Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101034**

ID профиля: **173364**

Вариант 17

Чистовик. ЛИСТ 1

№1

Пусть d - разность арифметической прогрессии ($d>0$ тк прогрессия возрастающая). тогда d - целое (разность между целыми числами)

$S = \frac{a_1+a_{10}}{2} \cdot 10 = (a_1+a_1+9d) \cdot 5 = 10a_1+45d$

$a_6 \cdot a_{12} = (a_1+5d)(a_1+11d) = a_1^2+5a_1d+11a_1d+55d^2 = a_1^2+16a_1d+55d^2 > 10a_1+45d+1$

$a_7 \cdot a_{11} = (a_1+6d)(a_1+10d) = a_1^2+6a_1d+10a_1d+60d^2 = a_1^2+16a_1d+60d^2 < 10a_1+45d+17$

$+\begin{cases} a_1^2+16a_1d+60d^2 < 10a_1+45d+17 \\ -(a_1^2+16a_1d+55d^2) < -10a_1-45d-1 \end{cases}$

$a_1^2+16a_1d+60d^2-a_1^2-16a_1d-55d^2 < 10a_1+45d+17-10a_1-45d-1$

$5d^2 < 16$

$d^2 < \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$ Тк $d>0$ и d-целое то d - натуральное $1^2 < 3\frac{1}{5}$; но $2^2 = 4 > 3\frac{1}{5}$ $\Rightarrow d=1$

тогда $a_1^2+16a_1d+55d^2 = a_1^2+16a_1+55 > 10a_1+45d+1 = 10a_1+46$

$a_1^2+16a_1+55 > 10a_1+46$

$a_1^2+6a_1+9 > 0$

$(a_1+3)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -3$

$a_1^2+16a_1d+60d^2 = a_1^2+16a_1+60 < 10a_1+45d+17 = 10a_1+45+17$

$a_1^2+16a_1+60 < 10a_1+62$

$a_1^2+6a_1-2 < 0$ $\quad a_1+6a_1+9-11<0$ $\quad (a_1+3)^2 < 11$

Тк a_1 - целое, то (a_1+3) - целое. тогда $|a_1+3| \leq 3$ (при $|a_1+3| \geq 4$ $(a_1+3)^2 \geq 16 > 11$ W)

$a_1+3 \in \{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$

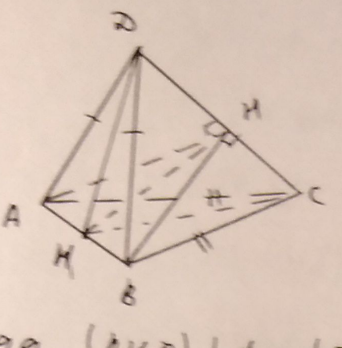
$a_1 \in \{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$

Но $a_1 \neq -3$ тогда подходят все значения кроме -3

ответ: $-6;-5;-4;-2;-1;0$

Чистовик   ЛИСТ 2

№2



$AB=2;\ AC=CB=5;\ AD=DB=6$

Проведем $BH \perp DC$. тогда

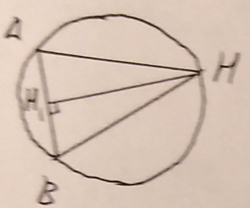
т.к. $\Delta ADC = \Delta BDC$ (по трем сторонам)

то $\angle ACD = \angle BCD \Rightarrow$

$\Delta ACH = \Delta BCH$ ($AC=BC$; $\angle ACH = \angle BCH$; CH - общее)

$\Rightarrow \angle AHC = \angle BHC = 90^\circ \Rightarrow AH \perp AC$

тогда $(AHB) \perp DC$ (т.к. $DC \perp AH$ и $DC \perp BH$) $\Rightarrow$ т.к. $DC \parallel$ оси цилиндра, то $(ABH) \perp$ оси цилиндра $\Rightarrow (ABH) \parallel$ основанию цилиндра. Тогда



т.к. A и B и H лежат на боковой поверхности цилиндра, то ΔABH - вписан в окружность с радиусом R (радиусом цилиндра).

$$R = \frac{AH\cdot BH\cdot AB}{\frac{1}{2}HH_1\cdot AB} = \frac{2AH^2}{HH_1} = \frac{2AH^2}{\sqrt{AH^2-AH_1^2}} = \frac{2AH^2}{\sqrt{AH^2-1}}$$

$AH_1 = \frac{1}{2}AB = 1$ т.к. $AH=HB \Rightarrow \Delta AHB$ - р/б; $HH_1 \perp AB \Rightarrow AH_1 = H_1B$

$$R = \frac{2AH^2}{HH_1} = \frac{2(AH_1^2+H_1H^2)}{HH_1} = \frac{2+2HH_1^2}{HH_1}$$

т.к. R - минимально, то $\frac{2+2HH_1^2}{HH_1}$ - минимально $\Rightarrow \frac{1+HH_1^2}{HH_1}$ - минимальн

$$\frac{HH_1^2+1}{HH_1} = \frac{HH_1^2+1-2HH_1}{HH_1} + 2 = \frac{(HH_1-1)^2}{HH_1} + 2$$

$HH_1 - 1 \geq 0 \rightarrow$ минимальн $\frac{1+HH_1^2}{HH_1}$ будет равно 2 при $HH_1 = 1$ (HH_1 - положительное)

тогда найдем DC. ΔABD: DH_1 - высота (т.к. ΔADB - р/б; $AH_1 = H_1B$) $\Rightarrow$

ΔDAH_1: $DH_1^2 = AD^2 - AH_1^2 = 6^2 - 1 = 35$

Аналогично ΔCH_1B: $CH_1^2 = CB^2 - H_1B^2 = 25 - 1 = 24$

т.к. $HH_1 \subset (AHB)$; $(AHB) \perp DC \Rightarrow HH_1 \perp DC \Rightarrow \angle H_1HC = \angle H_1HD = 90^\circ \Rightarrow$

ΔDH_1H и ΔCH_1H - прямоугольные. $\Rightarrow \Delta DH_1H$: $DH = \sqrt{DH_1^2 - HH_1^2} = \sqrt{35-1} = \sqrt{34}$

ΔCHH: $CH = \sqrt{H_1C^2 - HH_1^2} = \sqrt{24-1} = \sqrt{23} \Rightarrow CD = \sqrt{23} + \sqrt{34}$

Ответ: $CD = \sqrt{23} + \sqrt{34}$

Чистовик

№3

ЛИСТ 3

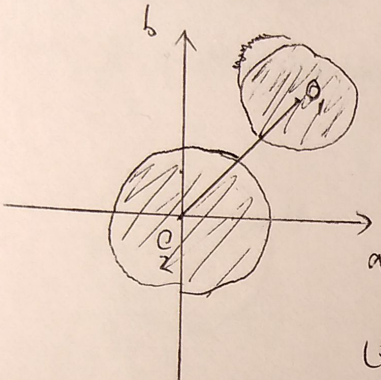
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le \min(2(a+b);2)\end{cases}$$

Будем решать систему относительно $a;b$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le(\sqrt2)^2\\ a^2+b^2\le\min(2(a+b);2)\le(\sqrt2)^2\end{cases}$$ – это уравнения ~~окружностей~~ кругов

$R_1=\sqrt2$ $\quad R_2\le\sqrt2$

$O_1(x;y);\ O_2(0;0)$



Заметим, что если $O_2O_1>2\sqrt2$ ~~окружности~~ круги не имеют общих точек $\Rightarrow$ для таких x и y нет a и b, для которых выполняется система нер-в. $\Rightarrow$ $O_2O_1=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}\le2\sqrt2$

(*) $x^2+y^2\le8$. Но возможно не все x и y удовлетворяющие (*) подходят, ведь радиус второй окружности может быть меньше $\sqrt2$.

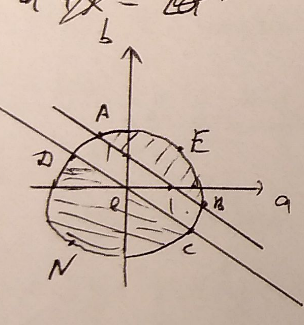
$\cancel{(a-x)^2+(b-y)^2\le2}$

$\cancel{a^2+x^2-2a}$

$\min(2(a+b);2)=2(a+b)$ при $a+b\le1$ $\quad b\le1-a$

Проведем также прямую $b=-a$.

Рассмотрим некоторые участки.



1) Участок AEB. На нем $b>1-a\Rightarrow(a+b)>2\Rightarrow\min(2(a+b);2)=2$

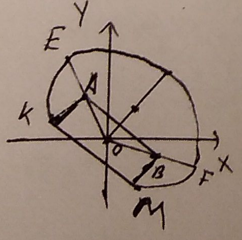
$\Rightarrow$ Все круги, с центром $x;y$; радиусом $\sqrt2$, касающиеся этого участка нам подходят.

Найдем такие $x;y$. Координаты A и B: $\begin{cases}a^2+b^2=2\\ b=1-a\end{cases}$

$a^2+a^2-2a+1=2\qquad 2a^2-2a-1=0$

$\frac{D}{4}=1+2=3\qquad a_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt3}{2}\Rightarrow b=1-a=\frac22-\frac{1\pm\sqrt3}{2}=\frac{1\mp\sqrt3}{2}\Rightarrow A\left(\frac{1-\sqrt3}{2};\frac{1+\sqrt3}{2}\right);B\left(\frac{1+\sqrt3}{2};\frac{1-\sqrt3}{2}\right)$

Нам подходят $x;y$, лежащие:



Это ~~часть~~ сектор круга OEF, с радиусом $2\sqrt2$ и центром $(0;0)$

Сектор KAE; с радиусом $\sqrt2$ и центром $\left(\frac{1-\sqrt3}{2};\frac{1+\sqrt3}{2}\right)$

Сектор MBF с радиусом $\sqrt2$ и центром $\left(\frac{1+\sqrt3}{2};\frac{1-\sqrt3}{2}\right)$

Прямоугольник $KABM$; где $AK=BM=\sqrt2$ (ΔAOB – дважды посчитан)

$AO=OM=\sqrt2$ так это прямоугольник

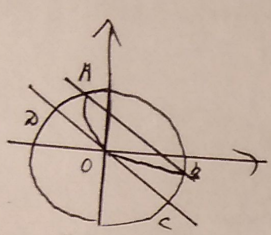
Чистовик ЛИСТ 4

№3 (продолжение)

2) ~~Рассмотрим~~ Участок DCN: на нем $a+b \le 0 \Rightarrow a^2+b^2<0 \ast \varnothing \Rightarrow$
для таких a и b нет x и y

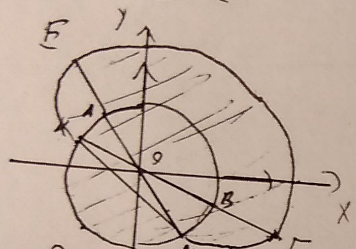
3) Участок DABC:

~~Нам подходят все x; удаленные от каждой из точек не более чем $\sqrt{2}$~~



Когда (a; b) приближается к прямой DC радиус второй окружности приближается к нулю.

Когда (a; b) приближается к AB - то радиус второй окружности приближается к $\sqrt{2} \Rightarrow$ все что лежит в $\omega(0; \sqrt{2})$ подходит.



$\Rightarrow$ В итоге нам подходит эта фигура:

$S_{EOF} = \frac{1}{3} S_{\omega(0;2\sqrt{2})} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 8 = \frac{8}{3}\pi$

$S_{KOMQ} = \frac{1}{3} S_{\omega(0;\sqrt{2})} = \frac{1}{3}\pi\cdot 2 = \frac{2}{3}\pi$

(также < A) $\rightarrow S_{BMFS} = \frac{1}{4} S_{\omega(B;\sqrt{2})} = \frac{1}{4}\pi\cdot 2 = \frac{\pi}{2}$ $(MF \perp FE)$

$\Rightarrow S = S_{EOF} + S_{KOMQ} + 2S_{BMFS} = \frac{10\pi}{3} + 2\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{10\pi}{3} + \pi = \frac{13\pi}{3}$

Ответ: $S = \frac{13\pi}{3}$

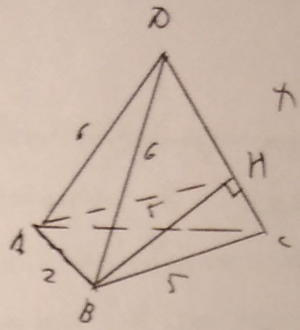
Черновик

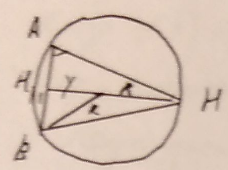
$S = \underline{a_1 + a_1 + 9d}$

$\begin{array}{r} 45 \\ +17 \\ \hline 62 \end{array}$

$(a_1+3)^2 - 11 < 0$

$(a_1+3)^2 < 11$





R_E BH

$1+y^2 = R^2$

$1+y^2+2yR+R^2 = BH^2$

$1+y^2$

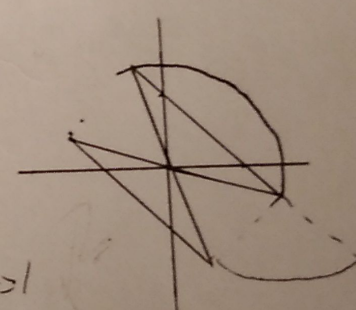
$R = \frac{S}{\cancel{abc}} \cancel{\frac{BH \cdot H_1H}{AB \cdot AH^2}} \cancel{\frac{H_1H}{2AH}}$

$S = \frac{abc}{4R}$ $\quad R = \frac{abc}{4S} = \frac{AB \cdot AH^2}{\frac{1}{2}AB \cdot AH \cdot \sin\alpha} = \frac{2AH}{\sin\alpha} = \frac{2AH^2}{HH}$

$\frac{AH^2}{\sqrt{AH+1}}$ $\quad \frac{AH^4}{H1}$

$\cancel{AC^2} = DC = \sqrt{CH_1^2 - HH_1^2} + \sqrt{DH_1^2 - HH_1^2}$

$1 + HH_1^2 - \frac{2HH_1}{HH_1} + 2 = \frac{(HH_1^2-1)^2}{HH_1} + 2$

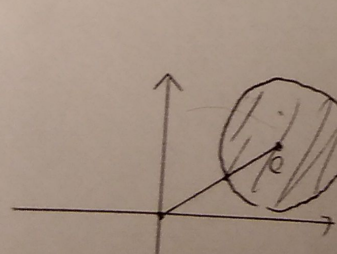


$\frac{1+x^2}{x}$ $\quad \frac{2x \cdot x - (1+x^2)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$ $\quad x>1$

$(a-x)^2 + (a-y)^2 \leq (\sqrt{2})^2$

$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq (\sqrt{2})^2 \\ a^2+b^2 \leq \min(2(a+b); 2) \leq \sqrt{2} \end{cases}$

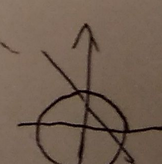
$a+b<1$



$O(x; y)$

$\sqrt{2}$

$x^2+y^2 \leq 8$



$x^2+y^2-2(a+b) \leq 2 - \min(2; 2(a+b))$ $\quad a+b = A$

$x^2+y^2 \leq 2 \cancel{+2A - \min(2;2A)}$ $\quad x^2+y^2-2(ax+by) \leq 2 - \min(2; 2(a+b))$

$b =$ $\quad a^2+b^2 < 2(a+b)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101034**

ID профиля: **173364**

Вариант 17

Чистовик

№4

Тк НОД$(a;b;c)=2\cdot3$ то у каждого из a,b,c есть простые делители 2 и 3. Тк НОК$(a;b;c)=2^{15}\cdot3^{16}$ то числа a,b,c содержат только простые делители 2 и 3. Тогда, все варианты троек будут отличаться только степенью.

~~1. Пусть у a есть ≥ 2 простых делителей двоек. Тогда, если $a=2^{a_1}\cdot3^{a_2}$; $b=2^{b_1}\cdot3^{b_2}$; $c=2^{c_1}\cdot3^{c_2}$ где $a_1;a_2;b_1;b_2;c_1;c_2\geq1$ то или b_1 или $c_1=1$. Пусть $b=1$ (если $b_1=1$ будет аналогичный случай). Тогда $1+a_1+b_1=15$ $a_1+b_1=15$~~

Пусть $a=2^{a_1}\cdot3^{a_2}$; $b=2^{b_1}\cdot3^{b_2}$; $c=2^{c_1}\cdot3^{c_2}$ Тогда, рассмотрим сначала степени двоек.

$\max(a_1;b_1;c_1)=15$

одно из чисел $a_1;b_1;c_1=1$, а остальные ≥1 (иначе НОД будет не 6)

Кол-во вариантов выбрать один из 3 это 3 (выбираем, где степень 1). Осталось два места. Один из этих двух имеет степень 15 $\Rightarrow$ два варианта выбрать, какая степень 15. Тогда третье число может принимать значения от 1 до 15 включительно $\Rightarrow$ 15 вар. $\Rightarrow$

Всего вар расставить степени двоек это $3\cdot2\cdot15=3\cdot30=90$

Но мы посчитали $1;15;15$; $15;1;15$; $15;15;1$ – два раза $\Rightarrow$ всего $90-3=87$ вар

Аналогично для степеней троек $a_2;b_2;c_2$

Выбрать, какое $=1$ это 3 вар

Выбрать, какое $=16$ это 2 вар

Выбрать степень 3 числа от 1 до 16 это 16 вар; и каждый мы посчитали $\{1;16;16\}$; $\{16;1;16\}$; $\{16;16;1\}$ ~~три~~ два раза $\Rightarrow$ всего

$3\cdot2\cdot16-3=96-3=93$

Тогда всего вар расставить степени это $93\cdot87=8091$

Ответ: 8091 троек

Чистовик

№5

Пусть $a=\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$; $b=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$; $c=\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$$\begin{cases} 5x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \\ 4x+1>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{4} \\ x\neq 0 \\ \frac{x}{2}+2>0 \quad x>-4 \\ \frac{x}{2}\neq -1 \quad x\neq -2 \end{cases} \Rightarrow x>\frac{1}{5};\ x\neq\frac{2}{5} \Rightarrow (5x-1);\ (4x+1);\ (5x-1)>0$$

① ~~$a = \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{5x-1}(4x+1)^2 = \dfrac{1}{\log_{4x+1}\sqrt{5x-1}} = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$~~

~~$c+1 = \log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$~~ $\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = (4x+1)$ ~~$\log_{4x+1}\sqrt{5x-1}$~~

$$abc=\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\cdot c=\frac{c\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2}{\log_{4x+1}\sqrt{5x-1}}=\log_{\sqrt{5x-1}}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\cdot c=$$

$$=\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^4\cdot\frac{1}{\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)}=\log_{\frac{x}{2}+2}\left(\frac{x}{2}+2\right)^4=4\log_{\frac{x}{2}+2}\left(\frac{x}{2}+2\right)=4$$

$\Rightarrow abc=4$ при любом x. Пусть $c=a$ или $c=b$ тогда третье число $c-1 \Rightarrow$

I $\Rightarrow abc = c^2(c-1)=c^3-c^2=4 \qquad c^3-c^2-4=0$

	1	−1	0	−4
2	1	1	2	0

$(c-2)(c^2+c+2)=0 \Rightarrow c=2$ ($D<0$)

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2 \qquad 5x-1=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \qquad 5x-1=\frac{x^2}{4}+4+2x \qquad \frac{x^2}{4}-3x+5=0$

$x^2-12x+20=0 \qquad (x-10)(x-2)=0 \qquad \left[\begin{array}{l} x=10 \Rightarrow ① \\ x=2 \quad ② \end{array}\right.$

① При $x=10$ $\quad a=\log_{\sqrt{49}}41=\log_7 41\neq \log 2$ и $\neq c-1=1 \Rightarrow$ 10 не подходит

② При $x=2$ $\quad a=\log_{\sqrt{9}}9=2 \qquad b=\log_9 9=1 \Rightarrow$ $x=2$ подходит.

II Если $a=b$ и $a=c$ а третье $a-1$ то $a=2 \Rightarrow \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2$

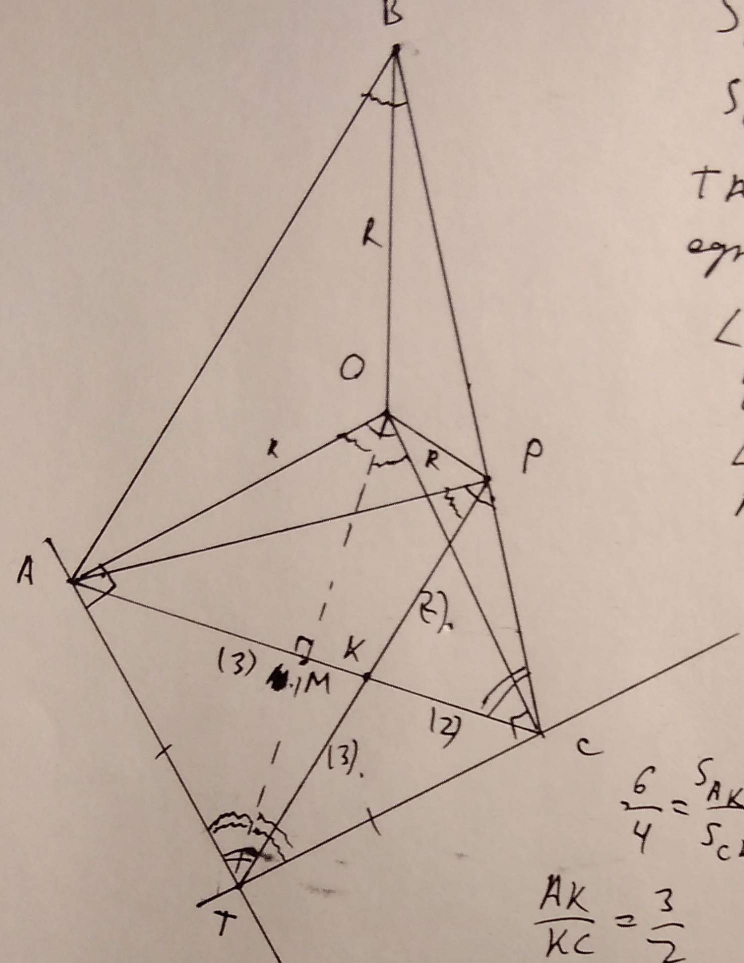
$4x+1=\left(\sqrt{5x-1}\right)^2 \qquad 4x+1=5x-1 \qquad x=2$ Этот вар подходит, и мы его разобрали.

III Вариант, когда $b=a$ или $b=c$ а третье $b-1$ разобран (т.к. или $b=a \Rightarrow$ входит в пункт II или $b=c \Rightarrow$ входит в I) $\Rightarrow$ Единственный подходящий вариант при $x=2$

Ответ 2

Чистовик

№6



$S_{APK} = 6$

$S_{CPK} = 4$

$TA = TC$ (т.к. TA и TC касат. из одной точки)

$\angle AOC = \angle APC$ (как вписанные углы)

$\angle ATC = 180 - \angle AOC$ (т.к. в чет-ке $AOCT$ два угла по $90°$) $=$

$= 180 - \angle APC \Rightarrow$ четк $APCT$ – вписанный

$\Rightarrow A; O; P; C; T$ лежат на одной окружности; TO – диам.

$$\frac{6}{4} = \frac{S_{AKP}}{S_{CKP}} = \frac{\frac{1}{2} AK \cdot KP \sin \angle AKP}{\frac{1}{2} CK \cdot KP \sin(180 - \angle AKP)} = \frac{AK}{KC}$$

$$\frac{AK}{KC} = \frac{3}{2}$$

$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$ (как вписанный)

$\angle AOC = 2\angle B$. $\angle APT = \angle AOT = \frac{\angle AOC}{2}$ $(AT = TC) = \frac{2\angle B}{2} = \angle B$

$\angle ATP = \angle ACP$ (как впис.) $\Rightarrow$ $\triangle ABC \sim \triangle APT$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{APT}} = \left(\frac{AC}{AT}\right)^2 = \cancel{\dots}$$

$\triangle AKT \sim \triangle PKC$ (по двум углам) $\Rightarrow$ $\frac{S_{AKT}}{S_{PCK}} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$ $\quad S_{AKT} = \frac{9 S_{PCK}}{4} = \frac{9 \cdot 4}{4} = 9$

$S_{APT} = S_{APK} + S_{AKT} = 6 + 9 = 15$

$S_{ABC} = 15 \cdot \left(\frac{AC}{AT}\right)^2 = \frac{AC^2}{AT^2} = \frac{4AM^2}{AT^2} =$

PK – бис. $\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{3}{2}$

$\frac{AP}{AT} = \frac{AB}{AC}$

$$S_{ABC} = S_{APT} \cdot \frac{AC^2}{AT^2} = 15 \cdot \frac{4AM^2}{AT^2} = 4 \sin^2(90 - \beta) = 15 \cdot 4 \cos^2\beta = 60\cos^2\beta$$

Черновик

6

$2^{15} \cdot 3^{16}$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 16 \\ 6 \\ \hline 96 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times 93 \\ 87 \\ \hline +651 \\ 744 \\ \hline 8091 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times 87 \\ 93 \\ \hline +261 \\ 783 \\ \hline 8091 \end{array}$$

$$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$$

$$\frac{\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2}{\log_{4x+1}\left(\sqrt{5x-1}\right)} = \log_{\sqrt{5x-1}}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \qquad x \quad \log_{\sqrt{5x-1}}\sqrt{\frac{x}{2}+2}$$

$$= \log_{\sqrt{\frac{x}{2}+2}}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = \log_{\frac{x}{2}+2}\left(\frac{x}{2}+2\right)^4 = 4$$

$\log^3_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) - \log \qquad x^3 - x^2 - 4 = 0$

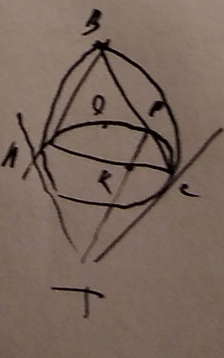
$\cancel{x^3 \cdot x^2}$

	1	-1	0	-4
2	1	1	2	0

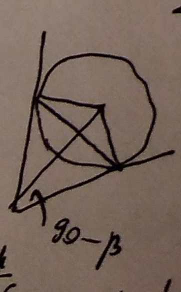
$(x-2)(x^2+x+2)$

$1-4$

$36-20$



$\angle APB = 180 - 2\beta$



$90-\beta$

$\frac{2 S_{AC}}{AT}$ $\quad 4 \operatorname{tg} \angle ACT$