{,}25\cdot 4=25$.

б) $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{7}{5}$; $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{7}{5}$; $\sin\alpha=\frac{7\cos\alpha}{5}$; $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{49\cos^2\alpha}{25}+\cos^2\alpha=\frac{74\cos^2\alpha}{25}=1$

$\cos^2\alpha=\frac{25}{74}$; $\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{74}}$; $\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{25}{74}}=\frac{49}{74}=\frac{7}{\sqrt{74}}$; $S_{APC}=S_{APK}+S_{CPK}=6+4=10=$

$=\frac{AP\cdot PC\cdot\sin 2\alpha}{2}=\frac{AP\cdot PC\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{2}=1{,}5PC\cdot PC\cdot\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1{,}5PC^2\cdot 7\cdot 5}{\sqrt{74}\cdot\sqrt{74}}=\frac{52{,}5PC^2}{74}$

$PC^2=\frac{740}{52{,}5}=\frac{7400}{525}=\frac{296}{21}$; $PC=\sqrt{\frac{296}{21}}=2\sqrt{\frac{74}{21}}$; $AP=1{,}5PC=3\sqrt{\frac{74}{21}}$; $\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{74}}$;

По теореме косинусов: $AC=\sqrt{AP^2+PC^2-2\cdot AP\cdot PC\cdot\frac{5}{\sqrt{74}}}=\sqrt{\frac{666}{21}+\frac{296}{21}-2\cdot 3\sqrt{\frac{74}{21}}\cdot 2\sqrt{\frac{74}{21}}\cdot\frac{5}{\sqrt{74}}}$

$=\sqrt{\frac{962}{21}-\frac{2\cdot 3\cdot 74\cdot 2\cdot 5}{21\cdot\cancel{\sqrt{74}}}}=\sqrt{\frac{962-60\sqrt{74}}{21}}$

2

Ответ: а) $S_{ABC}=25$; б) $AC=\sqrt{\frac{962-60\sqrt{74}}{21}}$.

черновик

№4

$$\begin{cases} (a;b;c)=6 \\ [a;b;c]=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

$a=2^k\cdot 3^l$

$b=2^m\cdot 3^n$

$c=2^p\cdot 3^q$

$\min(k,m,p)=1;\ \max(k,m,p)=15$

$\min(l,n,q)=1;\ \max(l,n,q)=16$

$3\cdot 2\cdot 15\cdot 3\cdot 2\cdot 16=6\cdot 15\cdot 6\cdot 16=90\cdot 96=960\cdot 9=8640$

№5

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1);\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2;\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

1) ОДЗ

$$\begin{cases} \sqrt{5x-1}>0 \\ \sqrt{5x-1}\neq 1 \\ 4x+1>0 \\ 4x+1\neq 1 \\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^2>0 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \\ 5x-1>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>0,2 \\ x\neq 0,4 \\ x>-0,25 \\ x\neq 0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 0 \\ x>-4 \\ x\neq -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x>0,2 \\ x\neq 0,4 \end{cases}$$

2)

1) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$$\frac{1}{\log_{4x+1}\sqrt{5x-1}}=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$$

т.к. $x>0,2$

$$\frac{1}{\log_{4x+1}5x-1}=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$$

~~$(4x+1)^{\frac{1}{2}}=\frac{x}{2}+2$~~ ~~$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=\log_{\frac{x}{2}+2}$~~

~~$(4x+1)^{\frac{1}{2}}=5x-1$~~ ~~$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$~~

~~$(4x+1)^{\frac{1}{2}}=5x-1$~~ ~~$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=\log_{\frac{x}{2}+2}$~~

~~$\sqrt{(4x+1)}=\frac{x}{2}+2$~~

т.к. $x>0,2$

$$\frac{2}{\log_{\frac{x}{2}+2}4x+1}=\log_{\frac{x}{2}+2}\left(\frac{5x^2}{2}-\frac{x}{2}+10x-2\right)$$

1

Черновик

$0<\alpha<90°$ $0<\alpha<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha>0, \cos\alpha>0$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{7}{5}$

$\sin\alpha=\frac{7\cos\alpha}{5}$

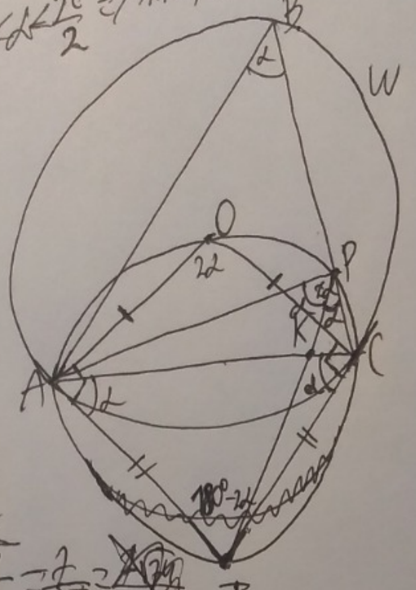
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{49\cos^2\alpha}{25}+$

$+\cos^2\alpha=\frac{74\cos^2\alpha}{25}=1$

$\cos^2\alpha=\frac{25}{74}$

$\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{2}\sqrt{37}}$

$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{25}{74}}=\sqrt{\frac{49}{74}}=\frac{7}{\sqrt{74}}$



$S_{APK}=6$; $S_{CPK}=4$; $\angle ABC=\operatorname{arctg}\frac{7}{5}$

$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1{,}5=\frac{AK}{KC}=\frac{AP}{PC}$

$\frac{AK}{KC}=1{,}5$ $AK=1{,}5KC$;

$AC=AK+KC=1{,}5KC+KC=2{,}5KC$

$\frac{AC}{KC}=\frac{2{,}5KC}{KC}=2{,}5$

$\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}}=2{,}5^2=6{,}25$

$S_{ABC}=6{,}25\cdot4=25$

$S_{APC}=S_{APK}+S_{CPK}=6+4=10=\frac{AP\cdot PC\sin2\alpha}{2}=\frac{AP\cdot PC\cdot2\sin\alpha\cos\alpha}{2}=1{,}5PC\cdot PC\cdot\sin\alpha\cos\alpha=$

$=\frac{1{,}5PC^2\cdot7\cdot5}{\sqrt{74\cdot37}}$

$370\sqrt{2}=52{,}5PC^2$; $PC^2=\frac{370\sqrt{2}}{52{,}5}=\frac{3700\sqrt{2}}{525}=\frac{148\sqrt{2}}{21}$

$\frac{AP^2}{PC^2}=2{,}25$; $AP^2=2{,}25PC^2$ $PC=2\sqrt{\frac{37\sqrt{2}}{21}}$

$AP=1{,}5PC=3\sqrt{\frac{37\sqrt{2}}{21}}$

$AC=\sqrt{AP^2+PC^2-2\cdot AP\cdot PC\cdot\frac{5}{\sqrt{37}}}=\sqrt{\frac{333\sqrt{2}}{21}+\frac{148\sqrt{2}}{21}-}$

$\overline{-\frac{2\cdot3\sqrt{37}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot2\cdot\sqrt{37}\sqrt[4]{2}\cdot5}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{21}\cdot\sqrt{37}}}=\sqrt{\frac{481\sqrt{2}}{21}-\frac{60\sqrt{2}\cdot\sqrt{37}}{21}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}(481-60\sqrt{37})}{21}}$

$\times\frac{37}{74}$ $\frac{518}{+2220}$ $\frac{2738}{}$

$\times\frac{2{,}25}{75}$ $\frac{1125}{+350}$ $\frac{52{,}5}{}$

2

21101128 (U883076 M1300046)