Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101093**

ID профиля: **103098**

Вариант 17

чистовик

2) $a_1^2+16da_1+60d^2<S+17$

$a_1^2+16a_1+60<10a_1+45+17$

$a_1^2+6a_1-2<0$

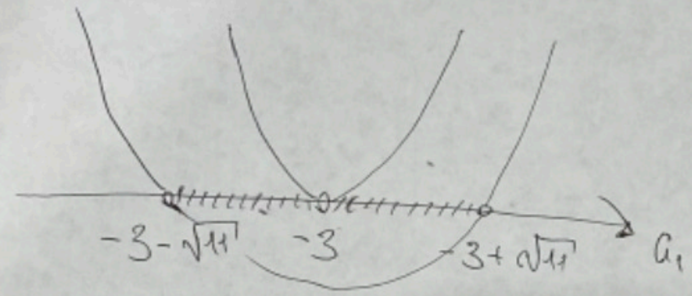
1) $D_1=36-36=0$

$a_1=\frac{-6}{2}=-3$

2) $D_2=36+8=44=(2\sqrt{11})^2$

$a_{1,2}=\frac{-6\pm2\sqrt{11}}{2}$

$a_{1,2}=-3\pm\sqrt{11}$



$a_1=[(a,a\in(-3-\sqrt{11};-3)\cup(-3;-3+\sqrt{11}))]$

$-7<-3-\sqrt{11}<-6$

$0<-3+\sqrt{11}<1$

Получаем $-6,-5,-4,-3,-2,-1,0$

но (-3) - не включаем

следовательно Ответ: $a_1\in\{-6;-5;-4;-2;-1\}$

вариант 17 чистовик

№1 $a_6 \cdot a_{12} > S+1$ $\qquad a_1 - ?$ $\qquad S = S(10)$

$a_7 \cdot a_{11} < S+17$

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 =$$

$$= 5(2a_1 + 9d) = 10a_1 + 45d$$

$$(a_1 + 5d)(a_1 + 11d) > S+1$$

$$(a_1 + 6d)(a_1 + 10d) < S+17$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16da_1 + 55d^2 > S+1 \\ a_1^2 + 16da_1 + 60d^2 < S+17 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 16da_1 + 55d^2 > S+1 \\ -a_1^2 - 16da_1 - 60d^2 > -S-17 \end{cases} \Rightarrow -5d^2 > -16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5d^2 < 16$$

$$d^2 < \frac{16}{5}$$

$d^2 < 3{,}2 \Rightarrow d = 1$ по условиям

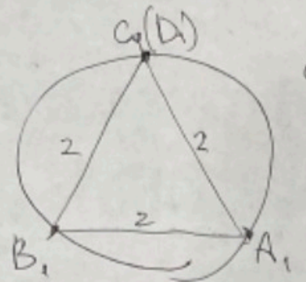
1) $a_1^2 + 16da_1 + 55d^2 > S+1$

$a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 45 + 1$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$

вариант 17 чистовик

№2



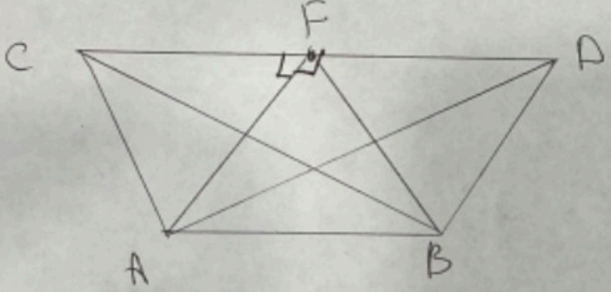
← цилиндр (вид сверху)

проекции сторон

радиус окружности будет минимальным, если проекции всех сторон (кроме стороны CD) на основание цилиндра будут равны.

$A_1B_1 = A_1C_1 = A_1D_1 = B_1C_1 = B_1D_1$

$A_1B_1 = AB$ (AB параллельна основанию цилиндра)



$CF = \sqrt{AC^2 - AF^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$

$DF = \sqrt{AD^2 - AF^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$AB = AF = BF$

$CD = CF + FD$

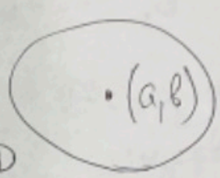
$CD = CF + DF = \sqrt{21} + 4\sqrt{2}$

Ответ $CD = \sqrt{21} + 4\sqrt{2}$

$\boxed{\text{чистовик}}$

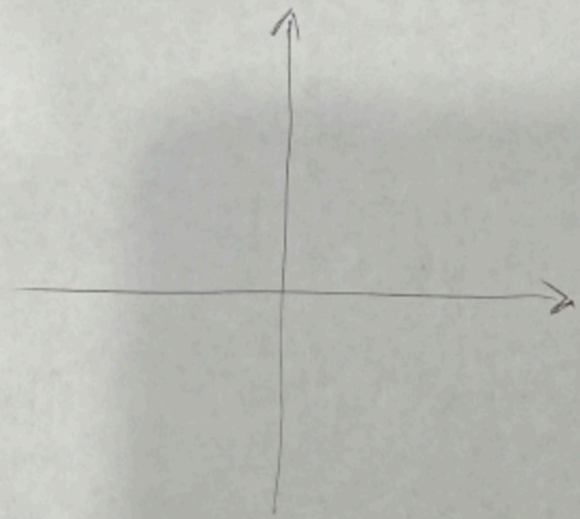
№3 $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2) & (2) \end{cases}$

1) $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$ – график окружность с центром (a,b)
$R=\sqrt{2}$



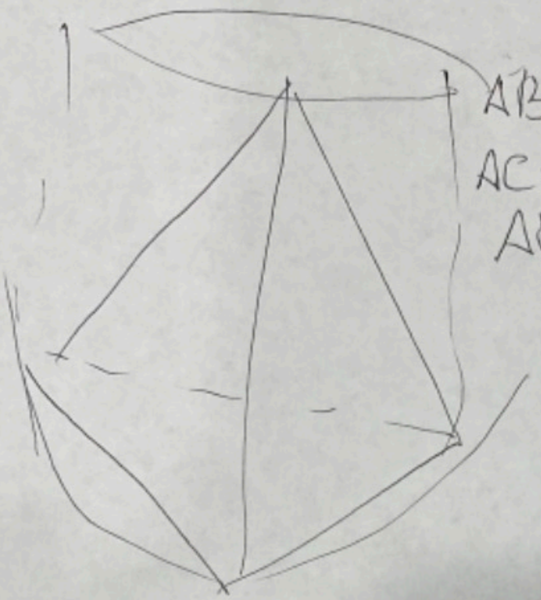
2) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \le 2a+2b \\ 2a+2b \le 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 2 \\ 2 \le 2a+2b \end{cases} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \le 2a+2b \\ a+b \le 1 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 2 \\ 1 \le a+b \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$

1) $b \ge 1-a$
2) $a^2+b^2 \le 2$



возможно
Ответ: ~~2R~~ 4π

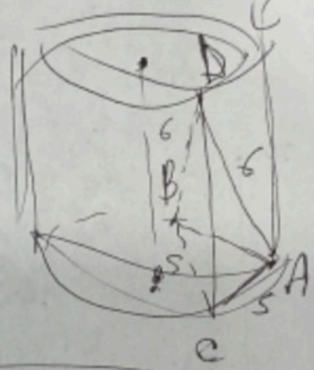
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2) \end{cases}$$



$AB = 2$

$AC = CB = 5$

$AD = DB = 6$



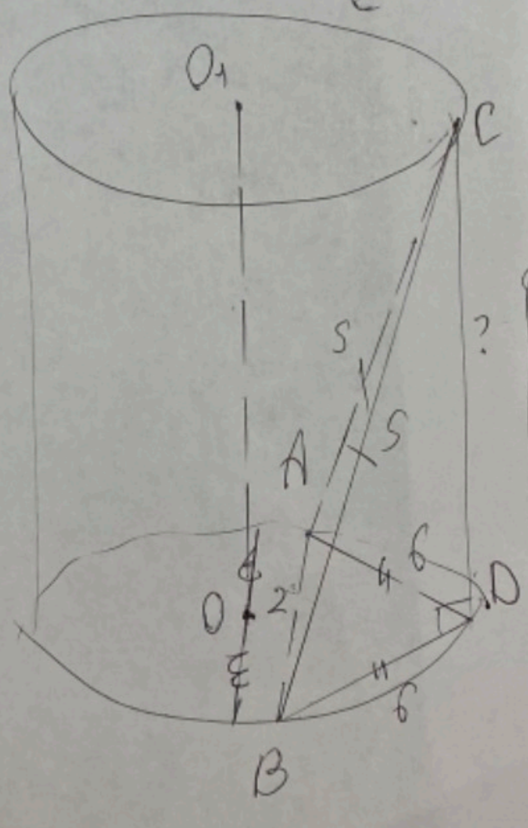
одинак.

OO_1 - ось цилиндра

CD - ?

1) т.к. $CD \parallel OO_1$, то

$CD \perp (ABD)$



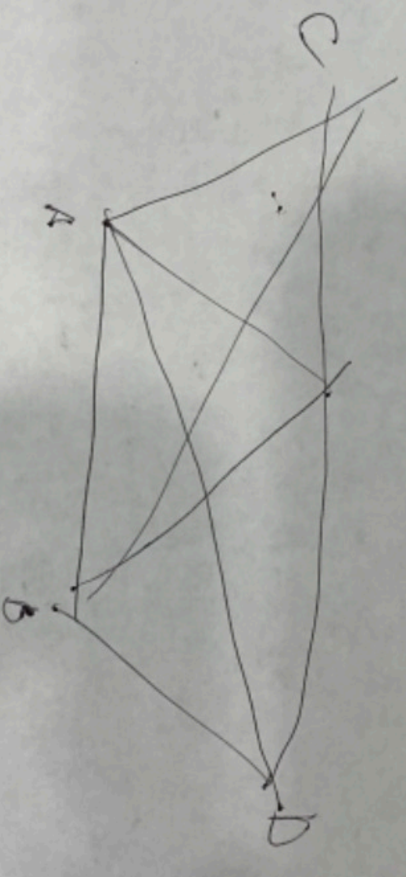
S – 10 членов.

$a \in Z$

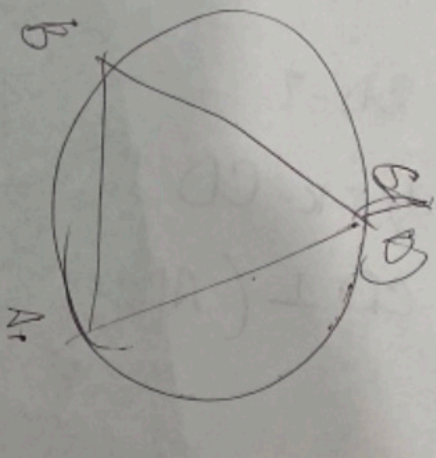
$a_6 a_{12} > S + 1$ $a_7 a_{11} < S + 17$ a_1 – возможн. значения

...

$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = (a_1 + a_{10}) \cdot 5$



(a;b)



21101093 (U103098 M1301626)

членов. $a \in \mathbb{Z}$

$> S+1$ $a_7 a_{11} < S+17$ a_1 – возможн. значения

$x^2 - 2xa + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 \le 2$

$\exists S$

$a_n \sim$

$\min(2a+2b, 2)$

$$\begin{cases} a_6 a_{12} > S+1 \\ a_7 a_{11} < S+17 \end{cases}$$

$S = S(10)$

$a_1 - ?$

$$S_{18} = \frac{a_1 + a_{18}}{2} \cdot n = 2a_1 + d(n-1)$$

$a_7 = a_6 + d$

$a_{11} = a_{12} - d$

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_{12} = a_{18}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101093**

ID профиля: **103098**

Вариант 17

вариант 17 чистовик часть 2

№5 $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$; $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$; $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

обозначим числа a, b, c.

$$(4x+1)^{b/2} = \left(\frac{x}{2}+2\right)$$

$$\Rightarrow (4x+1)^{\frac{bc}{2}} = (5x+1)$$

$$\Rightarrow (4x+1)^{\frac{abc}{4}} = (4x+1)$$

$$\Rightarrow abc = 4$$

Пусть z - большее ~~ддддд~~ из чисел, y - меньшее

тогда $y = z-1$, $(z-1)\cdot z^2 = 4$

$\Rightarrow z^3 - z^2 = 4$

$\Rightarrow (z-2)(z^2+z+2) = 4$

решение при $z = 2$

тогда наибольшее из чисел abc это 2, соответственно меньшее $2-1 = 1$

разберем 3 случая:

1) $a = b = 2$ $c = 1$

2) $a = c = 2$ $b = 1$ $\Rightarrow$

3) $b = c = 2$ $a = 1$

в.17 чистовик

часть 2

1) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2$

$4x+1=\sqrt{5x-1}^2$

$4x+1=5x-1$

$x=2$

уд. усл.

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2$

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=(4x+1)^2$

$\left|\frac{x}{2}+2\right|=|4x+1|$

$\frac{x}{2}+2=4x+1$

$x=\frac{2}{7}$

уд. усл. $x\in\left(-\frac{1}{4};0\right)\cup(0;+\infty)$

$x=\frac{2}{7}$

$\frac{x}{2}+2=-(4x+1)$

$x=-\frac{2}{3}$

не уд. усл. $x\in\left(-\frac{1}{4};0\right)\cup$
$\cup(0;+\infty)$

Первый случай не подходит
т.к. икси расходятся.

2) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2$

$x=2$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2$

$5x-1=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$5x-1=\frac{x^2}{4}+2x+4$

$12x-20-x^2=0$

$x^2-12+20=0$

$(x-2)(x-10)=0$

$x=2$
$x=10$ уд. усл. $x\in\left(\frac{1}{5};+\infty\right)$

в.17 чистовик

част 2

1 $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 1$

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = (4x+1)$

$x^2+8x+16 = 16x+4$

$x^2-8x+12=0$

$(x-2)(x-6)=0$

$x=2$
$x=6$ $\Rightarrow$ уд. усл. $x\in\left(-\frac{1}{4};0\right)\cup(0;+\infty)$

второй случай подходит

$x=2$

3) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=1$

$4x+1=\sqrt{5x-1}$

$5x-1=16x^2+8x+1$

$16x^2+3x+2=0$

$x\notin R$

третий случай сразу отпадает.

Получается ~~одна~~ единственный вариант, когда $x=2$

Ответ: $x=2$

p.17. чистовик

часть 2

№4 $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 6 \\ НОК(a;b;c) = 2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$

$a = 2^{a_1}\cdot 3^{a_2}\cdot a_0$ — все $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$, $\neq 0$ из 1 усл-я

$b = 2^{b_1}\cdot 3^{b_2}\cdot b_0$ — из 2 усл-я: т.к. есть только степени 2 и 3, $a_0 = b_0 = c_0 = 1$

$c = 2^{c_1}\cdot 3^{c_2}\cdot c_0$

$a = 2^{a_1}\cdot 3^{a_2}$

$b = 2^{b_1}\cdot 3^{b_2}$

$c = 2^{c_1}\cdot 3^{c_2}$

из 2 усл-я: $\max(a_1, b_1, c_1) = 15$

$\max(a_2, b_2, c_2) = 16$

из 1 усл-я: $\min(a_1, b_1, c_1) = 1$

$\min(a_2, b_2, c_2) = 1$

Будем рассматривать возможные значения $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$.

Т.к. a_1 не зависит от a_2, b_1 – от b_2, c_1 – от c_2 и значения a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 должны удовл-ть условием, но неважно, какие конкретно у каждого из них значения, будем использовать $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$, значения удовл. усл-ям, но с сохранением порядка.

$x_1 = 15$, $x_2 = 16$, $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $z_1 = 1, \dots, 15$, $z_2 = 1, \dots, 16$.

в.17 чистовик часть 2

1) рассмотрим случаи, когда

$x_1 = 15 \quad y_1 = 1 \quad z_1 \in (2, \dots, 14), \quad x_2 = 16, \quad y_2 = 1, \quad z_2 \in (2, \dots, 15)$

15	1	2		16	1	2
15	1	3		16	1	3
...				...		
15	1	13		16	1	14
15	1	14	13 вар.	16	1	15
x_1	y_1	z_1		x_2	y_2	z_2

14 вар.

x_1, y_1, z_1 не повт.

x_2, y_2, z_2 не повт.

Где $x_1\, y_1\, z_1$ – размещения в тройке $(a_1\, b_1\, c_1)$ – 6 размещ.

и $x_2\, y_2\, z_2$ – 4 – для $(a_2\, b_2\, c_2)$ – 6 размещ.

Тогда получаем, что кол-во троек $(2^{a_1}3^{a_2}, 2^{b_1}3^{b_2}, 2^{c_1}3^{c_2}) =$

$= 6 \cdot 6 \cdot 13 \cdot 14 = 6652$

2) Рассмотрим граничные случаи для $z_1, z_2 \in (2, \dots, 15)$

$z_1 = 1$

15	1	1		16	1	2
x_1	y_1	z_1		16	1	3
				...		
				16	1	14
				16	1	15
				x_2	y_2	z_2

Здесь важно комбинации: $14 \cdot 6 \cdot 3$, т.к. у $x_1 y_1 z_1$ 3 комб.

То же самое для случая $z_1 = 15$

Итого для граничных случаев z_1: $14 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 = 504$

3) Рассмотрим граничные случаи z_2, $z_1 \in (2, \dots, 14)$

$z_2 = 1$, $z_2 = 16$

Аналогично п. 2, получим $13 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 = 468$

в. 17 (чистовик)

<u>часть 2</u>

4) Рассмотрим случаи z_1 и z_2 $z_1 = 1$ или 15

$z_2 = 1$ или 16

15 1 1	16 1 1
1 15 1	1 16 1
1 1 15	16 1 16
1 15 15	1 16 16
15 15 1	16 16 1

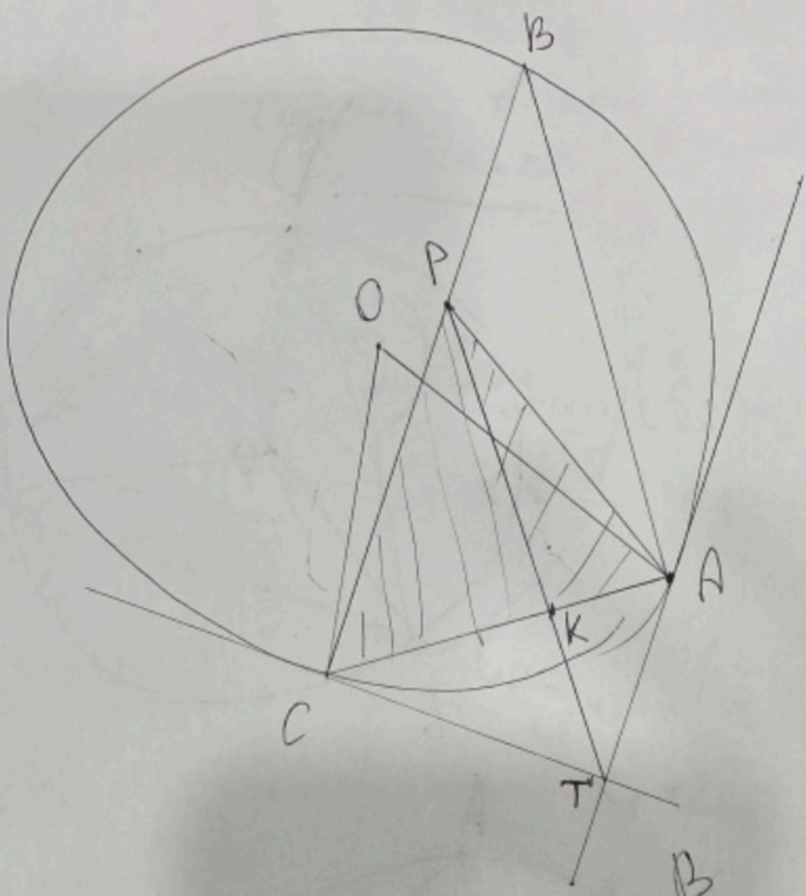
$\longrightarrow a\ bc = 6 \cdot 6 = 36$

всего: $6652 + 504 + 468 + 36 = 7660$

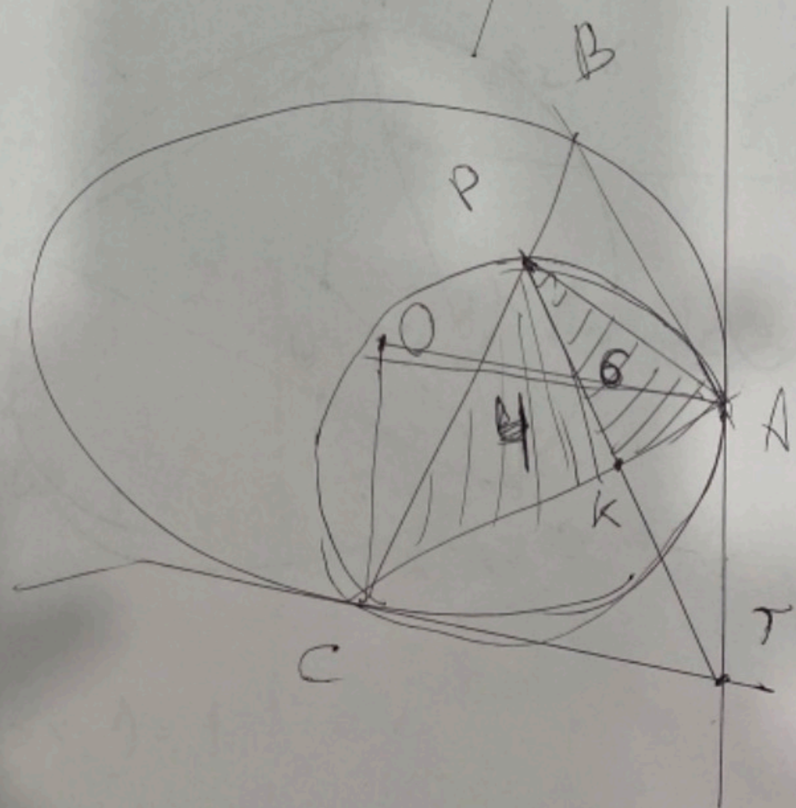
Ответ: 7660

$(4x+1)$ $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$ $\log_{\frac{x}{2}+2}($

$b=$



S_{ABC} - ?



$1)\ \sqrt{5x-1} \neq 1 \quad 2)\ 4x+1 \neq 1 \quad 3)\ \frac{x}{2}+2 \neq 1$

$2^{15} \cdot 3^{16}$ Тест в каждом числе есть ~~хотя бы~~ одна 2 и одна 3

1) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2$

$x = 2$

$\log(4x+1) = 1$

$x \notin R$

решений нет

2) $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2$

$x = \frac{2}{7} = 0,28$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 1$

$x_1 = 2$

$x_2 = 6$

5

3) $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2$

$x_1 = 2$

$x_2 = 10$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 1$

$x = \frac{2}{3} = 0,6$

1) $1 = 2$

Ответ: $x = 2$

21101093 (U103098 M1301627)

$\underbrace{\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)}_{1}$ $\underbrace{\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2}_{2}$ $\underbrace{\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)}_{3}$

$a = b$

$b = a = c + 1$

1) $5x-1 \neq 1$ 2) $4x+1 \neq 1$ 3) $\frac{x}{2}+2 \neq 1$

$x \neq 0{,}4$ $x \neq 0$ $x \neq -2$

$5x-1>0$ $4x+1>0$ $\frac{x}{2}+2>0$

$x > 0{,}2$ $x > -0{,}25$ $x > -4$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x > 0{,}2 \\ x \neq 0{,}4 \end{cases}$$

I $1_e = 2_e = 3_e + 1$

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 & (1) \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) + 1 \end{cases};$$

1) $\frac{1}{\log_{4x+1}(\sqrt{5x-1})} = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

21101093 (U103098 M1301627)