Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

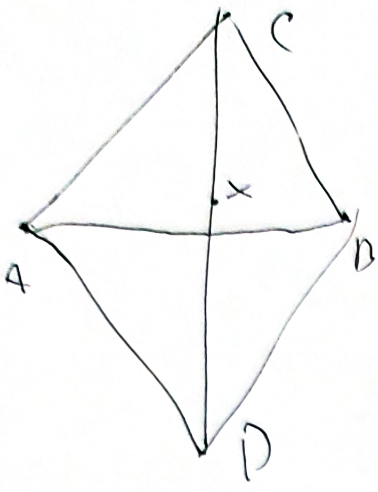
Шифр: **21100648**

ID профиля: **127414**

Вариант 17

№2

Чистовик.



Пусть X - точка на CD такая, что $BX \perp CD$

$$\left.\begin{array}{l} CB = AC \\ DB = AD \\ CD = CD \end{array}\right| \Rightarrow \triangle ACD = \triangle BCD$$

$\Downarrow$

расстояния от C до высот в треугольниках $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ опущенных из точек A и B соответственно равны.

$\Downarrow$

$XA \perp CD$

$$\left.\begin{array}{l} XA \perp CD \\ XB \perp CD \end{array}\right| \Rightarrow (AXB) \perp CD$$

$\triangle ACD = \triangle BCD \Rightarrow BX = AX$

Пусть $BX^2 = y$, пусть R - радиус цилиндра.

$(AXB) \perp CD \Rightarrow$ плоскость (AXB) параллельна основаниям цилиндра

точки A, X, B - на боковой поверхности цилиндра

$\Downarrow$

$$R = R_{\triangle AXB} = \frac{AX \cdot XB \cdot BA}{4 S_{\triangle AXB}}$$

$$S_{\triangle AXB} = \sqrt{\frac{(AX + XB + BA)(AX + XB - BA)(AX - XB + BA)(-AX + XB + BA)}{16}} =$$

$$= \sqrt{\frac{((AX+XB)^2 - BA^2) BA^2}{16}} = \sqrt{\frac{(4y - 2^2) \cdot 4}{16}} = \sqrt{y-1}$$

$$R = \frac{BX^2 \cdot BA}{4 \cdot S_{\triangle AXB}} = \frac{2y}{4\sqrt{y-1}} = \frac{y}{2\sqrt{y-1}}$$

найдём минимум

$$R' = \frac{2\sqrt{y-1} - \frac{y}{\sqrt{y-1}}}{4(y-1)} = \frac{2y-2-y}{4(y-1)\sqrt{y-1}} = \frac{y-2}{4(y-1)\sqrt{y-1}}$$

$R' = 0$

$\Downarrow$

$$R' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{y-1} - \frac{y}{\sqrt{y-1}} = 0 \\ y(y-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(y-1) = y \\ y(y-1) \neq 0 \\ y - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y > 1 \end{cases}$$

$y = 2$

при $y < 2$ $R' < 0$

при $y > 2$ $R' > 0$

$\Downarrow$

при $y = 2$ радиус минимальный

~~при $y = 2$ р~~

$\Rightarrow BX^2=2$

$\Downarrow$

$BX=\sqrt{2}$

$CX=\sqrt{CB^2-BX^2}=\sqrt{25-2}=\sqrt{23}$

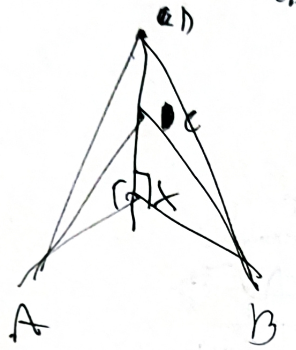
$DX=\sqrt{BD^2-BX^2}=\sqrt{36-2}=\sqrt{34}$

~~$CD=CX+DX$~~

Если X на CD, то $CD=CX+DX=\sqrt{23}+\sqrt{34}$

Если X вне CD, то $CD=DX-CX=\sqrt{34}-\sqrt{23}$

Это 2 случая!



Ответ: $\{\sqrt{34}-\sqrt{23};\ \sqrt{34}+\sqrt{23}\}$

№7

Пусть d – разность арифм. прогрессии

тогда $d>0$ и $d\in\mathbb{Z} \Rightarrow d\in\mathbb{N}$

$S=10a_1+C_{10}^2\cdot d=10a_1+45d$

$(a_1+3d)(a_1+11d)>S+1$

$(a_1+6d)(a_1+10d)<S+17$

$(a_1+5d)(a_1+11d)-1>S>(a_1+6d)(a_1+10d)-17$

$a_1^2+16a_1d+55d^2-1 \quad a_1^2+16da_1+60d^2-17$

$-1>5d^2-17$

$5d^2<16$

если $d\geq 2$, то $5d^2\geq 20$ – противоречие

$\begin{cases} d<2 \\ d\in\mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow d=1$

$S = 10a_1 + 45d = 10a_1 + 45$

$$\begin{cases} (a_1+5)(a_1+11) > 10a_1+45+1 \\ (a_1+6)(a_1+10) < 10a_1+45+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1+55 > 10a_1+45+1 \\ a_1^2+16a_1+60 < 10a_1+45+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+6a_1+9>0 \\ a_1^2+6a_1-2<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+3)^2>0 \\ -3-\sqrt{9+2} < a < -3+\sqrt{9+2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \neq 3 \\ \cancel{a_1 = -3} \end{cases}$$

$a \in (-3-\sqrt{11}; -3) \cup (-3; -3+\sqrt{11})$

$9 < 11 < 16$

$\Downarrow$

$3 < \sqrt{11} < 4$

$-7 < -3-\sqrt{11} < -6$

$0 < -3+\sqrt{11} < 1$

$a \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

Ответ: $\{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

№3

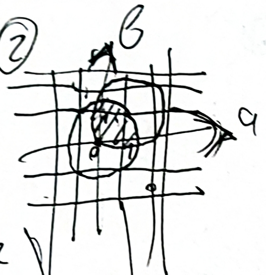
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2\\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b,\ 2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2\\ a^2+b^2 \le 2\\ a^2+b^2 \le 2a+2b\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2\\ a^2+b^2 \le 2\\ (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}① \ (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2\\ ② \begin{cases} a^2+b^2 \le 2\\ (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2\end{cases}\end{cases}$$

②



$1^2+1^2=2$

$(0-1)^2+(0-1)^2=2 \Rightarrow$ окружности проходят через центры друг друга

точки пересечения окружностей:

$$\begin{cases}a^2+b^2=2\\ (a-1)^2+(b-1)^2=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+b^2=2\\ a^2-2a+1+b^2-2b=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}2-2a-2b=0\\ a^2+b^2=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+b=1\\ a^2+b^2=2\end{cases}$$

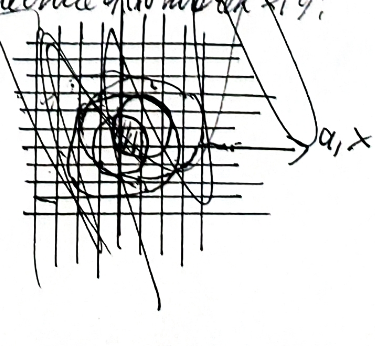
$$\begin{cases}a+b=1\\ (a+b)^2=1\\ a^2+b^2=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+b=1\\ 2ab=-1\\ a^2+b^2=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+b=1\\ (a-b)^2=3\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=\frac{1+\sqrt3}{2}\\ b=\frac{1-\sqrt3}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}a=\frac{1-\sqrt3}{2}\\ b=\frac{1+\sqrt3}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

множество точек x, y:



Лемма: чистовик

пусть

$x \le \min(y,z)$

тогда:

$$\begin{cases}\min(y,z) \le y\\ \min(y,z) \le z\end{cases}$$

$\Downarrow$

$$x \le \min(y,z) \Rightarrow \begin{cases}x \le y\\ x \le z\end{cases}$$

$$\begin{cases}x \le y\\ x \le z\end{cases}$$

если $y \le z$, то $\min(y,z)=y$

$x \le y \Rightarrow x \le \min(y,z)$

если $y \ge z$ то $\min(y,z)=z$

$x \le z \Rightarrow x \le \min(y,z)$

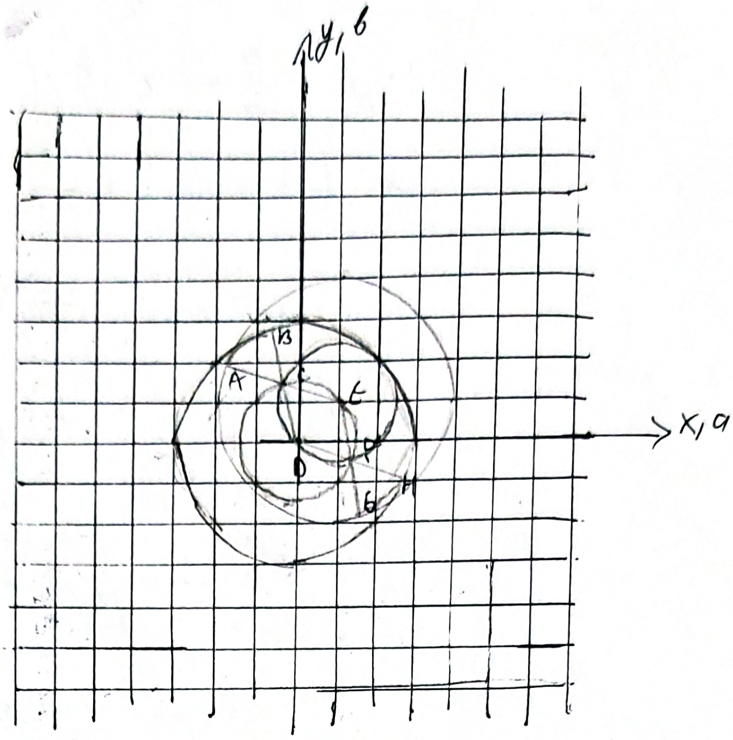
тогда

$$\begin{cases}x \le y\\ x \le z\end{cases} \Rightarrow x \le \min(y,z)$$

тогда

$$x \le \min(y,z) \Leftrightarrow \begin{cases}x \le y\\ x \le z\end{cases}$$

все точки (x, y) находятся на расстоянии не более $\sqrt{2}$ от (a, b)



$S_M = S_{сект. ABC} + S_{сект. AEG} + S_{сект. GFH} + S_{сект. HDB} - S_{[redacted] CEFD}$

[redacted]

При гомотетии с центром в E и коэф. 2: ~~[illegible]~~

$\left.\begin{array}{l} H_E^2(C) = A \\ H_E(F) = G \end{array}\right| \Rightarrow S_{сект. AEG} = 4S_{сект. CEF}$

$S_{сект. ABC}$ эти

$S_{сект. AEG} = S_{сект. BDH}$

$S_{сект. ACB} = S_{сект. GFH} = \frac{1}{2} S_{круга (E,CE)} - S_{сект. CEF}$

$S_M = S_{круга (E,CE)} + 6S_{сект. CDF} - S_{CEFD}$

$S_{круга (E,CE)} = 2\pi$

$S_{CEFD} = 2S_{\triangle CED} = 2 \cdot \sqrt{\frac{(CE+ED+DC)(CE+ED-DC)(CE-ED+DC)(-CE+ED+DC)}{16}} =$

$= 2 \cdot \sqrt{\frac{3\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^3}{16}} = \sqrt{3}$

Засколасик

$$S_{\text{сегм } CDF} = \frac{\angle CDF}{2\pi} \cdot 2\pi = \angle CDF$$

$$\cancel{\angle CDF = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(}$$

$$\angle CDF = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} - \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)}\right) =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{(1+3+2\sqrt{3})-(1+3-2\sqrt{3})}{-4}\right) =$$

$$= \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3}$$

$$S_n = 2\pi + \cancel{6\operatorname{arctg}(\sqrt{2})}\ 6\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} =$$

$$= 2\pi$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100648**

ID профиля: **127414**

Вариант 17

~~черновик~~

Чистовик

~4

[redacted]

заметим $НОК(a;b;c)=2^{15}3^{16}$ то каждое из чисел не содержит в разложении на простые чисел кроме 2 и 3.

Пусть

$a=2^d 3^e$

$b=2^f 3^g$

$c=2^h 3^i$

тогда исходная система равносильна данной:

$$\begin{cases} \min(d;f;h)=1 \\ \max(d;f;h)=15 \\ \min(e;g;i)=1 \\ \max(e;g;i)=16 \end{cases}$$

заметим что разным наборам $d;e;f;g;h;i$ соответствуют разные наборы $a;b;c$ и наоборот, поэтому кол-во наборов $d;e;f;g;h;i$ равно кол-ву наборов $a;b;c$

~~пусть~~

~~$\min(d;f;h)=1 \Rightarrow$ среди чисел $d;f;h$ есть 1~~

~~$\max(d;f;h)=15 \Rightarrow$ среди чисел $d;f;h$ есть 15~~

~~надо: если среди чисел есть~~

найдём кол-во наборов $x;y;z$, где $\min(x;y;z)=1$ и $\max(x;y;z)=n>1$

$\min(x;y;z)=1 \Rightarrow$ среди $x;y;z$ есть 1

$\max(x;y;z)=n \Rightarrow$ среди $x;y;z$ есть n.

если среди них есть равные, то либо там 2 по 1 и 1 по n, это 3 варианта, либо 2 по n и 1 по 1, это 3 варианта.

Если среди них равных нет, то пусть [illegible] $x<y<z$.

тогда $\begin{cases} x=1 \\ x<y<n \\ z=n \end{cases}$ тогда для y есть $n-2$ варианта, тогда всего для $x;y;z$ где $x<y<z$ есть $n-2$ варианта.

всего перестановок $x;y;z$ а это $3!=6$

тогда наборов $x;y;z$ где нет равных $6(n-2)$. тогда всего наборов

$$6(n-2)+3+3=6n-6$$

$\left.\begin{matrix} \min(d;f;h)=1 \\ \max(d;f;h)=15 \end{matrix}\right| \Rightarrow$ существует $6\cdot14$ наборов $d;f;h$

$\left.\begin{matrix} \min(e;g;i)=1 \\ \max(e;g;i)=16 \end{matrix}\right| \Rightarrow$ существует $6\cdot15$ наборов $e;g;i$

Так как выбор $d;f;h$ и выбор $e;g;i$ независимы, то способов выбрать набор $d;e;f;g;h;i$

$$6\cdot14\cdot6\cdot15=7560$$

Ответ: 7560

№5 чистовик

$$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{(5x-1)^{0,5}}(4x+1) =$$

$$= 2\log_{(5x-1)}(4x+1)$$

$$\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)$$

Пусть $a = 5x-1$

$b = 4x+1$

$c = \frac{x}{2}+2$

тогда 3 числа эти:

$2\log_a b$

$2\log_b c$

$\log_c a$

Заметим, что $2\log_a b \cdot 2\log_b c \cdot \log_c a = 4\cdot(\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a) =$

$= 4$

Среди трёх чисел 2 равны, ~~одно~~ одно меньше на 1

Пусть равные: y, меньшее: $y-1$

тогда $y^2(y-1)=4$

$y^3-y^2=4$

$y^3-2y^2+y^2-2y+2y-4=0$

$(y-2)(y^2+y+2)=0$

$y=2 \cup y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2}$

[redacted] $y=2$

стр 3

7 листовая

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\log_a b = 2\\ 2\log_b c = 2\\ \log_c a = 1\end{cases}\\ \begin{cases}2\log_a b = 2\\ 2\log_b c = [redacted]1\\ \log_c a = [redacted]2\end{cases}\\ \begin{cases}2\log_a b = 1\\ 2\log_b c = 2\\ \log_c a = 2\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_a b = 1\\ \log_b c = 1\\ \log_c a = 1\end{cases}\\ \begin{cases}\log_a b = 1\\ \log_b c = \frac{1}{2}\\ \log_c a = 2\end{cases}\\ \begin{cases}\log_a b = [redacted]\frac{1}{2}\\ \log_b c = 1\\ \log_c a = 2\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a = b = c \neq 1\\ a > 0\end{cases}\\ \begin{cases}a = b\\ a = c^2\\ c[redacted] > 0\\ c[redacted] \neq 1\end{cases}\\ \begin{cases}b = c\\ a = c^2\\ c[redacted] > 0\\ c[redacted] \neq 1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}5x-1 = 4x+1 = \frac{x}{2}+2\\ 5x+1 > 0\\ 5x+1 \neq 0\end{cases}\\ \begin{cases}5x-1 = 4x+1\\ 5x-1 = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2\\ \frac{x}{2}+2 > 0\\ \frac{x}{2}+2 \neq 1\end{cases}\\ \begin{cases}4x+1 = \frac{x}{2}+2\\ 5x-1 = \left(\frac{x}{2}[redacted]+2\right)^2\\ \frac{x}{2}+2 > 0\\ \frac{x}{2}+2 \neq 1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 2\\ 9 = 3\\ 5x+1 > 0\\ 5x+1 \neq 1\end{cases}\\ \begin{cases}x = 2\\ 9 = 3^2\\ 3 > 0\\ 3 \neq 1\end{cases}\\ \begin{cases}x = \frac{2}{7}\\ \frac{[redacted]3}{7} = \left(\frac{1}{7}+2\right)^2\\ \frac{5}{7}+2 \neq 1\\ \frac{5}{7}+2 > 0\end{cases}\end{array}\right.$$

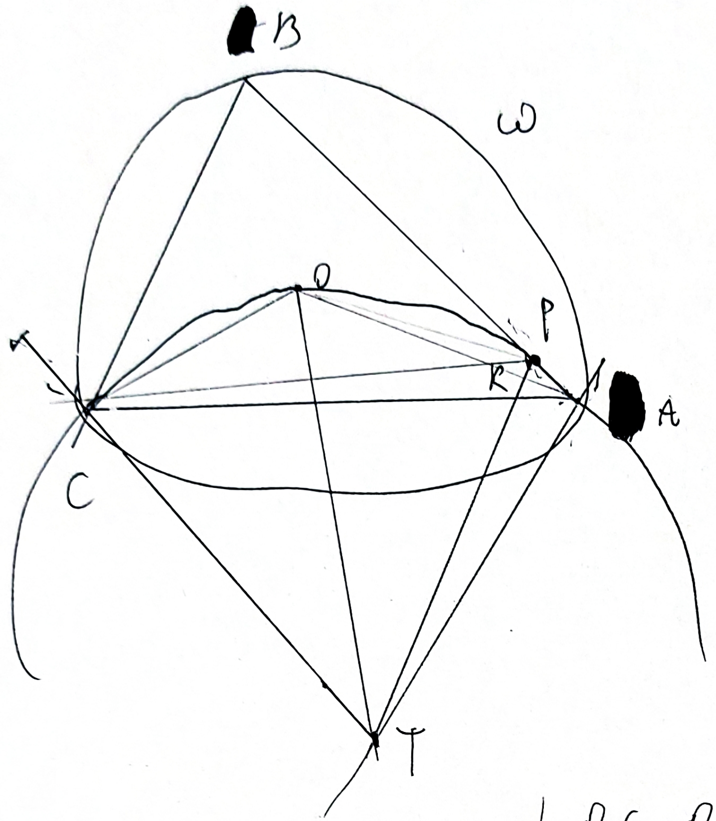
$$\Downarrow$$

$x = 2$

Ответ: $x = 2$

$$\left(\frac{1}{7}+2\right)^2 = \left(\frac{15}{7}\right)^2 = \frac{225}{49}$$

№6 чистовик



$S_{\triangle APK} = 6$

$S_{\triangle CPK} = 4$

AT, CT — касательные к ω

$\Downarrow$

$\angle OCT = \angle OAT = 90^\circ$

$\Downarrow$

$OATC$ — на одной окружн.

$\Downarrow$

$OPATC$ — на одной окружности.

$OC = OA$
$OT = OT$
$\angle OCT = \angle OAT = 90^\circ$
$\Rightarrow \triangle OCT = \triangle OAT$

$\Downarrow$

$\angle COT = \angle AOT$

$\Downarrow$

$\angle COT = \angle CPT$
$\angle AOT = \angle APT$
$\Rightarrow \angle CPT = \angle APT$

$\Downarrow$

PK — биссектриса в $\triangle PCA$

$\Downarrow$

$$\frac{PC}{PA} = \frac{KC}{KA} = \frac{S_{\triangle CKP}}{S_{\triangle AKP}} = \frac{4}{6}$$

по т. Стюарта

$$CP^2 = CA^2 \cdot \frac{PB}{AB} + CB^2 \cdot \frac{PA}{AB} - PA \cdot PB$$

$ABCT$ — гарм. 4 точки $\Rightarrow AB \cdot CT = CB \cdot AT$

~~$R_{AC} = 2R\sin\angle ABC = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{2S_{ABC}} \cdot \sin\angle ABC =$~~

$\angle OPT = \angle OAT = 90^\circ$

$\Downarrow$

PO — биссектриса в $\triangle ABC$

$BP = CP \Rightarrow \frac{BP}{PA} = \frac{4}{6}$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle CPA} \cdot \frac{BA}{AP} = \frac{10}{6} \cdot 10$$

Ответ: $\frac{50}{3}$

черновик

$a = 5x - 1$

$b = 4x + 1$

$c = \frac{a}{2} + 2$

$2\log_a b$

$2\log_b c$

$\log_c a$

$d = 2\log_a b$

$e = 2\log_b c$

$\log_{\left(\frac{a}{2}+2\right)}(5x-1) = 1$

$5x - 1 = 1$

$x = \frac{2}{5}$

$2 = x + 4$

$7x = 2$

$x = \frac{2}{7}$

$\frac{10}{7} =$

$\left(\frac{5}{7} + 2\right)^2$

$\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$

$\frac{-3+\sqrt{7}i}{2}$

$\frac{1 - 7 - 2i\sqrt{7}}{4}$

$\frac{-3 - i\sqrt{7}}{2}$

$\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$

$\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$

$x^2(x-1) = 4$

$x^3 - x^2 = 4$

$x^3 - x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x^2 + x + 2) = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$

$-2 + \frac{1+\sqrt{-7}}{2} =$

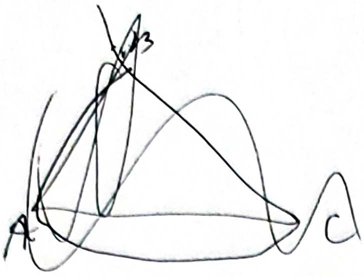
$= \frac{-3+\sqrt{-7}}{2}$

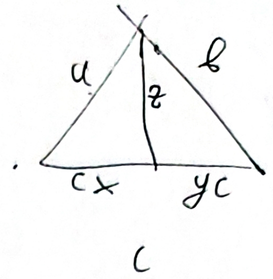
$\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{2}\right)\left(\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}\right)$

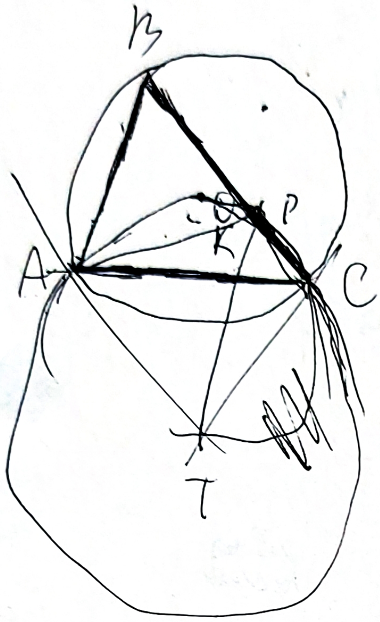
$\frac{9+5}{4} = \frac{14}{4} = 7$

$\frac{1+7}{4} = 2$

черновик







$S_{APK} = x$

$S_{CPR} = y$

$S_{ABC} - ?$

$a^2 = c^2x^2 + z^2 - 2cxz\cos$

$b^2 = c^2y^2 + z^2 + 2cyz\cos$

$ya^2 = yc^2x^2 + yz^2 - 2cxyz\cos$

$xb^2 = xc^2y^2 + xz^2 + 2cxyz\cos$

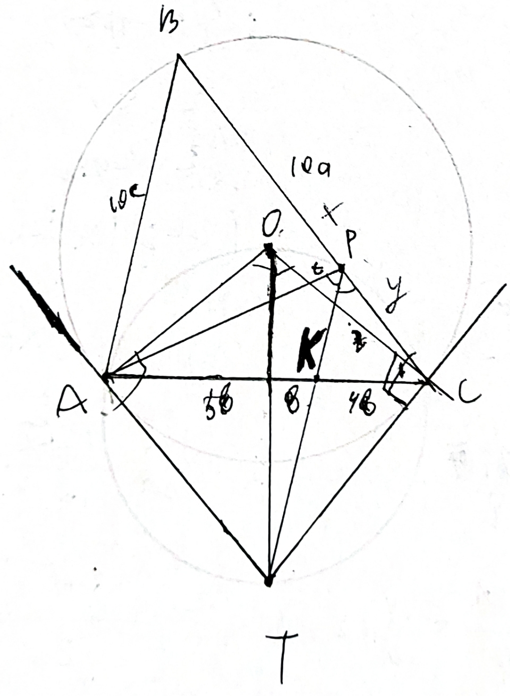
$a^2y + b^2x = c^2xy(x+y) + z^2(x+y)$

$$z^2 = \frac{a^2y + b^2x - c^2xy(x+y)}{x+y}$$

$z^2 = \cancel{a^2y + b^2x - c^2xy}$

$t\alpha + z = y\alpha$

$z\alpha + t = \frac{3}{2}y$



$\left(\frac{3y}{2}\right)^2$

$\parallel$

$Ap^2 = 10b \cdot \frac{x}{10a} + 10c \cdot \frac{y}{10a} - xy$

$\frac{9y^2}{4} = \frac{bx}{a} + \frac{cy}{a} - (10a-y)y$

$\frac{13y^2}{4} = \frac{bx}{a} + \frac{cy}{a} - 10ay$

$\frac{13y^2}{4} = \frac{b(10a-y)}{a} + \frac{cy}{a} - 10ay$

$13y^2a =$