Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100734**

ID профиля: **169546**

Вариант 17

Задача 1.

1) $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d + a_1 + 5d + $
$+ a_1 + 6d + a_1 + 7d + a_1 + 8d + a_1 + 9d = 10a_1 + 45d$

2) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

3) Подставлю полученное S в условие:

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S + 1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S + 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 + 5d)(a_1 + 11d) > S + 1 = 10a_1 + 45d + 1 & (1) \\ (a_1 + 6d)(a_1 + 10d) < S + 17 = 10a_1 + 45d + 17 & (2) \end{cases}$$

Раскрою скобки в (1) и (2) и приведу подобные:

$a_1^2 + 2a_1(8d - 5) + 55d^2 > 45d + 1$

$a_1^2 + 2a_1(8d - 5) + 60d^2 < 45d + 17$

Домножу (1) на -1 и сложу с (2)

$$+\begin{cases} -a_1^2 - 2a_1(8d - 5) - 55d^2 < -45d - 1 \\ a_1^2 + 2a(8d - 5) + 60d^2 < 45d + 17 \end{cases}$$

$5d^2 < 16$

$-\frac{4}{\sqrt{5}} < d < \frac{4}{\sqrt{5}}$

т.к. a_n – целые числа, то d тоже целое, т.е. прогрессия возрастает, а значит $d > 0$. Из полученного промежутка $d = 1$.

Тогда подставлю в (1) и (2).

(1) $a_1^2 + 6a_1 + 55 > 45 + 1$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$

$a_1 \neq -3$ (3)

(2) $a_1^2 + 6a_1 + 60 < 45 + 17$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$

$-\sqrt{11} - 3 < a_1 < \sqrt{11} - 3$ (4)

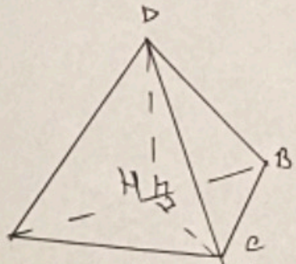
Получаем, что $a_1 = -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0$ из (4)

Но из (3) $a_1 \neq -3$

тогда: $a_1 = -6; -5; -4; -2; -1; 0$

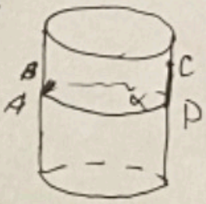
Ответ: a_1 может равняться $-6; -5; -4; -2; -1; 0$.

№3.

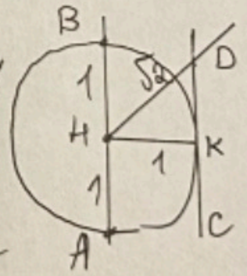


1) В р/б $\triangle ADB$ DH явл. высотой, медианой.
Аналогично в $\triangle ACB$ CH явл. медианой.
Тогда $AH = HB = \frac{1}{2}AB = 1$. Причём $AB \perp$ пл-ти (DHC), т.к. $AB \perp HC$
$AB \perp DH$

2) т.к. C и D лежат на бок. пов-ти цилиндра, а также CD ∥ оси цилиндра, то CD лежит на образующей пов-ти цилиндра. Т.к. $AB \perp (CDH)$, то $AB \perp CD$, т.е. AB ~~лежит~~ лежит в пл-ти $\perp$ оси цилиндра. Проведем сечение цилиндра пл-тью α. Это будет круг, параллельный основанию цилиндра, AB здесь хорда, т.к. $AB = 2$, то радиус основания цилиндра $r \geq \frac{AB}{2}$, т.е. хорда $\leq$ диаметру. Поэтому наименьший радиус возможный будет $r = 1$.

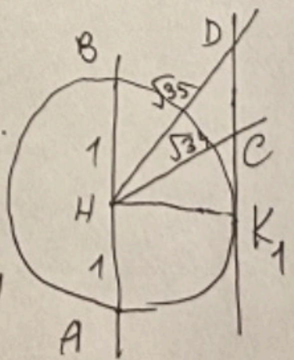


3) CD либо пересекает пл-ть α в т. K, либо не пересекает и C располагается ближе к D. У нас есть 2 случая.
В 1 случае (пересечение с пл-тью α): из $\triangle ADH$: $DH = \sqrt{36-1} = \sqrt{35}$. Тогда т.к. $HK = r = 1$ (из параллельности DC и AB) из прямоугольного треугольника $\triangle DHK$ $DK = \sqrt{\sqrt{35}^2 - 1} = \sqrt{34}$, также $KC = 5$ и тогда $DC = \sqrt{34} + \sqrt{23}$



Во втором случае D не может быть ближе к пл-ти α, т.к. $AD > AC$.

Во 2 случае (нет пересечения)
K_1 — точка пересечения прямой DC и пл-ти α.
Тогда из ~~△~~ $\triangle HCK_1$ получаем, что:
$\sqrt{24-1} = \sqrt{23}$ из $\triangle DHK_1$ $DK_1 = \sqrt{35-1} = \sqrt{34}$,
тогда $DC = \sqrt{34} - \sqrt{23}$



Ответ: $CD = \sqrt{34} + \sqrt{23}$ или
$CD = \sqrt{34} - \sqrt{23}$

Черновик

№1.

S - сумма первых 10 $\quad a_1 - ? \quad S = \frac{a_1 + a_{n-1}}{2} \cdot n$

$S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot n$

$a_6 a_{12} > S+1$

$a_7 a_{11} < S+17$

$(5a+d)(11a+d) > S+1$

$55a^2 + 5ad + 11ad + d^2 > S+1$

$55a^2 + 16ad + d^2 > S+1$

a

$a+d$

$a+2d$

$a+3d$

$S =$

$(a+5d)(a+11d) > S+1$

$a^2 + 11ad + 5ad + 55d^2 > S+1$

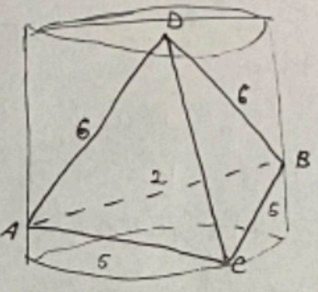
$\checkmark\ a^2 + 16ad + 55d^2 > S+1$

$(a+6d)(a+10d) < S+17$

$a^2 + 10ad + 6ad + 60d^2 < S+17$

$\checkmark\ a^2 + 16ad + 60d^2 < S+17$

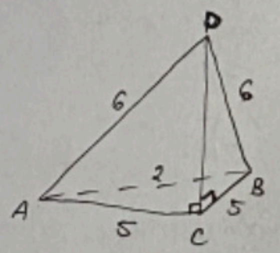
$S > a^2 + 16ad + 60d^2 - 17$



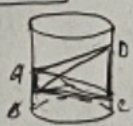
$S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot n =$

$= \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 =$

$= (a_1 + a_{10}) 5$



$\boxed{CD = \sqrt{36-25} = \sqrt{11}}$



R цилиндра наим. из полученных

CD - ?

$R_{цил} = \frac{S_{осн}}{h}$

$\pi R^2 = S_{осн.}$

pR pr

$23 \cdot 23 = 529$

$625 - 529 = 96$

$96 : 4 = 24$

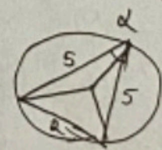
$24 : 4 = 6$

$a^2 + 16ad + 55d^2 > 5(a + a + 9d)$

$a^2 + 16ad + 55d^2 > 10a + 45d$

$a^2 - 10a > 45d - 55d^2 - 16ad$

$a^2 - 10a > \cancel{45d - 55d^2}\ d(45 - 55d - 16a)$



$4 - 50$

$4 = 25 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos\alpha$

$R_{опис} = \frac{a}{\sin\alpha} =$

$\cos\alpha = \frac{46}{2 \cdot 25} = \frac{23}{25}$

$\alpha = \arccos \frac{23}{25}$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\left(\frac{23}{25}\right)^2 + \sin^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha = 1 - \frac{529}{625} =$

$= \frac{96}{625}$

$CD =$

! $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} =$

$= a + a+d + a+2d + a+3d + a+4d + a+5d + a+6d + a+7d + a+8d + a+9d =$

$= \boxed{10a + 45d}$

$R_{опис} = \frac{2 \cdot 25}{\sqrt{96}} = \frac{2 \cdot 25}{2 \cdot \sqrt{24}} = \boxed{\frac{25}{2\sqrt{6}}}$

$(a+5d) \cdot (a+11d) > 10a + 45d + 1$

$(a+5d) \cdot (a+11d) > 10a + 45d + 1$

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} =$

$= n \cdot a_1$

$a^2 + 11ad + 5ad + 55d^2 > 10a + 45d + 1$

$55d^2 + a^2 + 16ad > 10a + 45d + 1$

$55d^2 + a^2 - 10a - 45d + a^2 - 1 > 0$

$55d^2 + 16ad - 10a - 45d + a^2 - 1$

$S = 10a + 45d$ Черновик $-3-\sqrt{11} <$

$a_6 \cdot a_{12} > S+1$

$a_7 \cdot a_{11} < S+17$

$(a+5d)\cdot(a+11d)$ $+55d^2 + 16ad - 10a - 45d + a^2 - 1 > 0$ V

$(a+6d)\cdot(a+10d) < S+17$ $(a+8d)^2 - 9d^2 - 10a - 45d - 1 > 0$

$a^2 + 10ad + 6ad + 60d^2 < 10a + 45d + 17$ $(a+8d)^2 > 9d + 10a + 45d + 1$

$a^2 + 16ad + 60d^2 - 10a - 45d - 17 < 0$ V a_9

$2a \; 8d \; 64d^2$ $\cancel{a_9 \gtrless \sqrt{9d+10a+45d+1}}$

$(a+8d)^2 - 4d^2 - 10a - 45d < 0$ $-\sqrt{9d+10a+45d+1} < a_9 < \sqrt{9d+10a+45d+1}$

$(a+8d)^2 < 4d^2 + 10a + 45d$

1) $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = n \cdot a_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}\cdot d = 10a_1 + \dfrac{10\cdot 9}{2}\cdot d = 10a_1 + 45d$

2) $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ V

~~Тогда из усл (1)~~ Подставлю полученное S в условие:

$$\begin{cases} (a_1+5d)\cdot(a+11d) > S+1 = 10a_1 + 45d + 1 \quad (1) \\ (a_1+6d)(a_1+10d) < S+17 = 10a_1 + 45d + 17 \quad (2) \end{cases}$$

$45+17=62$ $55-46=9$

Раскрою скобки в (1) и приведу подобные. Домножу (1) на -1 и сложу с (2)

$$\begin{cases} a_1^2 + 2a_1(8d-5) + 55d^2 > 45d + 1 \quad \Big| \cdot -1 \\ a_1^2 + 2a_1(8d-5) + 60d^2 < 45d + 17 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -a_1^2 - 2a_1(8d-5) - 55d^2 < -45d - 1 \\ a_1^2 + 2a_1(8d-5) + 60d^2 < 45d + 17 \end{cases}$$

$5d^2 < 16$ т.к. все a_n — целые числа, то d тоже целое, т.е. прогрессия возрастает, а значит $d > 0$.

$-\dfrac{4}{\sqrt5} < d < \dfrac{4}{\sqrt5}$ Тогда из полученного промежутка $d = 1$.

Тогда в (1) и (2)

(1) $a_1^2 + 6a_1 + 55 > 45 + 1$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$

$(a_1+3)^2 > 0$ $a_1 \neq -3$ (3)

(2) $a_1^2 + 6a_1 + 60 < 45 + 17$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$

$-3 - \sqrt{11} < a_1 < \sqrt{11} - 3$ (4)

Из (4) получаем, что $a_1 = -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0$

Из (3) $a_1 \neq -3$, тогда

Ответ: $a_1 = -6; -5; -4; -2; -1; 0$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100734**

ID профиля: **169546**

Вариант 17

Чистовик Математика, 11кл.

№4. Вариант 17

НОД$(a; b; c) = 6$

НОК$(a; b; c) = 2^{15}\cdot 3^{16}$.

$a = 2^{m_1}\cdot 3^{l_1}$, $b = 2^{m_2}\cdot 3^{l_2}$, $c = 2^{m_3}\cdot 3^{l_3}$

1) по усл. $m_i = 1$ и $l_i = 1$ (хотя бы в одном из чисел), иначе НОД $\neq 6$

2) Также хотя бы один из $l_i = 16$, иначе НОД$(a; b; c) \neq 2^{15}\cdot 3^{16}$

3) Теперь выберу одно из m_1, m_2, m_3 такое, что $m_i = 1$. У меня есть 3 способа, чтобы это сделать. Потом из оставшихся m_i выбираем $m_i = 15$ (осталось 2 способа). Остался m_i, который может принимать любое значение от 1 до 15.

Всего вариантов $= 15\cdot 2\cdot 3 = 90$

4) Аналогично можно выбрать $l_i = 1$, $l_i = 16$ и оставшиеся l_i, принимающие значения от 1 до 16.

Итого вариантов: $16\cdot 3\cdot 2 = 96$.

5) Каждый из способов выбрать l умножим на каждый из полученных способов m: $96\cdot 90 = 8640$.

6) Но в полученном значении могут оказаться и пересечения, т.е. такие тройки $(a; b; c)$, которые уже получались более 1 раза

7) Тройки $(a; b; c)$, в которых числа m (два) равны 1 и 15, а третье число m принадлежит промежутку от 2 до 14, но все три этих m равны либо 1, либо 16: 13 чисел. учтено 2 раза Тогда такую тройку можно выбрать способами: $\underbrace{(13\cdot 3\cdot 2)}_{m_i}\cdot \underbrace{3\cdot 2}_{l_i}$.

8) Тройки чисел $(a; b; c)$, в которых два числа l равны 1 и 16, а третье число $l \in [2; 15]$. Всего таких чисел 14. Все три числа l равны 1 или 15, это учтено по 2 раза. Тогда всего способов: $\underbrace{(3\cdot 2)}_{m_i}\cdot \underbrace{(3\cdot 2\cdot 14)}_{l_i}$

1

Чистовик Математика, 11 кл

9) Тройку чисел (a, b, c), в которых все m равны 1 или 15 или две равны 1, а одна 15 или наоборот и все l равны 1 или 16, или две равны 1, одна 16 или наоборот, можно ~~на~~выбрать $\underbrace{(3\cdot 2)}_{m_i} \cdot \underbrace{3\cdot 2}_{l_i}$ способами.

Каждая такая тройка при подстановке в 1) пункт будет учтена 4 раза

Значит, количество таких троек будет равно:

$96\cdot 90 - (3\cdot 2\cdot 13)\cdot(3\cdot 2) - (3\cdot 2)\cdot(3\cdot 2\cdot 14) - 3\cdot(3\cdot 2)\cdot(3\cdot 2) =$

$= 8640 - 468 - 504 - 108 = 7560$

Ответ: 7560.

Чистовик Математика, 11кл

№2.

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

1) ОДЗ: $\begin{cases} 5x-1>0 \\ 4x+1>0 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ 5x-1\neq1 \\ 4x+1\neq1 \\ \frac{x}{2}+2\neq1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{3} \end{array}$

2) Обозначу за V $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2\cdot\log_a b$, где $a=5x-1$, $b=4x+1$

за U $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2\log_b c$, где $c=\frac{x}{2}+2$

за W $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=\log_c a$

Замечу:

$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=\log_a c\cdot\log_c a=1$, т.е.

$V\cdot U\cdot W=2^2=4$ (I)

3) Если $V=U$, а $W=V-1$, то из (I)

$V^2(V-1)=4$

$V^3-V^2=4$

	1	−1	0	−4
2	1	1	2	0

$(V-2)(V^2+V+2)=0$

$D=1-8<0$ нет корней

Получаем, что только при $V=2$ есть решения

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2$

$2\log_{5x-1}4x+1=2$

$\log_{5x-1}4x+1=1$

$4x+1=5x-1$ $x=2$ Подходит по ОДЗ

4) Теперь рассмотрим $W=U$, $V=W$ и получим аналогично

$U=2$ или $W=2$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2$

$2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=2$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=1$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=\log_{\frac{x}{2}+2}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\frac{x}{2}+2=4x+1$

$x=\frac{2}{7}$

теперь проверим по ОДЗ:

$\frac{2}{7}$ $\quad$ $\frac{1}{5}$

$\frac{10}{35} > \frac{7}{35}$

значит, $x=\frac{2}{7}$ подходит по ОДЗ.

$5x-1=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$5x-1=\frac{x^2}{4}+2x+4$

$20x-4=x^2+8x+16$

$x^2-12x+20=0$

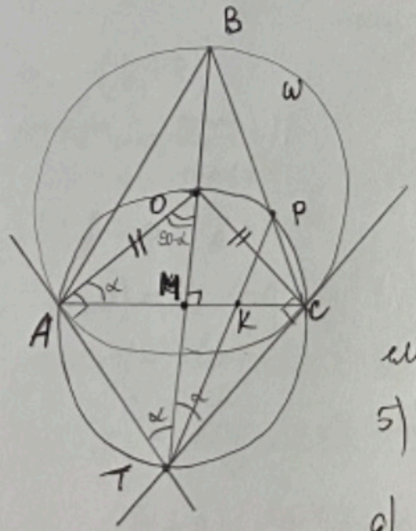
$D=144-4\cdot 20=64$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{12+8}{2}=10 \\ x=\frac{12-8}{2}=2 \end{array}\right.$$

оба корня подходят по ОДЗ

Ответ: $x=\frac{2}{7}$; 2; 10.

№6.



Решение:

1) $AT=TC$ (кас. из одной точки)

2) $OA=OC$ (как радиусы окр. ω)

3) т.к $AT=TC$, то равны и соотв. углы с прямой, проходящей через T и центр окр. O.

4) Пусть $\angle ATO=\alpha$. Соответственно ему равен угол OTC

5) $OA \perp AT$ (касательная и радиус)
$OC \perp TC$

6) В ΔATO и ΔTOC
$\angle AOT=\angle TOC=90-\alpha$ (т.к ΔAOC р/б)

7) Из р/б ΔAOC
$\angle OAC=\frac{180-(90-\alpha)-(90-\alpha)}{2}=\alpha$

8) т.к. $\angle TAO=\angle TAM+\angle MAO$, то
$\angle TAM=90-\alpha$

Тогда в ΔAMT
$\angle AMT=180-90+\alpha-\alpha=90^\circ \Rightarrow \Delta AMT$ - п/у

Аналогично ΔTMC - п/у,

тогда $TM \perp AC$

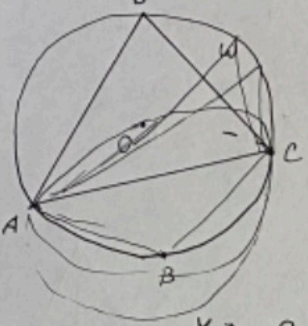
Черновик

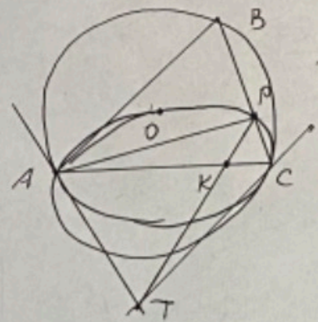
$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1),\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

№4. $\begin{cases} НОД(a, b, c) = 6 \\ НОК(a, b, c) = 2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$

НОД:





$\log_{\sqrt{5x-1}}$

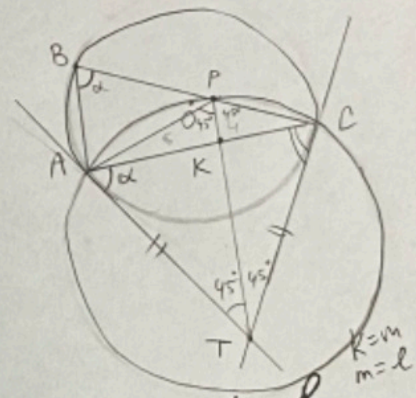
$S_{APC}=10$

$\frac{S_{APT}}{S_{PCT}} = \frac{6}{4} = 1{,}5$

$S_{ABC} = S_{APC} + S_{APB}$

$\angle ABC$ - ?

$S_{APK} = \frac{1}{2}\cdot AK\cdot$



$\frac{x}{2} > -2$

$x > -4$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) =$

$= \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

ОДЗ: $\sqrt{5x-1} > 0$, $\sqrt{5x-1} \neq 1$

$4x+1 > 0$, $4x+1 \neq 1$

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 > 0$, $\frac{x}{2}+2 \neq 1$

ОДЗ: $x > \frac{1}{5}$

$x \neq \frac{2}{3}$

$2\log_{5x-1}(4x+1) = 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$\log_{5x-1}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$\frac{1}{\log_{4x+1}(5x-1)} = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$1 = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\log_{4x+1}(5x-1)$

$4x+1 = \frac{x}{2}+2+5x-1$

$4x - \frac{x}{2} - 5x = 0$

1) по усл. $a = 2^{m_1}\cdot 3^{l_1}$,

$b = 2^{m_2}\cdot 3^{l_2}$

$c = 2^{m_3}\cdot 3^{l_3}$

$m_1 = 1$ тогда

$l_1 = 1$

Варианты

либо 16,

либо 1

либо от 1 до 15

$96\cdot 90 = 8640$

обозначу за U $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$ =

$= 2\log_a b$

нет всего $15\cdot 2\cdot 3 = 90$

для l — $16\cdot 2\cdot 3 = 96$.

пересечения

$V = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$W = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$V^2(V-1) = 4$

$V^3 - V^2 = 4$

$V = 2$ или

$V^2 + V + 2 = 0$

$x > \frac{1}{5}$ $x \neq \frac{1}{5}$

$x > -\frac{1}{4}$ $x \neq \frac{1}{4}$

$x > -4$

$2\log_{5x-1}(4x+1) = 2$

$\log_{5x-1} 4x+1 = 1$

$4x+1 = 5x-1$

$\underline{2 = x}$

$\frac{x}{2} \cdot 2 \cdot 2$

$-\begin{array}{r}144\\80\\ \hline 64\end{array}$

V=W Черновик

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2$

$(5x-1) = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$5x-1 = \frac{x^2}{4} + 2x + 4$

$20x-4 = x^2+8x+16$

$x^2-12x+20=0$

$D = 144-4\cdot 20 = 64$

$x = \frac{12+8}{2} = 10$

$x = \frac{12-8}{2} = 2$

$\frac{x}{2}+2 = 4x+1$

$x+4 = 8x+2$

$2 = 7x$ $\underline{x = \frac{2}{7}}$

$\frac{10}{35} > \frac{7}{35}$

$180 - \cancel{90} + \alpha - \cancel{90} + \alpha$

$\frac{2\alpha}{2}$