Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100842**

ID профиля: **326169**

Вариант 17

№1. Чистовик. Лист 3.

$S = \frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot 10 = 10a_1+45d.$

$a_6\cdot a_{12} = (a_1+5d)(a_1+11d) = a_1^2+16da_1+55d^2 > 10a_1+45d+1$

$a_7\cdot a_{11} = (a_1+6d)(a_1+10d) = a_1^2+16da_1+60d^2 < 10a_1+45d+17$

$1+10a_1+45d+5d^2 < a_1^2+16da_1+60d^2 < 10a_1+45d+17$

$5d^2<16$

$a_1\in\mathbb{Z}$
$d\in\mathbb{Z}$
$d>0$

$d^2<\frac{16}{5}$

$d<\frac{4}{\sqrt5}.$

$\frac{4}{\sqrt5} \vee 2$ $\quad$ $\frac{4}{\sqrt5} \vee 1$

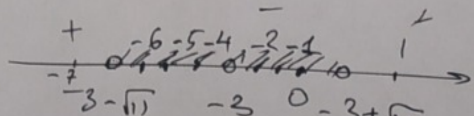
$2 \vee \sqrt5$ $\quad$ $4 \vee \sqrt5.$

$\Rightarrow$ $\quad d<2 \Rightarrow \boxed{d=1}.$

$\begin{cases} a_1^2+16a_1+60<10a_1+45+17\\ a_1^2+16a_1+55>10a_1+45+1\end{cases}$

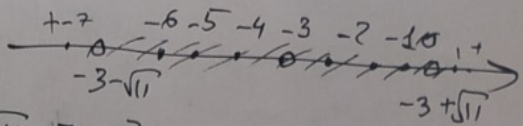
$\begin{cases} a_1^2+6a_1-2<0\\ a_1^2+6a_1+9>0\end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} a_1^2+6a_1-2<0\\ a_1\ne -3\end{cases}.$

$\frac{D}{4}=9+2=11 \Rightarrow$



$\sqrt{11}-3 \vee 1$ $\quad$ $0<\sqrt{11}-3<1.$

$\sqrt{11} \vee 4$



$-3-\sqrt{11} \vee -6$ $\quad$ $-3-\sqrt{11} \vee -7$

$6 \vee 3+\sqrt{11}$ $\quad$ $7-3 \vee \sqrt{11} \Rightarrow$

$3 \vee \sqrt{11}$ $\quad$ $4 \vee \sqrt{11}$

$\Rightarrow -7<-3-\sqrt{11}<-6 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $a_1\in\{-6;-5;-4;-2;-1;0\}.$

Чистовик. Лист 2.

прод. №2.

$h=\sqrt{2}$, тогда $CD=\underset{\sqrt{36-2}}{\sqrt{34}}+\underset{\sqrt{25-2}}{\sqrt{23}}$ или

$CD=\sqrt{34}-\sqrt{23}$ (треуг. тупоугольный.

Проверим, что $\triangle CBD$ сущ.

$CD>BD>BC$; $CD=\sqrt{23}+\sqrt{34}<5+6=\sqrt{25}+\sqrt{36}$. ✓

$CD<BC<BD$; $BD=6 < 5+\sqrt{34}-\sqrt{23}$ ✓

$1+\sqrt{23} < \sqrt{34}$

$2\sqrt{23} < 34-24$

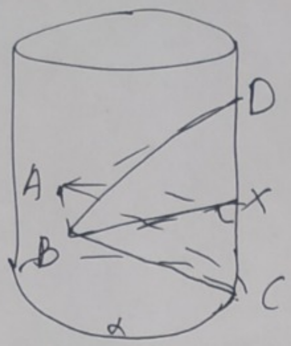
Ответ: $CD=\sqrt{34}\pm\sqrt{23}$.

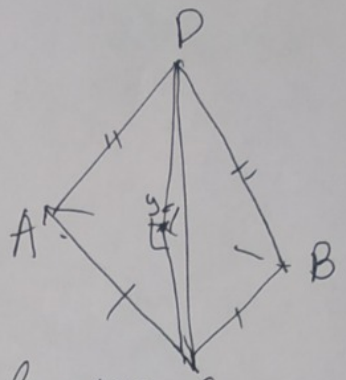
Чистовик. Лист 1.

№2

$AB = 2$
$AC = CB = 5$
$AD = DB = 6$
$R \to \min$

$CD - ?$





Решение:

1. DY - высота и медиана в $\triangle ABD$. $C \Rightarrow$
$\Rightarrow CY$ - также высота в $\triangle ABC$. ($\triangle ABC$ - р/б.) $\Rightarrow$

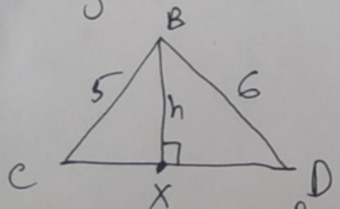
$$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp DY \\ AB \perp CY \end{cases} \Rightarrow AB \perp (DCY) \Rightarrow AB \perp DC. \Rightarrow$$

$\Rightarrow AB \parallel \alpha$ (α - плоскость основания цилиндра).

2. Выберем т. X на DC так, что $(ABX) \parallel \alpha$. $\Rightarrow$

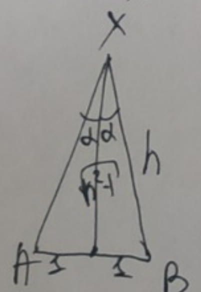
$$\Rightarrow DC \perp (ABX) \Rightarrow \begin{cases} DC \perp BX \\ DC \perp AX \end{cases} \Rightarrow$$ BX - высота в $\triangle BDC$.

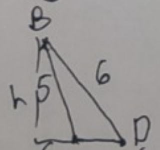
Пусть $BX = h$.



$h \le 5$.

Радиус ~~вп~~ описанной около $\triangle ABX$ окружности равен радиусу цилиндра.





$$2R = \frac{2}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{h} \cdot \frac{\sqrt{h^2-1}}{h}} = \frac{h^2}{\sqrt{h^2-1}}$$

$R_{\min}$: $0 = \left(\frac{h^2}{2\sqrt{h^2-1}}\right)' \Leftrightarrow$ ~~$\frac{1}{2}\cdot$~~

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{2h\sqrt{h^2-1} - \frac{2h}{2\sqrt{h^2-1}} \cdot h^2}{h^2-1} = 0. \quad (h \ne 1) \quad (h \ne 0;\ h > 0)$$

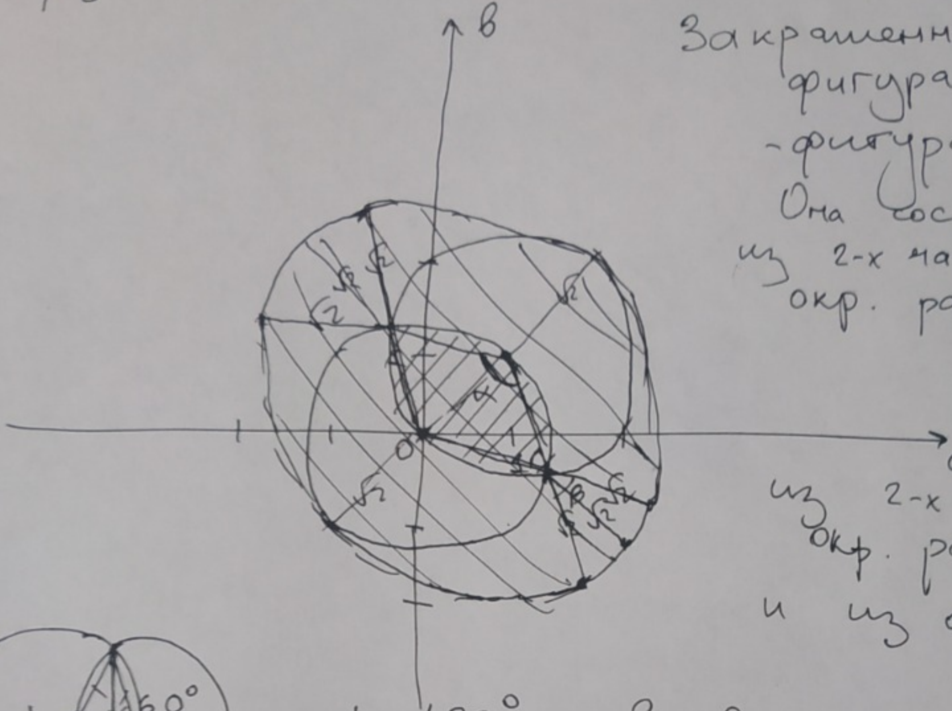
$$\sqrt{h^2-1} - \frac{h^2}{2\sqrt{h^2-1}} = 0 \Rightarrow 2(h^2-1) - h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 2 \Rightarrow h = \sqrt{2}.$$

Проверим, что это точка минимума:

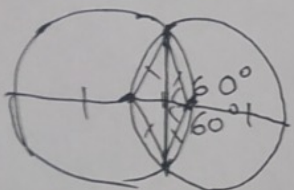
R': $-$, $+$; R: $\searrow$ $\sqrt{2}$ $\nearrow$ h — верно ✓

прод. № 3.

Чистовик. Лист 5.



Закрашенная фигура — фигура М. Она состоит из 2-х частей окр. радиуса $\sqrt{2}$; из 2-х частей окр. радиуса $2\sqrt{2}$; и из области K.



$\alpha = 120°$.
$\beta = 60°$.

$S = S_K + 2S_{окр.2\sqrt{2}} + 2S_{окр\sqrt{2}}$.

$$S_K = 2\cdot\left(\frac{\pi(\sqrt{2})^2}{3} - \frac{\sin 120°\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

$$S_{2\sqrt{2}} = \left(\frac{\pi(2\sqrt{2})^2}{3} - \frac{\pi(\sqrt{2})^2}{3}\right) = 2\pi$$

$\left(\frac{1}{3} = \frac{120°}{360°}\right)$ $\quad S_{\sqrt{2}} = \frac{60°}{360°}\cdot\left(\pi(\sqrt{2})^2\right) = \frac{\pi}{3}$.

$$S = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} + 4\pi + \frac{2\pi}{3} = \cancel{\frac{10\pi}{3} + 4\pi - \sqrt{3} = \frac{22\pi}{3} - \sqrt{3}}.$$
$= 6\pi - \sqrt{3}$.

Ответ: $S(M) = 6\pi - \sqrt{3}$.

21100842 (U326169 M1303578)

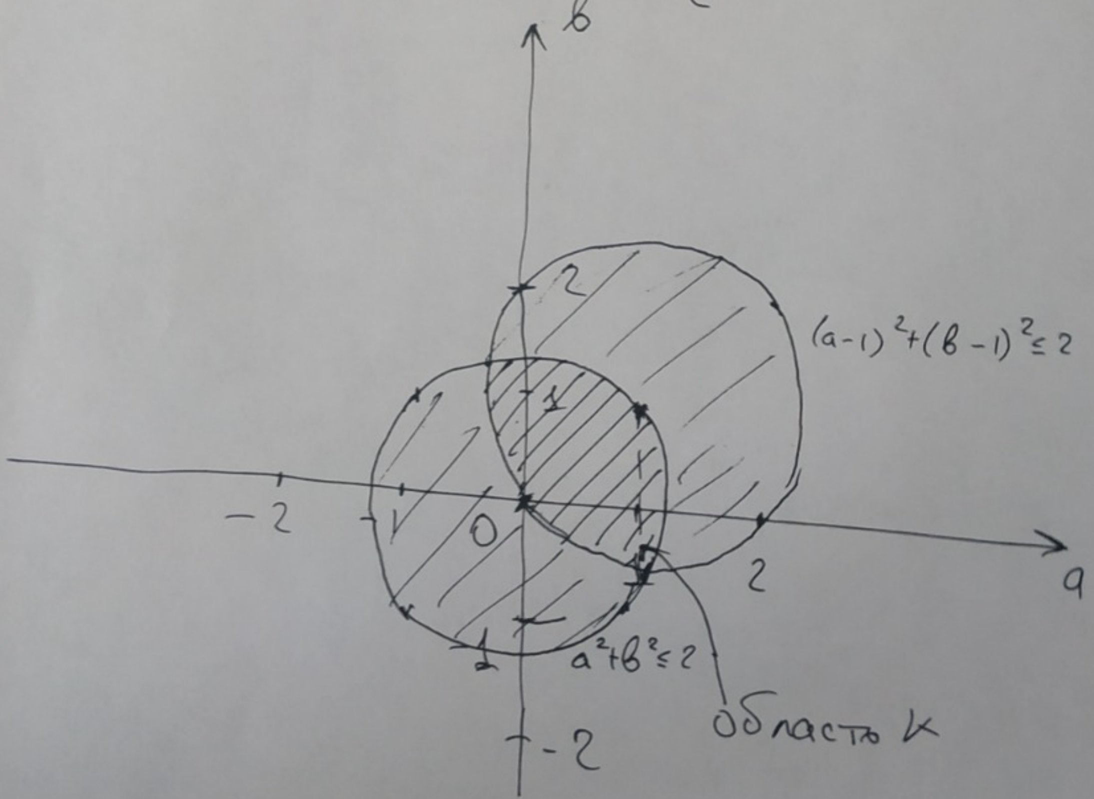
Чистовик. Лист 4.

№3. $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b;2)\end{cases}$ $S-?$

$a^2+b^2\le \min(2a+2b;2) \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2\le 2a+2b\\ a^2+b^2\le 2\end{cases}$

Тогда: $\begin{cases}a^2-2a+1+b^2-2b+1\le 2\\ a^2+b^2\le 2\end{cases}$

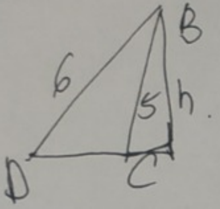
$\begin{cases}(a-1)^2+(b-1)^2\le 2\\ a^2+b^2\le 2.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x+a)^2+(b-y)^2\le 2\\ a^2+b^2\le 2\\ (a-1)^2+(b-1)^2\le 2.\end{cases}$



$(a-x)^2+(b-y)^2\le 2$ — ~~окружности~~ круги с центром в точке $(x;y)$ и радиусом $\sqrt{2}$.
Они либо касаются области K, либо пересекают её.

21100842 (U326169 M1303578)

черновик.



$\sqrt{34} - \sqrt{23} > 1$ ✓

$34 > 1 + 23 + 2\sqrt{23}$ ✓

$10 > 2\sqrt{23}$ ✓

$\sqrt{34} \pm \sqrt{23}$

$a_1 = 0$: $a_6 = 5$

$a_7 = 6$

$a_{11} = 10$

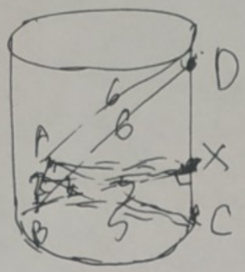
$a_{12} = 11$

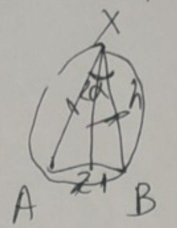
$S = \frac{0+0+9}{2} \cdot 10 = 45$

$60 < 45 + 17$ ✓

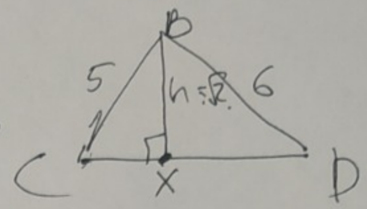
$55 > 46$ ✓

Черновик.





XB - высота тут:



$h \leq 5.$

$\cancel{\sqrt{h^2-1}}$ $h=$ $2R = \frac{2}{\sin\alpha} = \frac{2}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{h}\cdot\frac{\sqrt{h^2-1}}{h}} = \frac{h^2}{\sqrt{h^2-1}}$

$R = \frac{h^2}{2\sqrt{h^2-1}}$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$R_{min} = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{\sqrt{h^2-1}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{2h\cdot\sqrt{h^2-1} - \frac{2h}{2\sqrt{h^2-1}}\cdot h^2}{h^2-1} = 0$

$\cancel{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{x+\Delta x} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x}}{\sqrt{x^2+\Delta x\cdot x}\,(x+\Delta x)} =}$

$2(\sqrt{h^2-1})^2 - h^2 = 0.$

$2(h^2-1) - h^2 = 0$

$2h^2 - 2 - h^2 = 0$

$h^2 = 2$

$\boxed{h = \sqrt{2}}$

$R = \frac{2}{2\cdot 1} = 1$

$\sqrt{25-2} = \sqrt{23}$

$\sqrt{36-2} = \sqrt{34}$

$\boxed{CD = \sqrt{23}+\sqrt{34}}.$

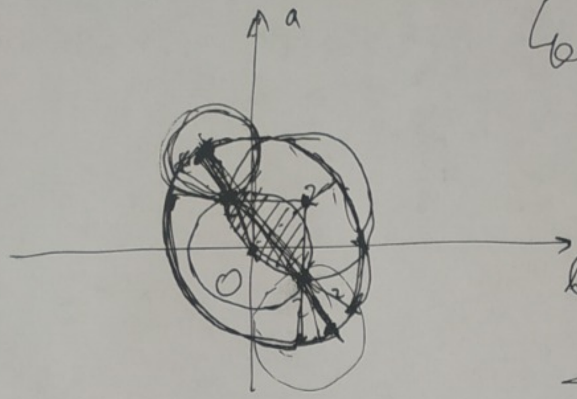
R' − +

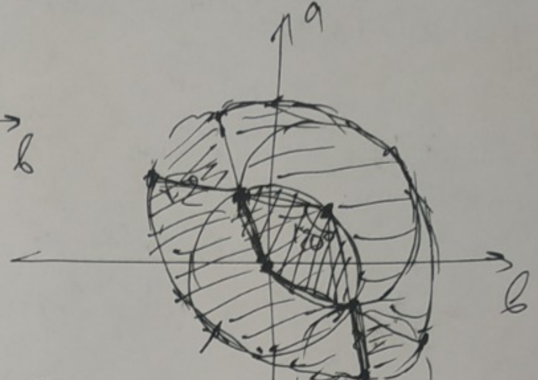
R ↘ $\sqrt{2}$ т. min

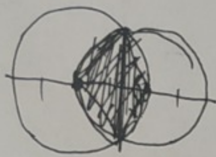
α^2 $\frac{2}{\sqrt5}$ α^1 $\frac{4}{\sqrt5}$ $\frac{4}{5}$

$a_7\cdot a_{11} = (a_6+d)(a_{12}+d) = a_6\cdot a_{12} + d(a_{12}+a_6) + d^2$

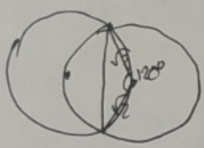
Черновик.







$$S = \cancel{(2\sqrt{2})^2\pi \cdot \frac{1}{3}} = \frac{8\pi}{3}$$



$$\cancel{\frac{8\pi}{3} + \frac{8\pi}{3}} - S_1$$

$$\frac{1}{3} \cdot \left(-\pi \cdot (\sqrt{2})^2 + \pi \cdot (2\sqrt{2})^2\right) \cdot 2 +$$

$$+ S_{сект.} + \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \pi(\sqrt{2})^2 = S.$$

$$\left(\frac{\pi(\sqrt{2})^2}{3} - \frac{\sin 120° \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2}\right) \cdot 2 =$$

$$= \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) 2 = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = S_{сект}.$$

$$S = \frac{1}{3}(-2\pi + 8\pi) \cdot 2 + \frac{2}{3}\pi \cdot 2 + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} =$$

$$= 4\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 6\pi - \sqrt{3}$$

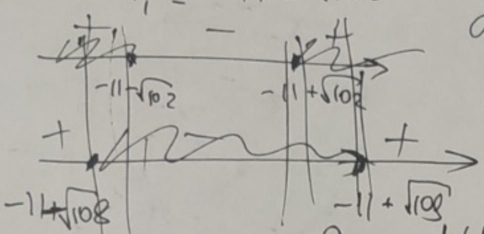
Черновик.

$a_1^2+22a_1+19>0$ $\quad 72 \not< 17+55$ $\quad a_1^2+32a_1+120-10a_1-90-17<0$

$\frac{D}{4}=121-19=102$ $\quad a_1=1$ $\quad a_1^2+22a_1+13=0$.

$a_1=-11\pm\sqrt{102}$ $\quad a_6=6$ $\quad \frac{D}{4}=121-13=108$

$a_7=7$ $\quad a_1=-11\pm\sqrt{108}$



$a_{11}=11$

$a_{12}=12$ $\quad -1<-11+\sqrt{108}<0$

$-1<-11+\sqrt{102}<0$

$56 \not< 72$ $\quad S=\frac{1+10}{2}\cdot 10=55$ $\quad -22\le -11-\sqrt{108}<-21$

$-22<-11-\sqrt{102}<-21$.

$d=1$. $\quad a_1^2+16a_1+55-1-10a_1-45>0$

$a_1^2+6a_1+9>0$

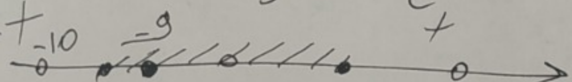
~~$a_1=-3$.~~ $\quad (a_1+3)^2>0$

$a_1\ne-3$ $\quad a_1\ne-3$ $\quad a_1^2+16a_1+60-17-10a_1-45<0$

$a_6=2$ $\quad a_1^2+6a_1-2<0$

$a_7=3$ $\quad S=\frac{-3+6}{2}\cdot 10=15$ $\quad \frac{D}{4}=9+2=11$

$a_{11}=7$ $\quad a_1=-6\pm\sqrt{11}$



$a_{12}=8$ $\quad \sqrt{11}$ $\quad -6 \not> -3$

$\sqrt{11}-6 \not< -3$

$16 \ne 16$. $\quad 3<\sqrt{11}<4$ $\quad -10<-6-\sqrt{11}<-9$ $\quad 3 \not< 6+\sqrt{11}$

$-3<-6+\sqrt{11}<-2$

Ответ: $a_1\in\{$~~$-9, -8, -7, -6, -5$~~$, -4\}$.

Нет, там d?;)))

$S=\frac{-7+2}{2}\cdot 10=-25$ $\quad a_1=-6$ $\quad -15+17>0$ ✓

~~$-6=a_1$~~ $\quad a_6=-1$

$S=\frac{-6\cdot 2+9}{2}\cdot 10=-15$ $\quad a_7=0$ $\quad -14<-5$ ✓

$a_{11}=4$ $\quad a_1=-7$?

$a_{12}=5$ $\quad a_6=-2$ $\quad$ ~~-3~~

$a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, d$ $\quad a_7=-1$ $\quad$ ПЖБ!

$S=$ $\quad a_{11}=3$

$-8>-24$ ✓ $\quad a_{12}=4$.

черновик.

$a_1 = 1$; $a_7 \cdot a_{11} \geq 77$.

$S = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$ $55 + 17 \nless 77$ ✓

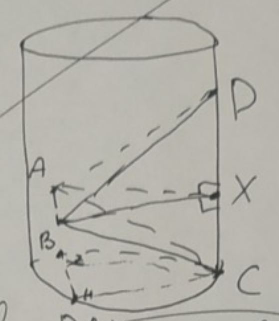
~~$55 + 22 = 77$~~ ...

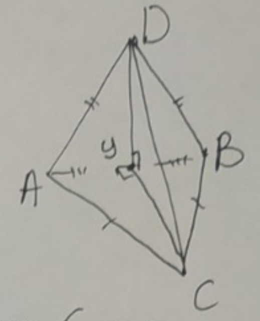
$\cancel{\frac{4\sqrt{5}}{5}} > 1$

$\cancel{4\sqrt{51}}$.

~~Чистовик. Лист 1~~.

№2. $AB = 2$
$AC = CB = 5$
$AD = DB = 6$.
$R \to \min$.
CD - ?





DY - высота в $\triangle DAB$. $\Rightarrow AY = YB$ ($\triangle DAB$ - р/б.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow CY$ - высота в $\triangle ABC$ ($\triangle BAC$ - р/б) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp DY \\ AB \perp YC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (DYC) \Rightarrow AB \perp DC \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Проведём хорду ~~в~~ основании цилиндра ~~так~~, что $ZC = HC$.
В силу симметрии: $\begin{cases} \angle BCH = \angle ZCA \\ BC = AC \\ HC = CZ \end{cases} \Rightarrow \triangle BCH = \triangle ACZ \Rightarrow$
$\Rightarrow BH =$

Черновик

Черновик

1. $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$ все числа целые. Черновик.

$a_6 a_{12} > S+1$

$a_7 a_{11} < S+17$

a_1 -? (возм. значения.)

$a_1 \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z}$

$S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 5(a_1 + a_1 + 9d) = 5(2a_1 + 9d)$ $d > 0$ (возр.)

$a_6 \cdot a_{12} = (a_1 + 5d)(a_1 + 11d) > S + 1$

$a_7 \cdot a_{11} = (a_1 + 6d)(a_1 + 10d) < S + 17$

$\begin{cases} a_1^2 + 16da_1 + 55d > S + 1 = 10a_1 + 45d + 1 \\ a_1^2 + 16da_1 + 60d < S + 17 = 10a_1 + 45d + 17 \end{cases}$

$S + 1 + 5d < a_1^2 + 16da_1 + 55d + 5d < S + 17$

$45 \times 3 = 135$ $29 \times 4 = 116$ $361 - 116 = 245$ $1 + 5d < 17$

$d < \frac{16}{5}$ $\boxed{d \le 3}$

$55 \times 3 = 165$ $361 - 29 = 332$ 19×19: $171 + 19 = 361$

$\cancel{a_1^2 + 16da_1 + 55d + 16 > a_1^2 + 16da_1 + 60d}$

$\left[\begin{array}{l} d = 3 \\ d = 2 \\ d = 1 \end{array}\right.$

$S = 10a_1 + 45d \le 10a_1 + 135$ $10a_1 \le$

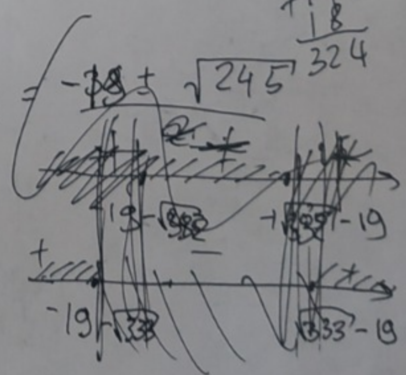
Если $d=3$:

$a_1^2 + 48a_1 + 165 > 10a_1 + 135 + 1$

$a_1^2 + 38a_1 + 29 > 0$

$\frac{D}{4} = 361 - \cancel{116}\ 29 = \cancel{245}$

$a_1 = -19 \pm \sqrt{245}$ $18 \times 18 = 324$



$a_1^2 + 48a_1 + 180 < 10a_1 + 135 + 17$

$a_1^2 + 38a_1 + 28 < 0$

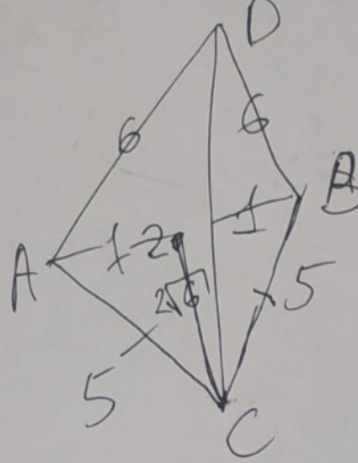
$\frac{D}{4} = 361 - \cancel{28} = 333$

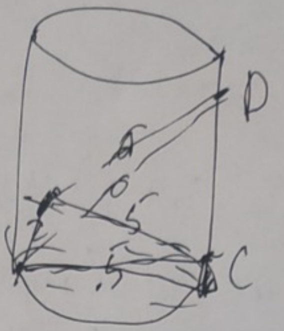
Если $d = 2$: $a_1^2 + 32a_1 + 110 - 1 - 10a_1 - 90 > 0$.

$-19 - \sqrt{333} < -19 - 19 < -19 - \sqrt{332} < -19 - 18$

×.

Черновик.





$R_{цил.} \to \min$

$CD - ?$

7. $S(M) - ?$

Есть решен. с a и b.

x и y такие, что есть реш. a и b

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b;\ 2)\end{cases}$$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$

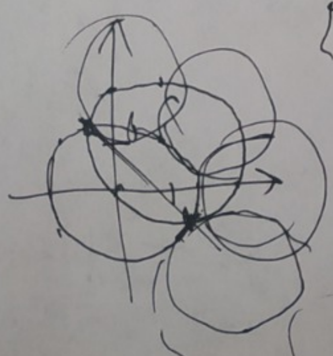
$a^2+b^2 \le 2 \quad a^2$

$(a-x)^2+(b-y)^2 \le 2$

$$\begin{cases}a^2+b^2 \le 2a+2b \\ a^2+b^2 \le 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2-2a+b^2-2b+2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le 2\end{cases}$$



$(a-1)^2+(b-1)^2=2$

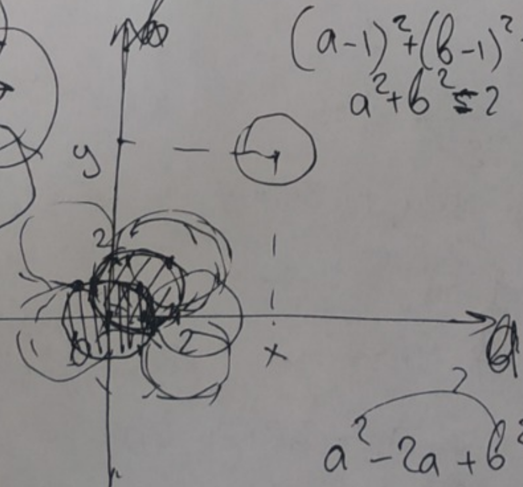
$a^2+b^2 \le 2$

$$\begin{cases}(a-1)^2 \le 2 \\ (b-1)^2 \le 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2-2a-1 \le 0 \\ b^2-2a-1 \le 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\sqrt{2} \le a-1 \le \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \le b-1 \le \sqrt{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}1-\sqrt{2} \le a \le 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \le b \le 1+\sqrt{2}\end{cases}$$



~~$a^2+b^2-2a-2b-2=0$~~

$a^2-2a+b^2-2b=0$

$2=2a+2b$

$a+b=1$

$a=1-b$

$\frac{D}{4}=1+2=3$

$(a-1)^2+a^2=2$

$2a^2-2a-1=0$

$a=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b=\frac{1\mp\sqrt{3}}{2}$

прод. №2. ~~Чистовик. Лист~~ 2. черновик.

$h=\sqrt{2}$; тогда $CD = \sqrt{25-2} + \sqrt{36-2} = \sqrt{23} + \sqrt{34}$

Или $CD = \sqrt{34} - \sqrt{23}$ (треуг. тупоугольный).

Проверим, что $\triangle CBD$ существует!

$CD > BD > BC$; $CD = \sqrt{23} + \sqrt{34} < 5 + 6 = \sqrt{25} + \sqrt{36}$ ✓

$CD < BC < BD$; $BD = 6 < 5 + \sqrt{34} - \sqrt{23}$

$\boxed{\sqrt{34} - \sqrt{23} \vee 1 \quad 10 > 2\sqrt{23}}$

Ответ: $CD = \sqrt{23} + \sqrt{34}$ или $CD = \sqrt{34} - \sqrt{23}$

№1. $S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 5(a_1 + a_1 + 9d) = 10a_1 + 45d$.

$a_6 \cdot a_{12} = (a_1 + 5d)(a_1 + 11d) = a_1^2 + 16da_1 + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1$

$a_7 \cdot a_{11} \leq (a_1 + 6d)(a_1 + 10d) = a_1^2 + 16da_1 + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17$

$1 + 10a_1 + 45d + 5d^2 < a_1^2 + 16da_1 + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17$

$5d^2 < 16$

$d^2 < 3\frac{1}{5}$

$\boxed{d > 0. \quad d \in \mathbb{Z} \quad a_1 \in \mathbb{Z}}$

$\cancel{d^2 < 3 \ldots}$ $d \leq \sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

$\frac{4\sqrt{5}}{5} \not< 3$ $\quad 4\sqrt{5} \not< 15$ $\quad 16 \cdot 5 \not< 225$

$\frac{4\sqrt{5}}{5} \not< 2$ $\quad 2\sqrt{5} \not< 5$ $\quad 4 \cdot 5 < 25$

$\boxed{\frac{4\sqrt{5}}{5} > 1}$ $\quad 4\sqrt{5} > 5$ $\quad 16 \cdot 5 > 25$

$\Rightarrow 1 < \frac{4\sqrt{5}}{5} < 2$

$d \leq \frac{4\sqrt{5}}{5} < 2$

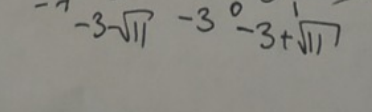
$\Downarrow$

$\boxed{d = 1}$.

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 45 + 17 \\ a_1^2 + 16a_1 + 55 \geq 10a_1 + 45 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0. \end{cases}$$

$\frac{D}{4} = 9 + 2 = 11 \Rightarrow$



Прод. №1. ~~Чистовик, Лист 3~~ Черновик.

$\sqrt{11} - 3 < 1$

$\sqrt{11} < 4$

$0 < \sqrt{11} - 3 < 1$

$-3 - \sqrt{11} < -6$

$6 < 3 + \sqrt{11}$

$3 < \sqrt{11}$

$-3 - \sqrt{11} > -7$

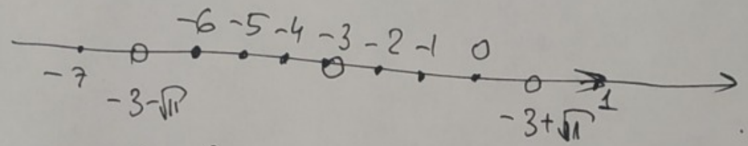
$7 > 3 + \sqrt{11}$

$4 > \sqrt{11}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad -7 < -3 - \sqrt{11} < -6. \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow$



Ответ: $a_1 \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100842**

ID профиля: **326169**

Вариант 17

№5. $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$.

$4x+1\neq 1$
$4x+1>0$
$\frac{x}{2}+2\neq 1$ $\frac{x}{2}+2>0$
$5x-1\neq 1$
$5x-1>0$
$a=b=c+1$.

1. $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$? x - ?

$a\cdot b\cdot c=\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=$

$=2\log_{\sqrt{5x-1}}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=$

черновик.

$=2\log_{\sqrt{5x-1}}(5x-1)=\underline{4}=abc$.

$(c+1)^2c=4$

$c^3+2c^2+c-4=0$.

$(c-1)(c^2+3c+4)=0$ $D=9-16<0$

$\cancel{(c-1)(c+1)(c+4)}$ $\boxed{c=1}$. $\Rightarrow$ $a=b=2$.

Если:

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=1$ $\times$.

$\sqrt{5x-1}=(4x+1)$ $=$ $\cancel{4x+1\left(\frac{x}{2}+2\right)}$

$4x+1=\frac{x}{2}+2$

$4x+1=\frac{x}{2}+2$

$\frac{7x}{2}=1$ $x=\frac{2}{7}$ $\sqrt{5\cdot\frac{2}{7}-1}=2\frac{1}{7}$

$\sqrt{\frac{3}{7}}=\frac{15}{7}$ $\times$.

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=1$.

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2$.

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=5x-1$

$4x+1=\frac{x^2}{4}+4+2x$

$5x-1=4x+1$

$\boxed{x=2}$

$x=2$: $\log_9 9=1$.

$\log_3 9=2$ $\log_3 9=2$ ✓

Чистовик. Лист. 6.

№4. $\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c)=6 \\ \text{НОК}(a,b,c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$ $\quad 6=2^1\cdot 3^1$

$a=2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}$
$b=2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}$
$c=2^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3}$

Из условия следует, что:
- больше простых делителей, кроме 2 и 3, нет
- $\left[\begin{cases}\alpha_1=1\\ \alpha_2=1\\ \alpha_3=1\end{cases}\right.$ $\left[\begin{cases}\alpha_1=15\\ \alpha_2=15\\ \alpha_3=15\end{cases}\right.$ и $\begin{cases}1\le\alpha_1\le15\\ 1\le\alpha_2\le15\\ 1\le\alpha_3\le15\end{cases}$ и $\left[\begin{cases}\beta_1=1\\ \beta_2=1\\ \beta_3=1\end{cases}\right.$ $\left[\begin{cases}\beta_1=16\\ \beta_2=16\\ \beta_3=16\end{cases}\right.$ $\begin{cases}1\le\beta_1\le16\\ 1\le\beta_2\le16\\ 1\le\beta_3\le16\end{cases}$

Кол-во способов расставить степени 2-ки:

$3!\cdot((15-2)\cdot1\cdot1)+6$

без повт.

повторения 1 и 15: $6=2\cdot C_3^2$.

Кол-во способов расставить степени 3-ки:

$3!\,(14\cdot1\cdot1)+6$

без повт. повт. 1 и 16: $6=2\cdot C_3^2$.

Всего способов расставить степени = кол-во троек в нат. числах:

$(6\cdot13+6)(6+6\cdot14)=36\cdot14\cdot15=7560$.

Ответ: 7560

Чистовик. Лист 5.

Пусть $\begin{cases} \log_{\cancel{4x+1}} \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 1 \\ \log_{\sqrt{5x-1}} (4x+1) = 2 \\ \log_{\frac{x}{2}+2} (5x-1) = 2. \end{cases}$

$\to 5x - 1 = 4x+1.$

$\Downarrow$

$x = 2.$

Проверка: $\begin{cases} \log_9 3^2 = 1. \checkmark \\ \log_3 9 = 2 \checkmark \\ \log_3 9 = 2 \checkmark \end{cases}$

$x = 2$ – удовл. условию.

Пусть $\begin{cases} \log_{\frac{x}{2}+2} (5x-1) = 1 \\ \log_{4x+1} \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2 \\ \log_{\sqrt{5x-1}} (4x+1) = 2. \end{cases}$

$5x - 1 = 4x+1$

$x = 2$;

Подставим: $\begin{cases} \log_3 9 \neq 1 \\ \log_9 9 \neq 2 \\ \log_3 9 = 2 \end{cases}$ – не уд. усл.

Ответ: $x = 2$.

№5.

$$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=a$$

$$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=b$$

$$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=c.$$

$$\begin{cases} 5x-1\neq 1 \\ 5x-1>0 \\ 4x+1\neq 1 \\ 4x+1>0 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x\neq \frac{2}{5} \\ x>\frac{1}{5} \\ x\neq 0 \\ x>-\frac{1}{4} \\ x>-4 \\ x\neq -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$a\cdot b\cdot c=\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=$$

$$=2\log_{\sqrt{5x-1}}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1)=2\cdot\log_{\sqrt{5x-1}}(5x-1)=$$

$$=4.$$

Пусть $a_1=b_1=d+1$. Тогда:

$$(d+1)^2 d=4$$

$$d^3+2d^2+d-4=0$$

	1	2	1	−4
1	1	3	4	0

$$(d-1)(d^2+3d+4)=0$$

$D<0$

$$d=1 \Rightarrow \begin{cases} a_1=2 \\ b_1=2 \\ d=1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=2 \end{cases} \\ \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases} \\ \begin{cases} a=2 \\ b=2 \\ c=1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассмотрим все случаи.

Пусть $\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=1 \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2 \end{cases}$

$$(4x+1)^2=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$$

$$4x+1=\frac{x}{2}+2 \quad (\text{по } \underset{>0}{\text{усл.}})$$

$$\frac{7x}{2}=1 \Rightarrow x=\frac{2}{7}.$$

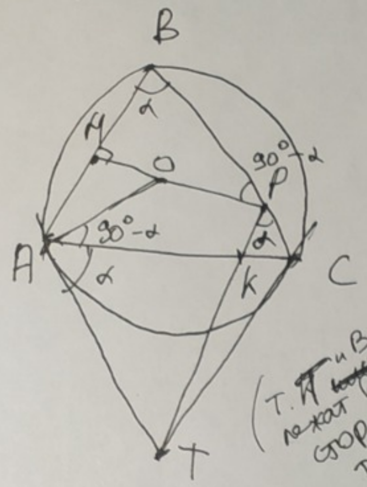
Подставим $\left(\frac{1}{7}+2\right)^2=\frac{10}{7}-1$

$$\frac{15^2}{7^2}\neq\frac{21}{7\cdot 7} \Rightarrow \text{не удовл. условию.}$$

21100842 (U326169 M1303579)

Чистовик. Лист 2.

№6б.



(т. ~~A~~ и B ~~лежат~~ лежат в разн. стор. от AC, т.к. $\angle\alpha < 90°$).

1. $\angle OAC = \angle OPB$ (O, P, C, A – ~~вписанны~~ лежат на одной окружности). $= 90° - \angle CAT = 90° - \angle ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BHP = 180° - \angle ABC - \angle HPB = 90°$. $\Rightarrow$ H – середина AB (O – центр. опис. окружности).

2. $tg\alpha = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{HP}{BH} = \frac{7x}{5x} \Rightarrow HP = 7x$; $BH = 5x$.

$BP = \sqrt{49x^2+25x^2} = \sqrt{74}x$.

$\frac{BP}{BC} = \frac{AK}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow BC = \frac{5}{3}\sqrt{74}x$.

$\frac{1}{1-\sin^2\alpha} = tg^2\alpha + 1 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{tg^2\alpha+1}}$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{tg^2\alpha+1}}$ (треуг. остроугольный).

$\sin\alpha = \frac{\frac{7}{5}}{\sqrt{\frac{49+25}{25}}} = \frac{7}{\sqrt{74}}$

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{74}}$.

3. $25 = \frac{AB \cdot BC}{2} \cdot \sin\alpha = \frac{10x}{2} \cdot \frac{5}{3}\sqrt{74} \cdot x \cdot \frac{7}{\sqrt{74}} = \frac{50x^2 \cdot 7}{6}$.

$x^2 = \frac{25 \cdot 6}{50 \cdot 7} = \frac{3}{7} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

4. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha = 100x^2 + \frac{25 \cdot 74x^2}{9} - 2 \cdot \frac{5}{3}\sqrt{74} \cdot x \cdot 10x \cdot \frac{5}{\sqrt{74}}$;

$AC^2 = \frac{x^2}{9}(900 + 1850 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 50) = \frac{x^2}{9}(900 + 350)$

Чистовик. Лист 3,

Прод. №6б.

$$AC^2 = \frac{x^2}{9}\cdot(1250)$$

$$AC = \frac{x}{3}\cdot 25\sqrt{2} = \sqrt{\frac{3}{7}}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot 25}{3} = \frac{\sqrt{2}\cdot 25}{\sqrt{21}};$$

$$AC = \frac{25\sqrt{42}}{21}$$

Ответ: №6б. $AC = \frac{25\sqrt{42}}{21}$.

черновик.

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=1$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2$

$\frac{x}{2}+2=5x-1$

$3=\frac{9x}{2}$ $\quad x=\frac{2}{3}\Rightarrow$

~~$\frac{x}{2}+2=5x-1$~~

~~$4x+1=\frac{x}{2}+2=5x-1.$~~

~~$\boxed{x=2}$~~ ???

~~log~~

$(\sqrt{5x-1})^2=4x+1$

$5x-1=4x+1$

$x=2$ X.

Ответ: $x=2$.

№4. $\text{Нод}(a,b,c)=2^1\cdot3^1$ кол-во троек a,b,c.

$\text{НОК}(a,b;c)=2^{15}\cdot3^{16}$

$a=2^{\alpha_1}\cdot3^{\beta_1}$

$b=2^{\alpha_2}\cdot3^{\beta_2}$

$c=2^{\alpha_3}\cdot3^{\beta_3}$.

$\text{Нод}(a,b,c)=2^1\cdot3^1\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~есть~~ $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\alpha_1=1\\ \alpha_2=1\\ \alpha_3=1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\beta_1=1\\ \beta_2=1\\ \beta_3=1\end{array}\right.\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\alpha_1=15\\ \alpha_2=15\\ \alpha_3=15\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\beta_1=16\\ \beta_2=16\\ \beta_3=16\end{array}\right.\end{array}\right.$.

Если одинаковые:

~~$a=a$~~ без огр. общности.

$a=2\cdot3^{\beta_1}$

$b=2^{15}\cdot3^{\beta_2}$

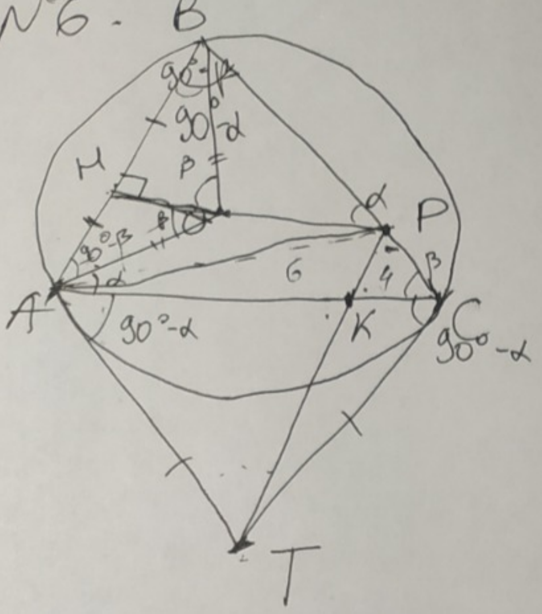
$c=2^{\alpha_3}\cdot3^{\beta_3}$.

Если разные, то $*6$.

$\left[\begin{array}{l}a=2\cdot3^{\beta_1}\\ a=2\cdot3^{16}\\ a=2\cdot3\end{array}\right.$

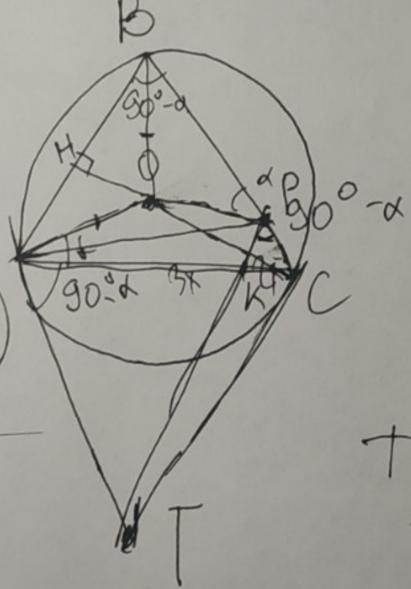
черновик.

№6.



S_{ABC} - ? => нужно найти $\frac{PC}{BC}$ или PC/BP

А лежат ли точк A, P, C, T на ω?



$AC = \frac{25\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{25\sqrt{2}}{\sqrt{21}} = \frac{25\sqrt{42}}{21}$

т. A, O, C, T ∈ ω.

⇓

T, A, O, P, C ∈ ω.

⇕

$\angle KPC = 90° - \alpha$ =>

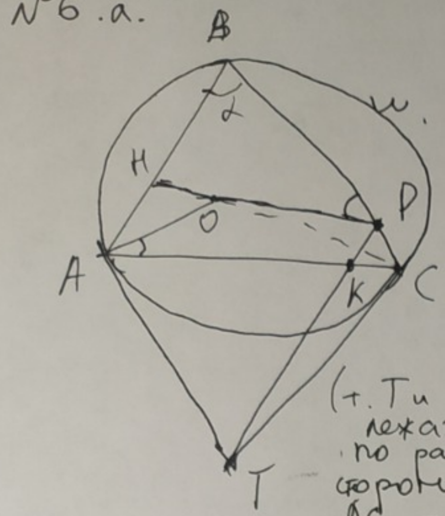
=> $\triangle KPC \sim \triangle ABC$.

$\frac{BC}{PC} = \frac{AC}{KC} = \frac{6+4}{4} = \frac{5}{2}$ =>

=> $S_{ABC} = \frac{25}{4} S_{PCK} = \frac{25}{4} \cdot 4 = 25.$

Чистовик. Лист 1.

№6.а.



Дано: $AT; CT$ – кас. к ω.

$A, O, P, C \in \nu$.

$S_{PCK} = 4$; $S_{APK} = 6$.

Найти: S_{ABC}.

Решение: 1. $\angle OAT = 90^\circ$;

$\angle OCT = 90^\circ$ (AT и CT – касательные).

Тогда $\angle OAT + \angle OCT = 180^\circ \Rightarrow$

(т. T и B лежат по разные стороны от AC, т.к. $\alpha < 90^\circ$) $\Rightarrow$ четырёхугольник $AOCT$ – вписанный.

Но $P \in \omega(AOC)$, а три точки, не лежащие на 1-й прямой, задают 1 окр. $\Rightarrow A, O, C, T, P \in \nu$.

$\Rightarrow A, P, C, T \in \nu \Rightarrow \angle CAT = \angle CPT$ (вписан., опирающиеся на одну дугу).

2. $\begin{cases} \angle CAT = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \angle ABC. \\ \angle CAT = \angle CPT \end{cases} \Rightarrow \angle ABC = \angle CPT$

$\Rightarrow \begin{cases} \angle ABC = \angle CPT \\ \angle ACB \text{ - общий} \end{cases} \Rightarrow \triangle KPC \sim \triangle ABC.$

3. $\dfrac{KC}{AC} = \dfrac{PC}{BC} = \dfrac{KP}{AB}$ ~~$= \dfrac{4}{A+B}$~~

$\dfrac{S_{PKC}}{S_{APK}} = \dfrac{h \cdot KC \cdot 2}{2 \cdot h \cdot AK} = \dfrac{KC}{AK}$;

$\dfrac{KC}{AC} = \dfrac{4}{6+4} = \dfrac{2}{5}. \Rightarrow \dfrac{S_{PKC}}{S_{ABC}} = \dfrac{4}{25} \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{25 \cdot S_{PKC}}{4} =$

$= \dfrac{25 \cdot 4}{4} = 25.$

Ответ: №6а: 25.

черновик.

$$\begin{cases} a = 2 \cdot 3^{\beta_1} \\ b = 2^{15} \cdot 3^{\beta_2} \\ c = 2^{\alpha_3}, 3^{\beta_3} \end{cases}$$

I сл. $a = 2 \cdot 3$
$b = 2^{15} \cdot 3^{16}$
$c = 2^{\alpha_3}, 3^{\beta_3}$.

Пусть $\alpha_3 < 15$
$1 < \beta_3 < 16$

Всего случ.:

$\frac{15 \cdot 16}{14 \cdot 15}$

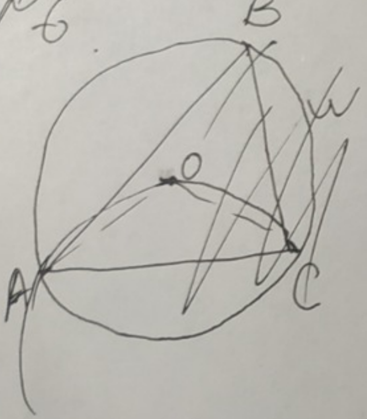
II сл. $a = 2 \cdot 3$
$b = 2^{15} \cdot 3^{\beta_3}$
$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{16}$

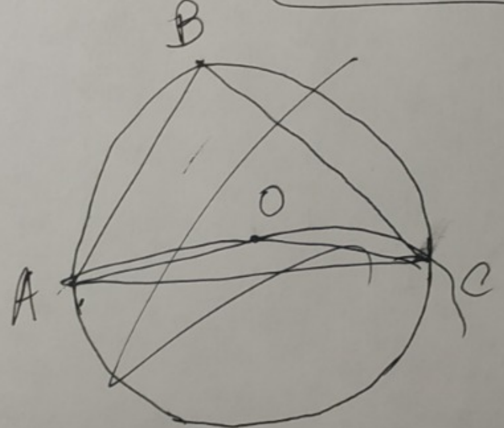
$15 \cdot 16$ случаев
$14 \cdot 15$

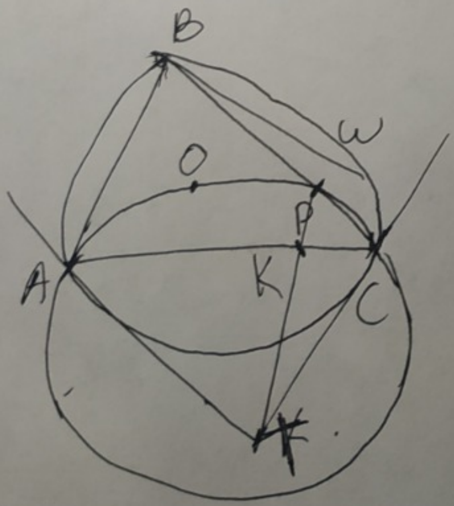
III сл. $a = 2 \cdot 3^{16}$
$b = 2^{15}$

$a = 2 \cdot 3^{\beta_1}$
$b = 2^{15} \cdot 3^{\beta_2}$
$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3}$

№6







$S_{APK} = 6$
$S_{CPK} = 4$ $\Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{3}{2}$.

$S_{ABC} - ?$

$15 \times 6 = 90$

$84 \times 90 = 7560$

$14 \times 6 = 84$

$15 \times 14 = 60 + 15 = 210$

$230 \times 36 = 1380 + 69 = 8280$

$36 \times 210 = 360 + 72 = 7560$

черновик.

$\cancel{tg^2\beta}$ $\quad \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}+1=\frac{1}{1-\sin^2\beta}$

5. $\angle ABC = arctg\frac{7}{5}$; AC - ?

$\cancel{\cos\beta=\frac{5}{\sqrt{74}}}$ $\quad tg\beta=\frac{7}{5}$ $\quad =90^\circ-\alpha=\beta$

$\frac{25}{74}=1-\sin^2\beta$

$\sin^2\beta=\frac{49}{74}$

$\sin\beta=\frac{7}{\sqrt{74}}$

$\sin\beta=\frac{7}{\sqrt{74}}$ $\quad \frac{PH}{HB}=\frac{7}{5}$ $\quad PH=7x$

$HB=5x \Rightarrow BP=\sqrt{49x^2-25x^2}=\sqrt{24}x=2\sqrt{6}x.$

$AB=10x.$

$10x\cdot BC\cdot\sin(arctg\frac{7}{5})=50$

$BC\cdot x\cdot\sin(arctg\frac{7}{5})=5$

$PC=BC\cdot\frac{2}{5}$

$BC=BP+PC.$

$PC=\frac{2}{5}BP+\frac{2}{5}PC$ $\quad \frac{3}{5}PC=\frac{2}{5}BP$

$PC=\frac{2}{3}BP=\frac{4\sqrt{6}}{3}x$

$BC=\frac{5}{3}\cdot2\sqrt{6}x=\frac{10\sqrt{6}}{3}x$

$74|2$
$-6\ |37$
14

$\frac{10\sqrt{6}}{3}\cdot x\cdot\cancel{10}x\cdot\sin(90^\circ-\alpha)=5\cancel{0}$

$\cancel{\sqrt{6} \qquad =15}$

$x^2\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\sin(90^\circ-\alpha)=1$

$\cancel{\sin(90^\circ-\alpha)}$ $\quad x^2=\frac{3\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sin(90^\circ-\alpha)}=$

$=\frac{3\cdot\sqrt{6}}{2\cdot 6}\cdot\frac{1}{\sin(arctg\frac{7}{5})}=\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{1}{\sin(arctg\frac{7}{5})}$

$=\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{74}}{4\cdot7}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{37}}{14}.$

21100842 (U326169 M1303579)

черновик:

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1}$
$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2}$
$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3}$

$\alpha_1 = 1$
$\alpha_1 = 2 \ldots 14$
$\alpha_1 = 15$

Всех сл. $\cdot 6$

$\alpha_1 = 2 \ldots 14$

$\cancel{(15 \cdot 2 \cdot 1) = 30}$

$27 \cdot 6 = 162$

$\cancel{6 \cdot (13 \cdot 2 \cdot 1) + 6 = 6 \cdot 26 + 6 = 32}$

1	1	15
1	15	1
15	1	1
1	15	15
15	1	15
15	15	1

$6 \cdot (13 \cdot 2 \cdot 1) + 6 = 6 \cdot 26 + 6 = 162$

без повт. степеней

для степеней α

$6(14 \cdot 2 \cdot 1) +$

$14 \cdot 6 = 84$

$84 \cdot 90 = 7560$

$6(13 \cdot 1 \cdot 1) + 6 = 14 \cdot 6 = 84.$

$74 \cdot 25$: $370 + 148 = 1850$

без повт. степеней

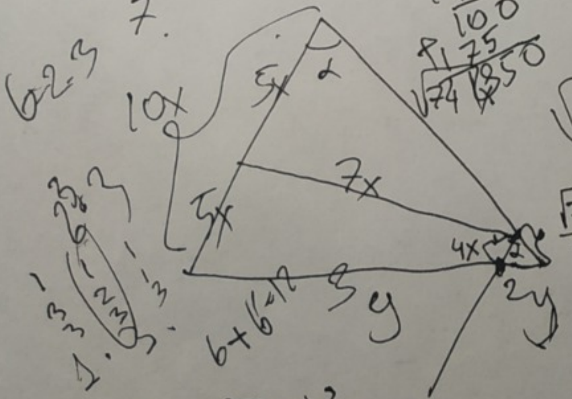
с повторами:

$6(14 \cdot 1 \cdot 1) + 6 = 6 \cdot 15 = 30 \cdot 3 = 90.$

$900 + 350 + 250$

$90 \cdot 84 = \boxed{7560}$

7.



$74 \cdot 25 = 1850$

$tg\,\alpha = \frac{7}{5}$

$\sqrt{25+49} = \sqrt{74}$

$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{1-\sin^2\alpha}$

$1 - \sin^2\alpha = \frac{1}{tg^2+1}$

$1 - \frac{1}{tg^2+1} = \sin^2\alpha$

$\frac{tg\,\alpha}{\sqrt{tg^2\alpha+1}} = \sin\alpha$

$\frac{\sqrt{74}}{3} \cdot 2x$ $\quad 4 = \frac{\sqrt{74}}{3} \cdot 2 \cdot 4x^2 \cdot \frac{\sin\alpha}{2}$

$4 = \frac{\sqrt{74}}{3} \cdot 4x^2 \cdot \frac{7}{\sqrt{74}}$

$250 \cdot 6 = 1500$

$\frac{7}{5\sqrt{\frac{49+25}{25}}} = \frac{7}{\sqrt{74}}$

$10x^2 + \left(\frac{\sqrt{74}}{3} \cdot 5\right)^2 x^2 - 2x^2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{74}}{3} \cdot 5 \cdot \frac{5}{\sqrt{74}} = AC^2$ $\quad x^2 = \frac{3}{7}$ $\quad x = \sqrt{\frac{3}{7}}$

$AC^2 = x^2\left(\frac{900}{9} + \frac{74 \cdot 25}{9} - \frac{500 \cdot 3}{3 \cdot 3}\right) = x^2 \frac{(900 + 1850 - 1500)}{9} =$ $\quad \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{74}}$

$= \frac{x^2}{9}(1250) = \frac{x^2}{9} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \Rightarrow AC = \frac{25x}{3}\sqrt{2}$

черновик

$$(14 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 + 6)(13 \cdot 6 + 6) = 36 \cdot 14 \cdot 15$$

$$\begin{array}{r|l} 7560 & 36 \\ \cline{2-2} -72 & 210 \\ \overline{\ \ 36} & \\ -36 & \\ \overline{\ \ \ 00} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 210 & 14 \\ \cline{2-2} -14 & 15 \\ \overline{\ \ 70} & \\ -70 & \end{array}$$