Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101079**

ID профиля: **846870**

Вариант 17

Чистовик

№3 (1 часть)

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b,2)\ (1)\end{cases}$$

1) $a^2+b^2\le \min(2a+2b,2)$

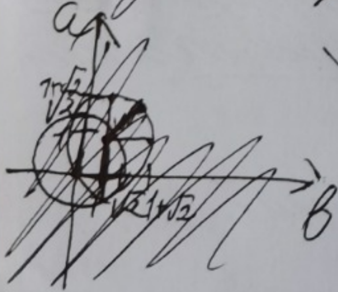
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le 2a+2b\\ 2a+2b\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2\le 2\\ 2a+2b>2\end{cases}\end{array}\right.$$

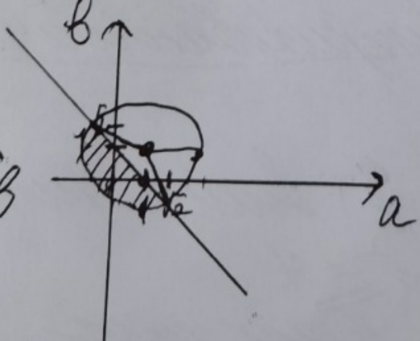
~~Введем ко~~

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2-2a+b^2-2b\le 0\\ a+b\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}a^2\cancel{-2a}+b^2\cancel{-2b}\le 2\\ a+b>1\end{cases}\end{array}\right.$$

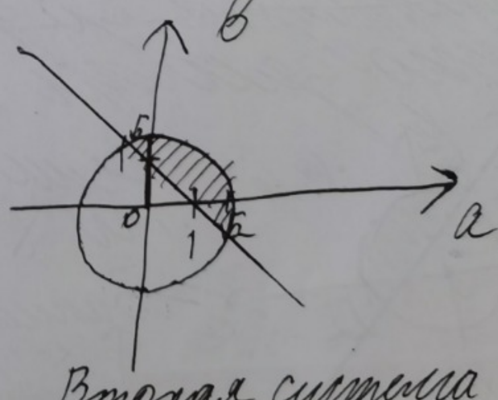
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a-1)^2+(b-1)^2\le 2\\ a+b\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2\le 2\\ a+b>1\end{cases}\end{array}\right.$$

Введем корд. плоскость на осях a и b





Первая система



Вторая система

Чистовик

№1 $a_n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} a_8 \cdot a_{12} > S+1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_6 \cdot (a_6+6t) > S+1 \\ (a_6+t)(a_6+5t) < S+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_6^2 + a_6 \cdot 6t > 10a_6 + \frac{-5+4}{2} \cdot 10t + 1 \\ a_6^2 + 6t \cdot a_6 + 5t^2 > 10 \cdot a_6 + \frac{-5 \cdot 4}{2} \cdot 10t + 17 \end{cases}$$

$a_6^2 + a_6(6t-10) + 5t - 1 > 0$

$a_6^2 + a_6(6t-10) + 5t^2 + 5t - 17 < 0$

Заметим, что если из второго вычесть перв получится выражение меньше 0

$5t^2 - 16 < 0$

$5t^2 < 16$

$t^2 < \frac{16}{5}$

$t^2 < 3,2$

$t = 1$ (т.к из условия $t > 0, t \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{cases} a_6 \cdot (a_6+6) > 10a_6 - 5 + 1 \\ (a_6+1)(a_6+5) < 10a_6 - 5 + 17 \end{cases}$$

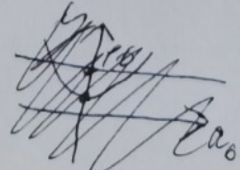
$$\begin{cases} a_6^2 + 6a_6 - 10a_6 + 4 > 0 \\ a_6^2 + 6a_6 - 10a_6 - 12 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_6 - 2)^2 > 0 \\ (a_6-2)^2 - 16 < 0 \end{cases}$$

$(a_6 - 2)^2 < 16$

$(a_6 - 6)(a_6 + 4) < 0$

\+ -4 − 6 + a_6



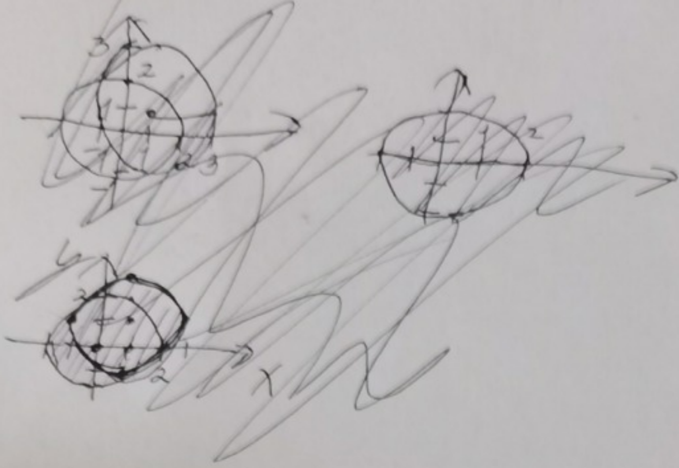
$a_6 \in (-4;6)$

$a_1 \in (-4-5; 6-5)$

$a_1 \in (-5;1)$

Ответ: $a_1 \in (-5;1)$; $a_1 \in \mathbb{Z}$

№3 (3 часть)



$5t^2 - 16 < 0$

$t^2 < 3{,}2$

$t < \frac{4}{\sqrt{5}}$

$k \vee \frac{4}{\sqrt{5}}$

$k\sqrt{5} \vee 4$

$5k^2 \vee 16$

$D = 16 - 16 = 0$

$a_6^2 - 4a_6 - 12 < 0$

$D = 16 + 48 = 64 = 8$

$\frac{4+8}{2} = 6 \qquad \frac{4-8}{2} = -4$

S t – целое $a_6 \cdot (a_6 + 6t) > a_6 +$

S

$(a+5t)\cdot(a+11t) > \cancel{a+t}\ 10a + \frac{0+10}{2}\cdot 10\cdot t + 1$

$(a+6t)\cdot(a+10t) < 10a + \frac{9\cdot 10}{2}t + 17$

$a^2 + 5ta + 11ta + 55t^2 > 10a + 45t + 1$

$a^2 + 16ta + 60t^2 < 10a + 45t + 17$

$a^2 + 16ta + 55t^2 - 10a - 45t - 1$

$\underbrace{a^2 + 16ta + 55t^2} + 5t^2 < \underbrace{10a + 45t + 1} + 16$

$5t^2 > 16$

$t^2 > \cancel{B}\ \frac{16}{5} = 3{,}2$

$55t^2 - 45t - 1$

$a_6 = a + 5t$

$\cancel{a^2 \pm 16 \frac{24}{\sqrt{5}} a + 55\cdot 3{,}2 \geq 10a + 45t}$

0123456789

$a^2 + \cancel{5ta}\ 16ta + 55t^2 > 10a + 45t + 1$

$a^2 + a(16t - 10) + 55t^2 \cancel{+} 45t - 1 > 0$

$a^2 + a(16t - 10) + 60t^2 - 45t - \cancel{17} < 0$

$\cancel{D = (16t-10)^2} - 4\cdot(55t^2 - 45t - 1)$

$a^2 + a(16t - 10) + 55t^2 - 45t - 1 > 0$

$a^2 + a(16t - 10) + 55t^2 - 45t - 1 < 5t^2 + 16$

$a_6 \cdot a_{12}$

$(a+5t)(a+11t) > S+1$

$a^2+16ta+55t^2 > S+1$

$(a+6t)(a+10t)=$

$=a^2+16ta+60t^2 \le S+17$

$a^2+16ta+55t^2 > 10a+\frac{90}{2}t+1$

$a^2+16ta+60t^2 < 10a+45t+17$

$\cancel{a^2+16ta}$

$\cancel{a^2+16ta-10a > 45t+17-60t^2}$

$\cancel{a^2+16a+55 > 10a+45+1}$

$\cancel{a^2+16a+60 \le}$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ 16\ \ \\ \hline 256 \end{array}$$

$a^2+a(16t-10)+55t^2-45t-1 > 0$

$a^2+a(16t-10)+60t^2-45t-17 < 0$

$\cancel{D=(16t-10)^2-4(55t^2-45t-1)}$

$256t^2+540t+55$

$\cancel{(16t-10)^2+220t^2-180t-1}$

$\cancel{256t^2-320t+100+220t^2-180t-1}$

$256t^2-540t+55$

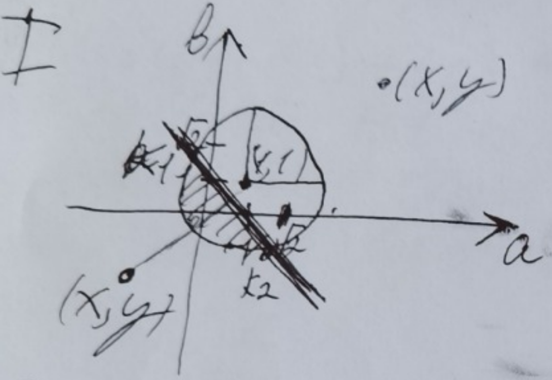
$\cancel{55t^2-45t-1+16ta-10a+a^2 > 0}$

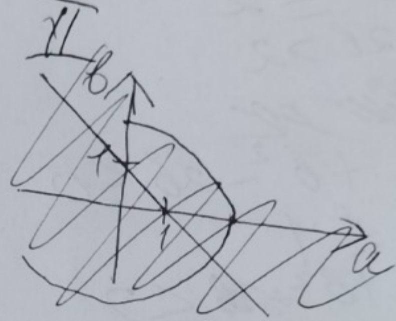
$55t^2$

Чистовик

№3 (2 часть)

Посмотрим на первое неравенство в системе. Заметим, ~~что~~ что это круг с точкой центра x и y и радиусом $\sqrt{2}$. Также, если этот касается заштр. области, то эти x и y подходят нам.

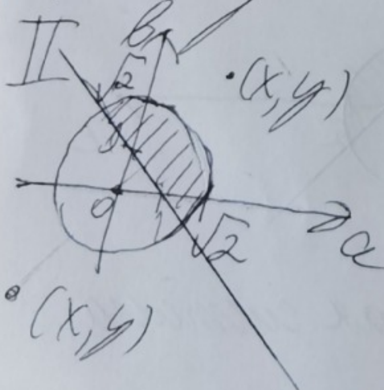




Если ~~...~~ т. (x, y) находится ниже прямой $a+b=1$, то нам подходят все точки (x, y), удовлетв. равенству

$$(x-1)^2+(y-1)^2 \le 4$$

~~Если (x, y) выше прямой, то минимальное расстояние до заштрихованной области~~ нужно делать



Если (x, y) выше линии $a+b=1$, то $x^2+y^2 \le 4$

Запишем в совокупность

$$\left[\begin{array}{l}(x-1)^2+(y-1)^2 \le 4\\ x^2+y^2 \le 4\end{array}\right.$$

Осталось найти площадь фигуры опис. этими ~~уравн.~~ нерав.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101079**

ID профиля: **846870**

Вариант 17

Чистовик

5. $4x+1=(\sqrt{5x-1})^a$

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=(4x+1)^b$

$5x-1=\left(\frac{x}{2}+2\right)^c$

$4x+1=(5x-1)^{\frac{a}{2}}$

$\frac{x}{2}+2=(4x+1)^{\frac{b}{2}}$

$5x-1=\left(\frac{x}{2}+2\right)^c$

$4x+1>0$

$\frac{x}{2}+2>0$

$\sqrt{5x-1}>0$

$4x+1\neq 1$

$\frac{x}{2}+2\neq 1$

$\sqrt{5x-1}\neq 1$

$(5x-1)=\left(\left((5x-1)^{\frac{a}{2}}\right)^{\frac{b}{2}}\right)^c$

$1=\frac{abc}{4}$

$abc=4$

Не умаляя общности $a=b=c-1$

$a^3-a^2=4$

$(a-2)(a^2+a+2)=0$

$a=2$

$4x+1=(\sqrt{5x-1})^2$

$4x+1=5x-1$

$x=2$

$4x+1=(\sqrt{5x-1})^1$

$16x^2+8x+1=5x-1$

$16x^2+3x+2=0$

$D=9-2\cdot 16\cdot 4<0$

Ответ: $x=2$

21101079 (U846870 M1304551)

Чистовик

4. $НОД(a;b;c) = 2^1 \cdot 3^1$

$НОК(a;b;c) = 2^{15} \cdot 3^{16}$

Представим a, b, c как $a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2}$

$b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2}$

$c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2}$

тогда

$$\left[\begin{array}{l} \min(a_1, b_1, c_1) = 1 \\ \min(a_2, b_2, c_2) = 1 \\ \max(a_1, b_1, c_1) = 15 \\ \max(a_2, b_2, c_2) = 16 \end{array}\right.$$

~~Пусть $a_1 = 1$~~

~~Пусть $a_1 = 1$, $b_1 = 15$, тогда c_1 имеет 15 решений~~

~~Рассмотрим все решения, где $a \neq b$~~

Рассмотрим все решения, где $a \neq b \neq c$.

Пусть $a = 1$; $b = 15$; тогда c имеет 13 решений.

Т.к переменных три и все числа различ.,

то кол-во решений $3! \cdot 13$

Расм. оставшиеся решения.

Пусть $a = 1$; $b = 15$; $c = 1$ или 15 (2 решения). Так как при перестановки будут повторения, то кол-во решений равно $\frac{3! \cdot 2}{2!} = 3! = 6$

Общее кол-во решений равно $3! \cdot 13 + 3! = 3! \cdot 14$

Аналогично делаем и с a_2, b_2, c_2.

получим $3! \cdot 15$

Чтобы получить общее кол-во решений все перемножим $3! \cdot 15 \cdot 3! \cdot 14 = 36 \cdot 14 \cdot 15 = 7560$ реш.

6. $\text{Нод}(a,b,c) = 2\cdot 3$

$\text{Нок}(a,b,c) = 2^{15}\cdot 3^{16}$

$\max(a,b,c) = 15$

$a,b,c = 1$

$a,b,c = 1 \ldots 15$

$\min(a_1,$

6 — реш.

$1 \cdot 15 + 1145$

$+11515$

13

$1\ 16$ — 16 реш

$6!\cdot 13+3+3=$

$x = 3$

$k = 2$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2$

$\sqrt{5x-1} = (4x+1)^{\frac{1}{2}}$

$6!\cdot 13+3+3+6!\cdot 14+3+3 = 12+6!(27)$

$5x-1 = 4x+1$

$x = 2$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$(k-2)(k^2+k+2)$

$5x-1>0$

$4x+1>0$

$\frac{x}{2}+2>0$

$\sqrt{5x-1}\neq 1$

$4x+1\neq 1$

$\frac{x}{2}+2\neq 1$

$x>\frac{1}{5}$

$x>-\frac{1}{4}$

$x>-4$

$x\neq\frac{2}{5}$

$x\neq 0$

$x\neq -2$

$\log_a b = \log_b c$

$b = a^k$

$\frac{k+t+l}{4} = 1$

$k\cdot t\cdot l = 4$

$x>\frac{1}{5}$ $\quad x\neq\frac{2}{5}$

$k = t = l-1$

$k^3-k^2-4=0$

$4x+1 = (\sqrt{5x-1})^k$

$k^2\cdot(k-1)$

$= (5x-1)^{\frac{k}{2}}$

$k^3-k^2=4$

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = (4x+1)^t = (4x+1)^{\frac{t}{2}}$

$k^3-k^2-4=0$

$= \left(\frac{x}{2}+2\right)^l$

$k = 2$

$k-2=0$

$k=2$

$(5x-1)^{\frac{k}{2}})^{\frac{t}{2}})^l =$

$\frac{k+t+l}{4} = 1$

$k^3-k^2-4 \,|\, k-2$

$-\frac{k^3-2k^2}{k^2-4}$ $\quad k^2+k$

5.

$4x+1=(\sqrt{5x-1})^a$
$(\frac{x}{2}+2)^2=(4x+1)^b$
$(5x-1)=(\frac{x}{2}+2)^c$

$\Rightarrow$

$4x+1=(5x-1)^{\frac{a}{2}}$
$(\frac{x}{2}+2)=(4x+1)^{\frac{b}{2}}$
$(5x-1)=(\frac{x}{2}+2)^c$

$\frac{abc}{4}=1$
$abc=4$

$a=b=c-1$

$a^3+a^2=4$
$a=2$

$4x+1=\sqrt{5x-1}$
$4x+1=5x-1$
$x=2$
$16x^2+8x+1=5x-1$
$16x^2+3x+2=0$

$D=S-\cancel{32}\cdot 4<0$

$(\frac{x}{2}+2)^2=$
3

$16x+3=0$
$16x=-3$
$x=-\frac{3}{16}$

$\times\ 210$
$\ \ 36$
1260
63
7560

$\times\ 14$
$\ \ 15$
70
14
210

$a^3-a^2-4 \,|\, a-2$
$-\ a^3-2a^2 \quad | \ a^2+a+2$
$-\ a^2-4$
$\ \ a^2-2a$
$2a-4$

a_1, b_1, c_1

$(1;15;c)=$
$(15;1;c)$
$(1;1;15)$
$(15;15;1)$

1 1 15
1 15 1
1 15 15
15 15 1
15 1 15
15 15 1

$\times 36$

Чистовик

5. $\cancel{\sqrt{5x-1} = (4x+1)^k}$

$\cancel{9x+4 = \left(\frac{x}{2}+2\right)^{2k}}$