Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100680**

ID профиля: **876098**

Вариант 17

Чистовик 1

① $S_{10} = \frac{2a_1+9d}{2}\cdot 10 = 10a_1+45d$

$a_6 a_{12} > S+1$ $(a_1+5d)(a_1+11d) > 10a_1+45d+1$ $a_1^2+16a_1d+55d^2 > 10a_1+45d+1$	$a_7 a_{11} < S+17$ $(a_1+6d)(a_1+10d) > 10a_1+45d+17$ $a_1^2+16a_1d+60d^2 < 10a_1+45d+17$

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1d+60d^2 < 10a_1+45d+17 \\ a_1^2+16a_1d+55d^2 > 10a_1+45d+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1d+55d^2+5d^2 < 10a_1+45d+17 \\ a_1^2+16a_1d+55d^2 > 10a_1+45d+1 \end{cases}$$

т.к. $5d^2>0$, то

$$10a_1+45d+1 < a_1^2+16a_1d+55d^2+5d^2 < 10a_1+45d+17$$

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1d+60d^2 < 10a_1+45d+17 \\ -a_1^2-16a_1d-55d^2 < -10a_1-45d-1 \end{cases}$$

$5d^2 < 16$

$d^2 < \frac{16}{5} \Rightarrow -\frac{4}{\sqrt5} < d < \frac{4}{\sqrt5}$, $d \in N$ т.к. a_n – возрастающая арифм. прогрессия и $a_1, a_2, a_3 \ldots \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\boxed{d=1}$

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1+60 < 10a_1+62 \\ a_1^2+16a_1+55 > 10a_1+46 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+6a_1-2<0 \ (1) \\ a_1^2+6a_1+9>0 \ (2) \end{cases}$$

① $D = 36+8 = 44$

$a_1 = \frac{-6\pm2\sqrt{11}}{2} = -3\pm\sqrt{11}$

② $(a_1+3)^2>0$

$a_1 \neq -3$

$$\begin{cases} -3-\sqrt{11} < a_1 < -3+\sqrt{11} \\ a \neq -3 \end{cases}$$

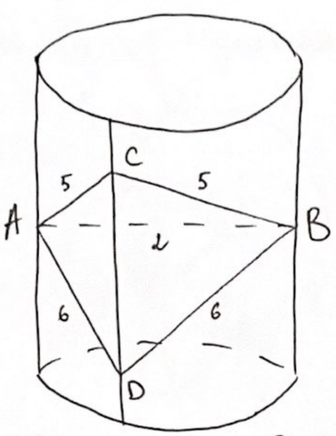
$a_1 \in (-3-\sqrt{11}; -3) \cup (-3; -3+\sqrt{11})$

т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$, то

$a_1 = 0; -1; -2; -4; -5; -6$

Чистовик 2

(2)

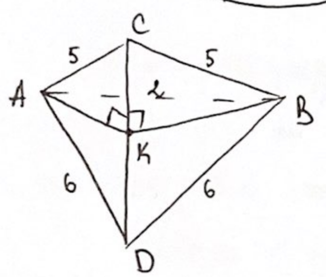


Радиус будет наименьшим при $AB \perp CD$

$AB = 2R$ т.к. $R = 1$

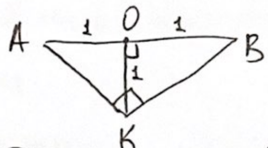
$CD < 11$

(нер-во $\triangle$)



(1) Проведём AK и BK – высоты в $\triangle ACD$ и $\triangle CBD$ соответственно

(2) $\triangle AKB$: вписан в окр. AB – диаметр $AO; OB; OK - 1$ радиусы



$AK = BK = \sqrt{2}$ по т. Пифагора.

(3) $\triangle CBK$: $CK = \sqrt{5^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{23}$

(4) $\triangle BKD$: $KD = \sqrt{6^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{34}$

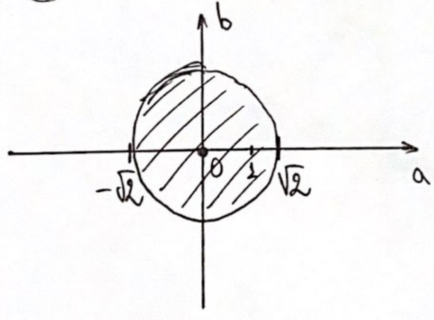
(5) $CD = CK + KD = \sqrt{23} + \sqrt{34} \cancel{<11}$ $\qquad \sqrt{23} + \sqrt{34} < 11$

(3) $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 2 & (1) \\ a^2 + b^2 \leq \min(2a+2b; 2) & (2) \end{cases}$

(1) Круг, $R = \sqrt{2}$, $O(a; b)$ – центр

$S_{(1)} = \pi R^2 = 2\pi = S$ фигуры M

(2) а) $a^2 + b^2 \leq 2$



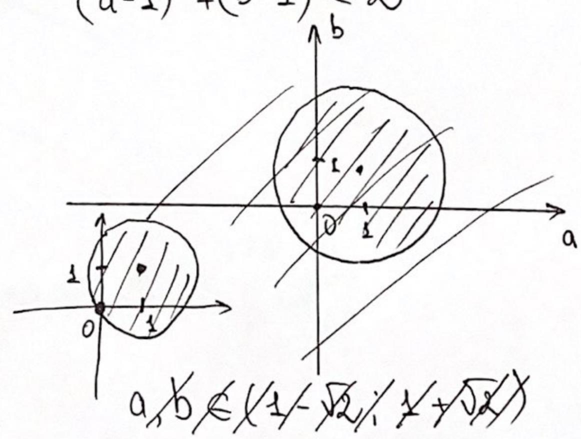
$a, b \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$

$(0;0)$ – центр

б) $a^2 + b^2 \leq 2a + 2b$

$(a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) \leq 2$

$(a-1)^2 + (b-1)^2 \leq 2$

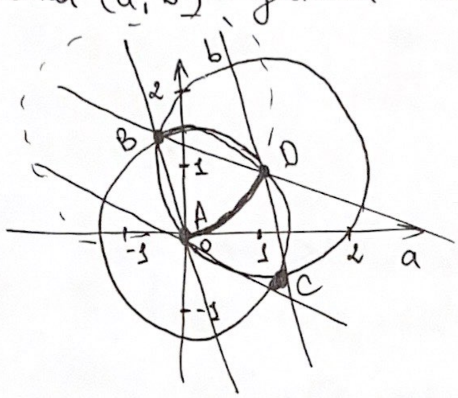


~~$a, b \in (1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2})$~~

Круг с тем же радиусом и центром в точке $(1; 1)$

③ $a^2+b^2 \leqslant \min(2a+2b, 2)$ Чистовик 3

Точка $(a;b)$ должна лежать в пересечении этих кругов

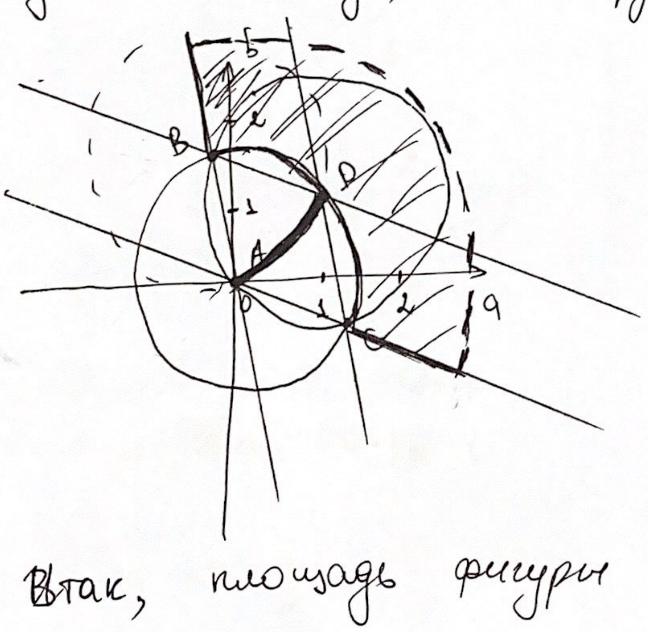


Если рассуждать неформально, то мы должны „перемещать" точку $(a;b)$ по области пересечения кругов и смотреть какой след оставит точка

Сначала "прокатим точку по дуге BDC, заметим, что мы получим дугообразную линию шириной $\sqrt{2}$, примыкающую к нижнему кругу

Но, если мы подойдём близко к краю, то наш круг вылезет за $\angle BAC$

Посчитаем отдельно площадь дугообразной линии и отдельно площадь, на которую круг вылезает



Итак, площадь фигуры $M = \frac{14}{3}\pi$

Черновик 1

① $a_1\ a_2\ a_3 \in \mathbb{Z}$

$S = a_1 + a_2 \dots + a_{10}$

$a_6 a_{12} > S+1$

$a_7 a_{11} < S+17$

$\boxed{\begin{matrix} 1. \ S = 55 \\ \cancel{72 > 56} \\ \cancel{77 < 55+17} \end{matrix}}$

$S_{10} = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 10a_1 + 45d$

$a_6 a_{12} > S+1$

$(a_1+5d)(a_1+11d) > 10a_1 + 45d + 1$

$a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1$

$a_7 a_{11} < S+17$

$(a_1+6d)(a_1+10d) > 10a_1 + 45d + 17$

$a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17$

$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 \\ a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17 \end{cases}$

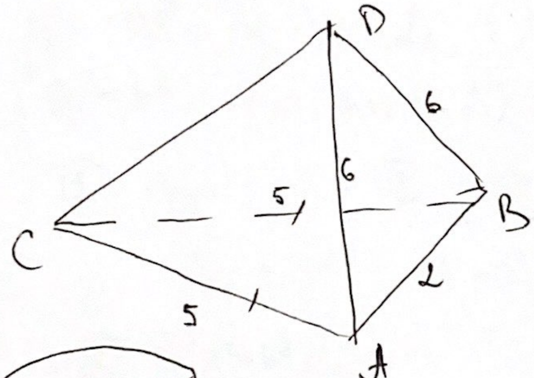
$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 \\ a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 + 5d^2 > 10a_1 + 45d + 17 \end{cases}$

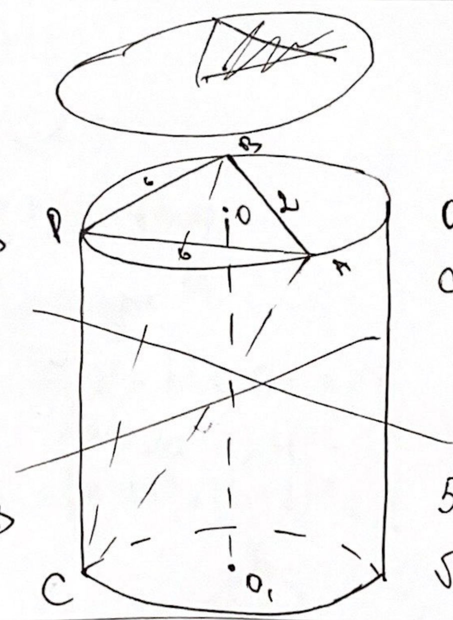
т.к. $5d^2 > 0$, то

$10a_1 + 45d + 1 < a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 + 5d^2 < 10a_1 + 45d + 17$

---

②





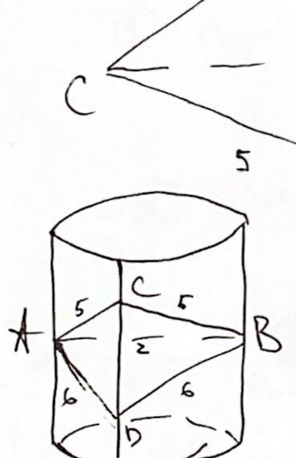
OO_1 – ось цилиндра

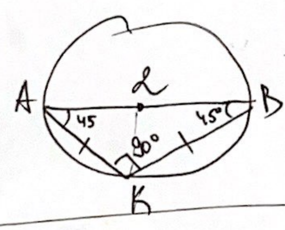
$CP \parallel OO_1$

$\sqrt{2}$

$5^2 = \sqrt{2 + x^2}$

$\sqrt{23} \quad \sqrt{34}$





$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17 \\ -a_1^2 - 16a_1 d - 55d^2 < -10a_1 - 45d - 1 \end{cases}$

$5d^2 < 16$

$d^2 < \frac{16}{5} \Rightarrow -\frac{4}{\sqrt{5}} < d < \frac{4}{\sqrt{5}}$

$d \in N$ т.к. a_n – ~~воз~~ возрастающая арифм. прогресия и

$a_1, a_2, a_3 \dots \in \mathbb{Z} \Rightarrow d = 1$

Черновик 2

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 62 \\ a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 46 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \quad (1) \\ a_2^2 + 6a_1 + 9 > 0 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $D = 36 + 8 = 44$

$$a_1 = \frac{-6 \pm 2\sqrt{11}}{2} = -3 \pm \sqrt{11}$$

(2) $(a_1+3)^2 > 0$

$a_1 \neq -3$

$$\begin{cases} -3-\sqrt{11} < a_1 < -3+\sqrt{11} \\ a \neq -3 \end{cases}$$

$a_1 \in (-3-\sqrt{11}; -3) \cup (-3; -3+\sqrt{11})$

т.к. $a_1 \in Z$, то

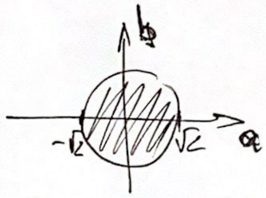
$a_1 = 0; -1; -2; -4; -5; -6$

(2) $$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 2 \quad (1) \\ a^2 + b^2 \leq \min(2a+2b, 2) \quad (2) \end{cases}$$

(1) Круг, $R = \sqrt{2}$, $O(a;b)$ - центр

$S_{(1)} = \pi R^2 = 2\pi = S$ фигуры M

(2) а) $a^2 + b^2 \leq 2$

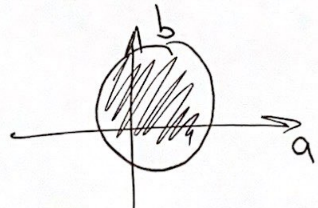


$a, b \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$

б) $a^2 + b^2 \leq 2a + 2b$

$(a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) \leq 2$

$(a-1)^2 + (b-1)^2 \leq 2$



$a, b \in (1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2})$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100680**

ID профиля: **876098**

Вариант 17

Чистовик 1

(4) $\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$

Из условий на НОК следует, что в разложении чисел $a;b;c$ на простые входят только простые 2 и 3.

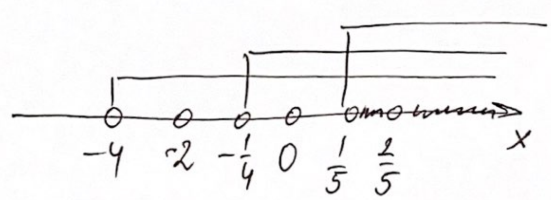
Из условий на НОД следует, что $a=6a'$; $b=6b'$; $c=6c'$, где $НОД(a';b';c')=1$ т.е. ни двойка, ни тройка не входит в эти три числа одновременно (максимум в два)

Второе условие можно переписать в виде:

$НОК(a';b';c') = 2^{14}\cdot 3^{15}$

(5) $\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)-1 \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) \end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{5x-1}>0 \\ \sqrt{5x-1}\neq 1 \\ 4x+1>0 \\ 4x+1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ x>-\frac{1}{4} \\ x>-4 \\ x\neq 0 \\ x\neq -4 \\ x\neq -2 \\ x\neq 2/5 \end{cases}$



$x\in\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{2}{5};+\infty\right)$

Черновик 1

4) $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 6 \\ НОК(a;b;c) = 2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{2^{15}\cdot 3^{16}}{a}; \frac{2^{15}\cdot 3^{16}}{b}; \frac{2^{15}\cdot 3^{16}}{c} \in \mathbb{Z} \\ \frac{a}{6}; \frac{b}{6}; \frac{c}{6} \in \mathbb{Z} \end{cases}$ Из условия

Из условий на НОК следует, что в разложении чисел $a; b; c$ на простые входят только простые 2 и 3.

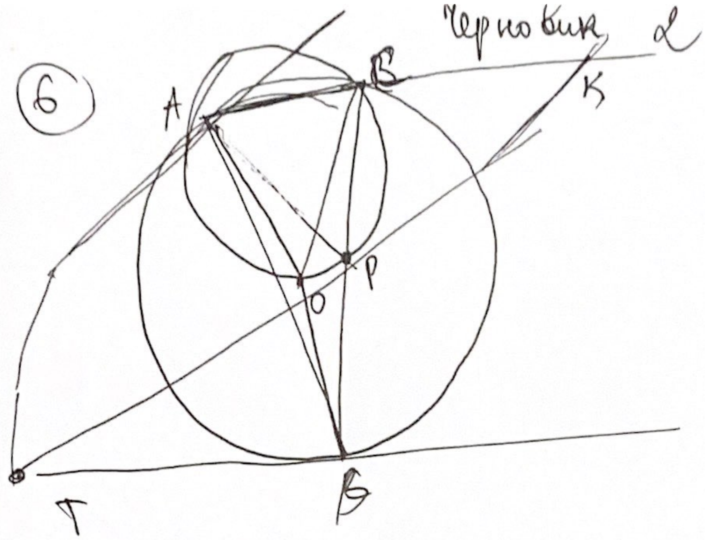
Из условий на НОД следует, что $a = 6a'$; $b = 6b'$; $c = 6c'$; где $НОД(a'; b'; c') = 1$ т.е. ни двойка, ни тройка не входит в эти три числа одновременно (максимум в два)

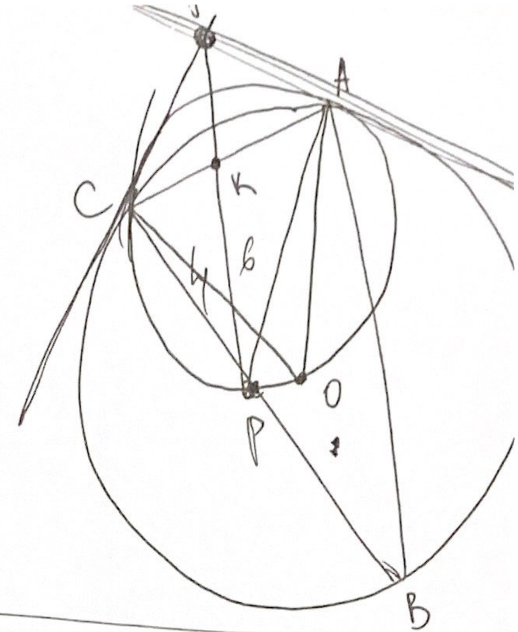
Второе условие можно переписать в виде:

$НОК(a'; b'; c') = 2^{14}\cdot 3^{15}$

Черновик

⑥

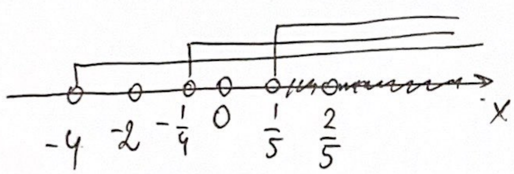




⑤ $\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) & (1) \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) - 1 & (2) \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{5x-1} > 0 \\ 4x+1 > 0 \\ \frac{x}{2}+2 > 0 \\ 5x-1 > 0 \\ 4x+1 \neq 1 \\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 > 0 \\ \frac{x}{2}+2 \neq 1 \\ \sqrt{5x-1} \neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x-1 > 0 \\ x > -\frac{1}{4} \\ \frac{x+4}{2} > 0 \\ x > \frac{1}{5} \\ x \neq 0 \\ \frac{x+4}{2} \neq 0 \\ x \neq -2 \\ x \neq \frac{2}{5} \end{cases}$

$\begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ x > -\frac{1}{4} \\ x > -4 \\ x \neq 0 \\ x \neq -4 \\ x \neq -2 \\ x \neq 2/5 \end{cases}$



$x \in \left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$

$$\log_{5x-1}(4x+1)^2 = \frac{1}{\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)}$$

$$\frac{1}{2\log_{\frac{x}{2}+2}(4x+1)} = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) - \log_{\frac{x}{2}+2}\left(\frac{x}{2}+2\right)$$

$$\frac{1}{2\log_{\frac{x}{2}+2}(4x+1)} = \log_{\frac{x}{2}+2}\left(\frac{5x-1}{x/2+2}\right)$$