Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100749**

ID профиля: **236821**

Вариант 17

Черновик

$$\begin{cases} a_6 a_{12} > S+1 \\ a_7 a_{11} < S+17 \end{cases}$$

$a_1, a_2 \dots a_{10}$

$S = \frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot 10 = 5(2a_1+9d) = 10a_1+45d$

$$\begin{cases} a_6 a_{12} > S+1 \\ S+17 > a_7 a_{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+11d) > S+1 = 10a_1+45d+1 \\ (a_1+6d)(a_1+10d) < S+17 = 10a_1+45d+17 \end{cases}$$

$a_6 a_{12} + 16 > a_7 a_{11}$

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1d+55d^2 > 10a_1+45d+1 \\ a_1^2+16da_1+60d^2 < 10a_1+45d+17 \end{cases}$$

$a_1^2+16a_1d+55d^2+16 > a_1^2+16a_1d+60d^2$

$16 > 5d^2$

$d^2 < \frac{16}{5}$

$d < \frac{4}{\sqrt5}$

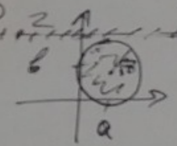
$d < 2$

$d=1$

$\cancel{a_1^2+a_1(8d-5)-45d-1+55d^2=b}$

$d \in N$

$r=\sqrt2$ $\pi r^2 = 2\pi$



$\frac{2}{\sin\alpha} = 2r$

$r = \frac{1}{\sin\alpha}$

$r \to \min$

$\sin\alpha \to \max$

$\sin\alpha = 1$

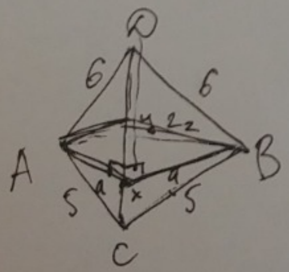
$\alpha = \frac{\pi}{2}$

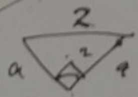
$a^2+b^2 \le 2$

$a^2+b^2 \le 2a+2b$

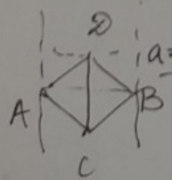
$2a+2b > 2$

$a+b > 1$





$a=\sqrt2$



$CD = \sqrt{36-a^2}+\sqrt{25-a^2}$

$$\begin{cases} y = \sqrt{36-a^2} \\ x = \sqrt{25-a^2} \end{cases}$$

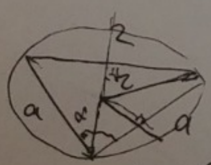
$x+y \to$?

$$\begin{cases} a^2 = 36-y^2 \\ a^2 = 25-x^2 \end{cases}$$

$r = \frac{a^2}{2\sqrt{(a^2-1)}}$

$\frac{2}{\sin\alpha} = 2r$

$r \to \min$



$4 = 2a^2 - 2a^2\cos\alpha$

$2 = a^2(1-\cos\alpha)$

$1-\cos\alpha = \frac{2}{a^2}$

$\cos\alpha = 1-\frac{2}{a^2} = \frac{a^2-2}{a^2}$

$\alpha \in (0;\pi)$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{a^4+4-4a^2}{a^4}} = \frac{\sqrt{4a^2-4}}{a^2} = \frac{2\sqrt{(a^2-1)}}{a^2}$

21100749 (U236821 M1303150)

Черновик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2 \longrightarrow \text{круг},\ C(a;b),\ R=\sqrt{2} \\ a^2+b^2\le \min(2a+2b,2).\end{cases}$$

$S=\pi R^2=2\pi$

если $\min(2(a+b),2)=2$

$2(a+b)\ge 2$

$\min(2a+2b;2)$ $2(a+b)<2$

$a+b<1$ $(a>0$ $b>0)$

$a<1$
$b<1$ $\Rightarrow a^2<a$
$b^2<b \Rightarrow a^2+b^2<a+b \Rightarrow a^2+b^2<2(a+b)$

если / сущ.
$a,b: a^2+b^2\le\min(2a+2b,2)$

a_1 a_{10}
$0\dots 9.$
$S=9\cdot5=45$

$a_6\cdot a_{12}=5\cdot 11=55>46$

$a_7\cdot a_{11}=6\cdot10=60$ $\underline{<62}$

$1\dots10$ $S=\frac{11\cdot10}{2}=55$

$a_6\cdot a_{12}=6\cdot12=72>56$

$a_7\cdot a_{11}=77<72$

a_1
$-6\dots 3$

$S=\frac{(-6+3)\cdot10}{2}=-15.$ $-3\dots 6.$

$a_6 a_{12}=-1\cdot5=-5>-14$

$a_7\cdot a_{11}=0\cdot4=\underline{0<2}$

$S=\frac{(6-3)\cdot10}{2}=15$

$a_6\cdot a_{12}=2\cdot8=16>16$

$a_7\cdot a_{11}=3\cdot7=\underline{21<32}$

$-7\dots 2$

$S=-5\cdot5=-25$

$a_6\cdot a_{12}=-2\cdot4=-8>-24$

$\cancel{-1\cdot3=-3}\ \cancel{<-8}$

21100749 (U236821 M1303150)

Чистовик

№1. Т.к. $a_i \in Z$, то $a_1 \in Z$, $d \in Z$

1) Пусть разн. ар. прог. равна d $\begin{pmatrix} d>0 \\ d \in Z \end{pmatrix} \Rightarrow d \in N$, $a_1 \in Z$ $a_1 - ?$

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 5 \cdot (2a_1 + 9d) = 10a_1 + 45d$

2) По усл: $\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S+1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S+17 \end{cases}$

$a_6 \cdot a_{12} = (a_1+5d)(a_1+11d) = a_1^2 + 55d^2 + 16a_1 d$

$a_7 \cdot a_{11} = (a_1+6d)(a_1+10d) = a_1^2 + 60d^2 + 16d a_1$

$+ \begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S+1 \\ S+17 > a_7 \cdot a_{11} \end{cases}$

$S + 17 + a_6 \cdot a_{12} > a_7 \cdot a_{11} + S + 1$

$16 + a_6 \cdot a_{12} > a_7 \cdot a_{11}$

$16 + a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 > a_1^2 + 60d^2 + 16d a_1$

$16 > 5d^2$

$d^2 < \frac{16}{5}$

$d^2 < 3{,}2$

т.к. $d \in N$, то $\boxed{d = 1}$

3) $\begin{cases} a_1^2 + 55 + 16a_1 > 10a_1 + 45 + 1 \\ a_1^2 + 60 + 16a_1 < 10a_1 + 45 + 17 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 & (1) \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 & (2) \end{cases}$

~~$(a_1+3)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -3$~~
~~$a_1 = -3 \pm \sqrt{9+2}$~~
~~$a_1 \neq -3$~~
~~a~~

(1): $(a_1+3)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -3$

(2): $a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 - 11 < 0$

$(a_1+3)^2 - \sqrt{11}^2 < 0$

$(a_1 + 3 - \sqrt{11})(a_1 + 3 + \sqrt{11}) < 0$

$a_1 \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11})$.

4) $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Rightarrow$ ~~$a_1 \in (-3-\sqrt{11})$~~

$a_1 \in (-3-\sqrt{11}; -3) \cup (-3; -3+\sqrt{11})$

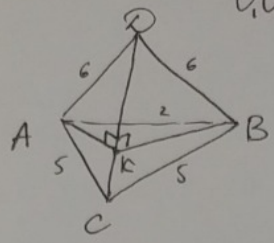
$a_1 \in Z \Rightarrow a_1 \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$.

Ответ: $\{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

1

№2. $AB=2$
$AC=CB=5$
$AD=DB=6$
$r=\min$

$CD-?$



O_1O_2 - ось цил.

$AK \perp CD$

1) Т.к $\triangle ACD = \triangle BCD$, то если AK - выс $\triangle ACD$, то BK - выс $\triangle BCD$ ($BK \perp CD$).
$\begin{pmatrix} AD=BD \\ AC=BC \\ CD-\text{общ} \end{pmatrix}$
$\Rightarrow AK=BK=a$.

2) Рассм. (ABK): $\left.\begin{matrix} AK \perp CD \\ BK \perp CD \end{matrix}\right| \Rightarrow (ABK) \perp CD$

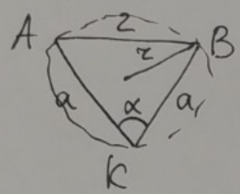
т.к. $CD \parallel O_1O_2$, то $(ABK) \perp O_1O_2$.

$\Downarrow$

радиус окр, опис. около $\triangle ABK$, равен радиусу r цил., опис около ABCD.

Чистовик

3)



по Th.sin: $\frac{AB}{\sin\alpha}=2r$

$\frac{2}{\sin\alpha}=2r$

$r=\frac{1}{\sin\alpha}$

$r \to \min \Rightarrow \sin\alpha \to \max$

$\Downarrow$

$\sin\alpha=1 \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}=90°$

$\Downarrow$

По Th. Пифагора:

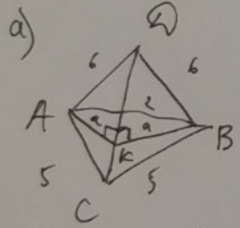
$a^2+a^2=2^2$

$a^2=2$

$\boxed{a=\sqrt{2}}$

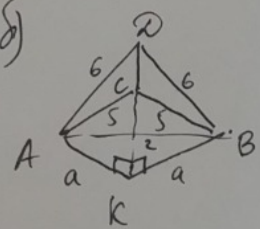
4) Возможны 2 варианта:

а)



$CD=DK+CK=\sqrt{6^2-a^2}+\sqrt{5^2-a^2}=$
$=\sqrt{36-2}+\sqrt{25-2}=$
$=\sqrt{34}+\sqrt{23}$

б)



$CD=DK-CK=\sqrt{6^2-a^2}-\sqrt{5^2-a^2}=$
$=\sqrt{36-2}-\sqrt{25-2}=$
$=\sqrt{34}-\sqrt{23}$

Ответ: $\sqrt{34}+\sqrt{23}$ или $\sqrt{34}-\sqrt{23}$.

№3. Чистовик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2. \ (1)\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b,2). \ (2)\end{cases}$$

(1): ~~круг~~ ~~окр~~ круг с центром в (.) $C(a;b)$ и $R=\sqrt{2}$.

Ко площ равна $S=\pi R^2=2\pi$ и не завис. от a и b.

Этот круг сущ., если сущ. такие a и b, кот. удовл. (2).

(2): $a^2+b^2\le\min(2a+2b,2)$.

Пусть $\min(2a+2b,2)=2a+2b$, т.е. $2a+2b<2$

$a+b<1$ (*)

Пусть $\begin{cases}a>0\\ b>0\end{cases} \Rightarrow$ из (*) $\Rightarrow \begin{cases}a<1\\ b<1\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}a^2<a\\ b^2<b\end{matrix}$

$\begin{cases}a^2+b^2<a+b\\ a+b<2(a+b)\end{cases} \Rightarrow \underline{a^2+b^2<2a+2b}.$

При $\begin{cases}a\in(0;1)\\ b\in(0;1)\end{cases}$ усл. (2) ~~всег~~ выполняется и круг из (1) сущ. Это и есть искомая фигура М. Ее площ равна 2π.

Ответ: 2π.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100749**

ID профиля: **236821**

Вариант 17

Черновик

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c)=6=2\cdot 3 \\ \text{НОК}(a,b,c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

$a=2^{a_1}\cdot 3^{b_1}$

$b=2^{a_2}3^{b_2}$

$c=2^{a_3}\cdot 3^{b_3}$

~~min a_1, a_2~~

$\min(a_1,a_2,a_3)=1$

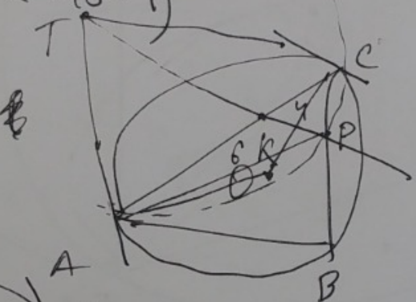
$\min(b_1,b_2,b_3)=1$

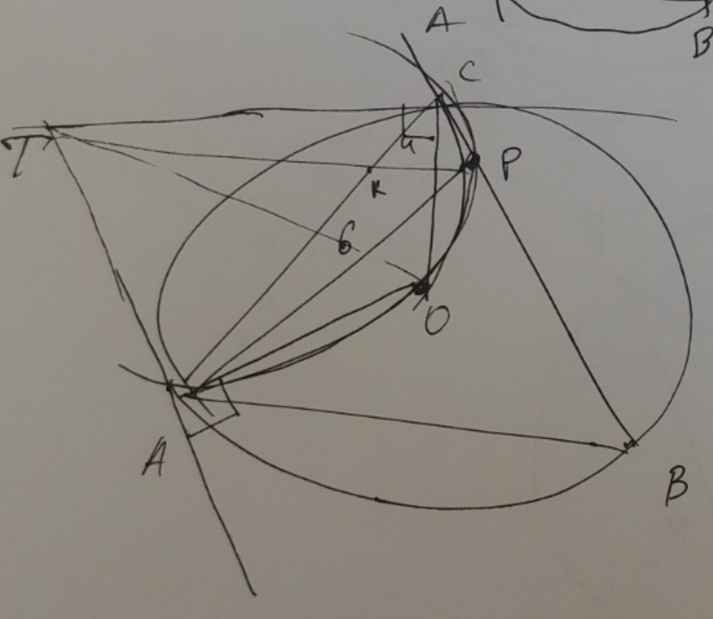
$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$1=2=3+1$





Черновик

$2\log_a b = \frac{2}{\log_b a}$

$2\log_b c =$

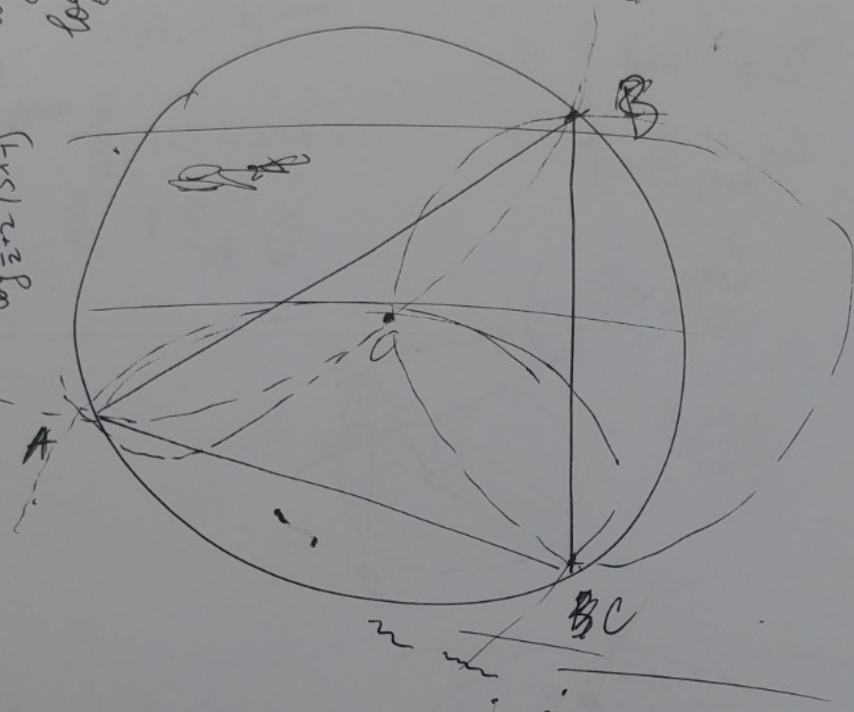
$\log_c a$

$\log_c a = \frac{1}{\log_a c} = \frac{\log_b a}{\log_b c} =$

$2\log_{5x-1}(4x+1)$

$2\log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2)$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$



$2\cdot 8$

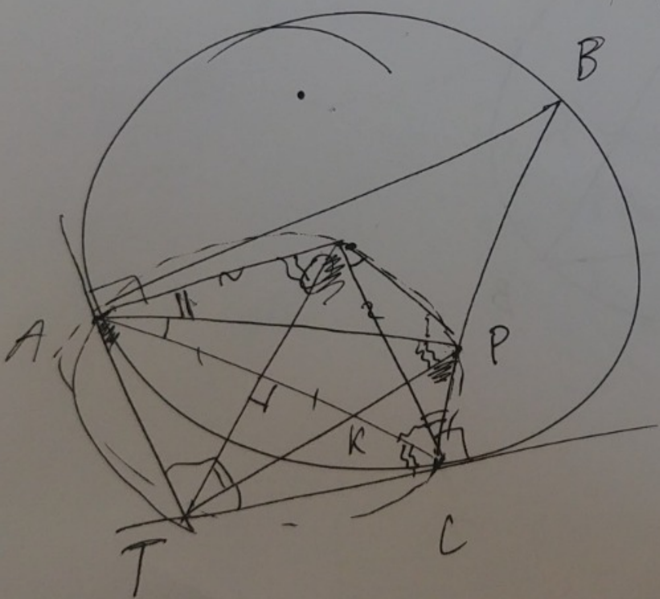
$4\cdot 4$

$1\cdot 16$

$k\cdot k(k-1)=24$

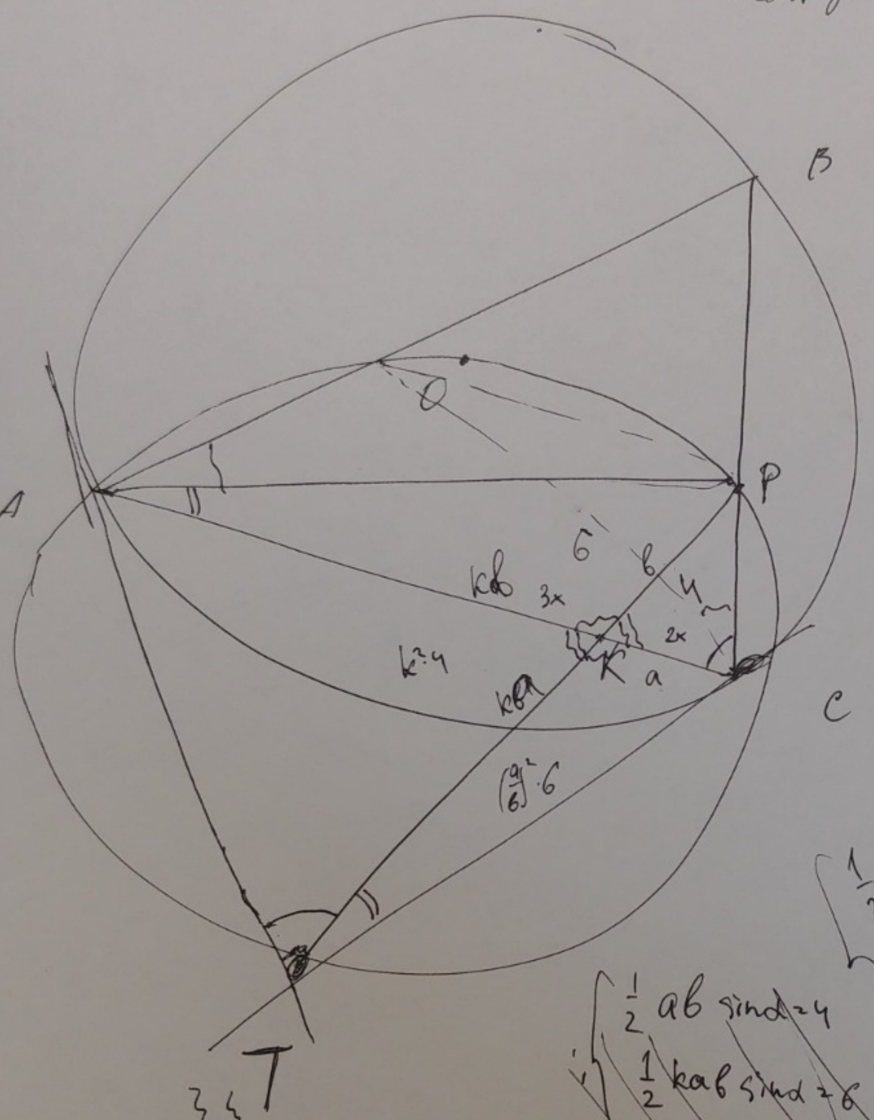
$k^2(k-1)=24$

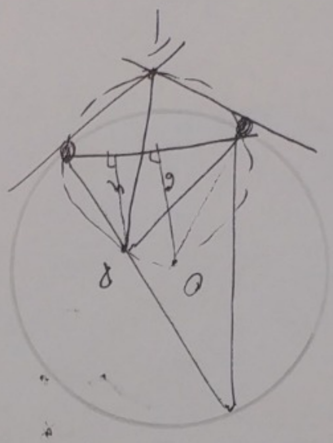
$k^3-k^2-24=0$



21100749 (U236821 M1303151)

Черновик





$$\begin{cases} \frac{1}{2} ab \sin\alpha = 4 \\ \frac{1}{2} kab \sin\alpha = 6 \end{cases}$$

$$k = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} ab \sin\alpha = 4 \\ \frac{1}{2} kb^2 \sin\alpha = 6 \end{cases}$$

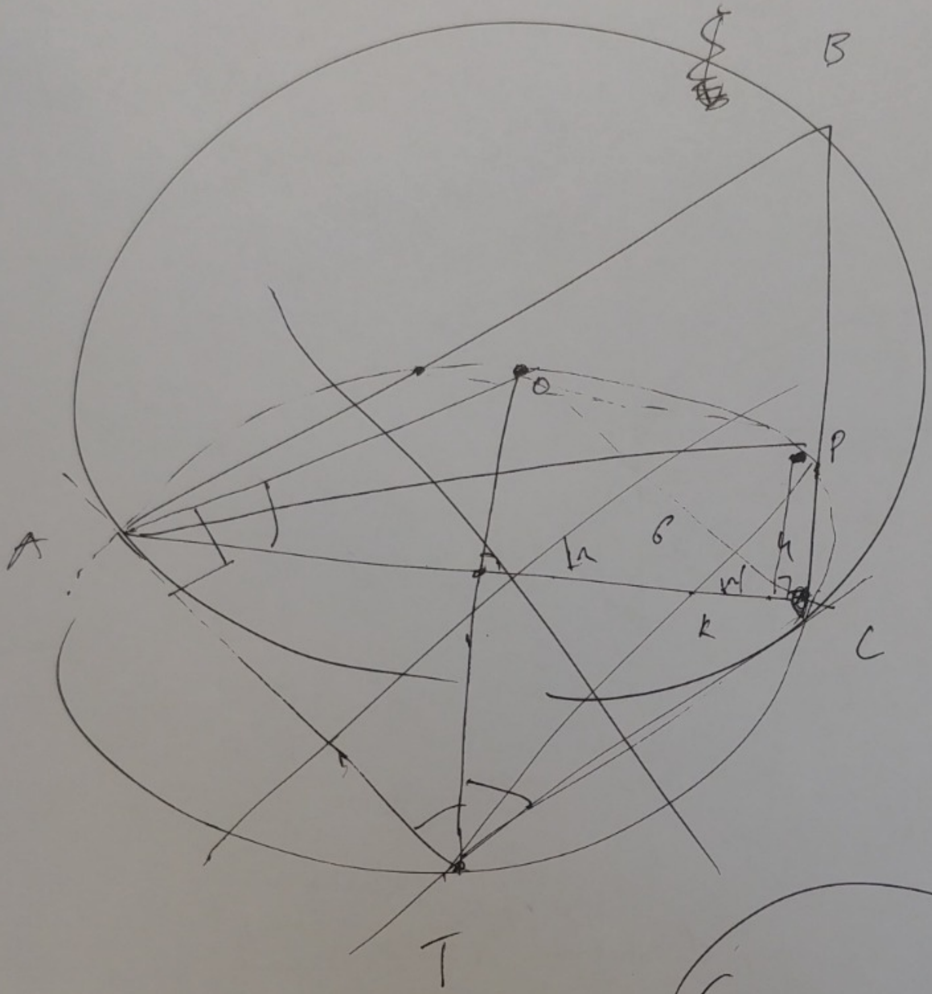
$$\frac{kb}{a} = \frac{3}{2}$$

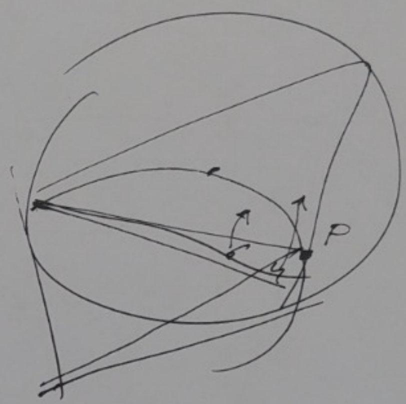
$$2kb = 3a$$

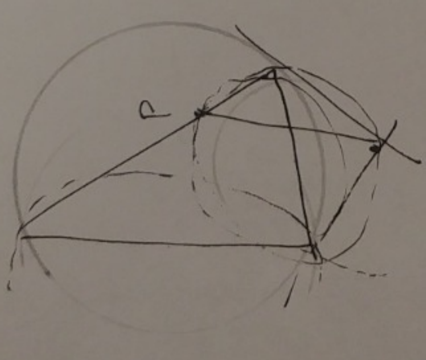
$$\frac{kb}{a} = \frac{3}{2}$$

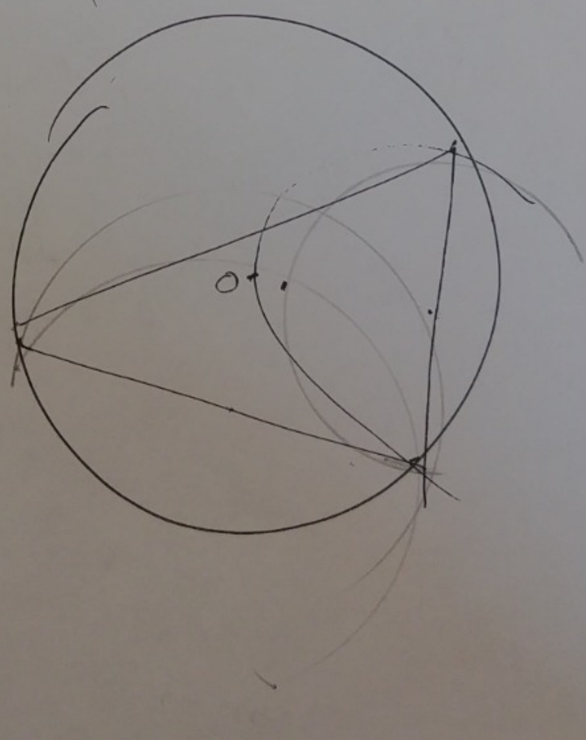
Черновик

Черновик









Чистовик

№5. $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=\alpha$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=\beta$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=\gamma$

$\frac{x}{2}+2>0$, $x>-4$; $\frac{x}{2}+2\neq 1$, $x\neq -2$; $4x+1>0$, $x>-\frac{1}{4}$; $4x+1\neq 1$, $x\neq 0$

$5x-1>0$, $x>\frac{1}{5}$; $5x-1\neq 1$, $x\neq\frac{2}{5}$

$x>\frac{1}{5}$, $x\neq\frac{2}{5}$.

~~Пусть~~ $\cancel{\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)+1}$

$5x-1=a$

$4x+1=b$

$\frac{x}{2}+2=c$

$\Rightarrow$ ~~числа~~ ~~преобраз~~

$2\log_a b=\alpha=\frac{2}{\log_b a}$

$2\log_b c=\beta$

$\log_c a=\gamma$

$$\log_c a=\frac{\log_b a}{\log_b c}=\frac{2\log_b a}{2\log_b c}=\frac{2\cdot\frac{2}{\alpha}}{\beta}=\frac{4}{\alpha\cdot\beta}$$

$\frac{4}{\alpha\cdot\beta}=\gamma$

$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=4$

Пусть ~~$\alpha=\beta=k$~~ два из этих чисел равны k, а ~~$\gamma=k-1$~~ третье $k-1$.

Тогда $k\cdot k\cdot(k-1)=4$

$k^3-k^2-4=0$

$k^3-2k^2+k^2-4=0$

$k^2(k-2)+(k-2)(k+2)=0$

$(k-2)(k^2+k+2)=0$

$k=2$. или $k^2+k+2=0$

$D=1-8=-7<0$

$\varnothing$.

1) Пусть $\gamma=k-1=1$

~~log~~ $\frac{x}{2}+2=5x+1$

$x+4=10x+2$

$9x=2$

$x=\frac{2}{9}$ Пр-ка: $\alpha=\log_{\sqrt{\frac{10}{9}-1}}\left(\frac{8}{9}+1\right)=\cancel{2}\log_{\frac{1}{3}}\frac{17}{9}\neq 2$

Не подх. $\cancel{\varnothing}$

21100749 (U236821 M1303151)

2) Пусть $\alpha = 1$: $\sqrt{5x-1} = 4x+1$ Чистовик

$5x-1 = 16x^2+1+8x$

$16x^2+3x+2=0$

$D = 9-4\cdot 16\cdot 2<0$

не подх. $\varnothing$

3). Пусть $\beta=1$.

$4x+1 = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$4x+1 = \frac{x^2}{4}+4+2x$

$\frac{x^2}{4}-2x+3=0$

$x^2-8x+12=0$

$x=4\pm\sqrt{16-12}=4\pm 2$

$x_1=2$ $x_2=6$.

Пр-ка: $x_1=2$:

$\alpha = \log_{\sqrt{10-1}}(8+1) = \log_3 9 = 2$

$\gamma = \log_{1+2}(10-1) = \log_3 9 = 2$

$x_1=2$ – подх.

$x_2=6$:

$\alpha = \log_{\sqrt{30-1}}(25) = \log_{\sqrt{29}} 25 \neq 2$.

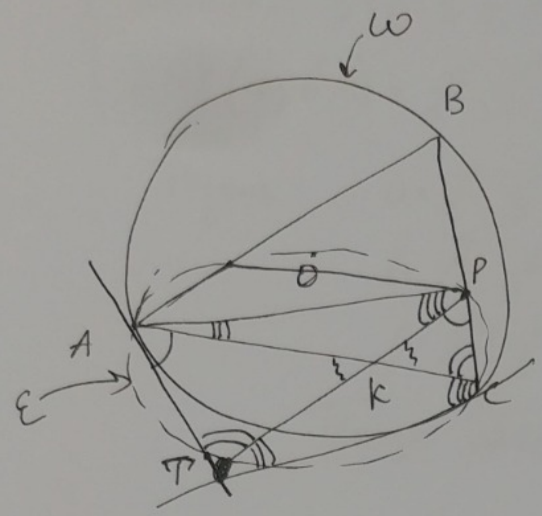
не подх.

Ответ: при $x=2$.

21100749 (U236821 M1303151)

№6. Чистовик

Точки A, O, P, C лежат на окр Σ.



$S_{APK}=6$

$S_{CPK}=4$

1) Рассм AOCT:

OA и OC - рад, провед в (·) кас

⇓

$\angle OAT=\angle OCT=90°$

$\angle OAT+\angle OCT=180°$

⇓

AOCT - впис четырёхуг.

⇓

$T\in\Sigma$

2) $\frac{S_{AKP}}{S_{CPK}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=\frac{AK}{KC}$

$AK=\frac{3}{2}KC.$

3)

Чистовик

№4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 6 = 2\cdot 3 & (1) \\ НОК(a;b;c) = 2^{15}\cdot 3^{16} & (2) \end{cases}$$

Пусть $a = 2^{a_1}\cdot 3^{b_1}$

$b = 2^{a_2}\cdot 3^{b_2}$

$c = 2^{a_3}\cdot 3^{b_3}$

Тогда ~~...~~ из $(1) \Rightarrow$ $\min(a_1;a_2;a_3) = 1$

$\min(b_1;b_2;b_3) = 1.$