Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100550**

ID профиля: **844259**

Вариант 17

Чистовик №1.

Задача №1

S - сумма арифм. прогрессии

$a_1, a_2, a_3 \ldots a_{10} \in \mathbb{Z}$. Также известно, что прогрессия возрастающая. Это значит, что $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{10}$ и $d \in \mathbb{Z}$ и $d>0$, где d - разность прогрессии, т.к ~~$a_n = a_1 + d(n-1)$. $a_n \in \mathbb{Z}$, $a_1 \in \mathbb{Z}$, $n-1 \in \mathbb{Z}$, т.к n - порядковый номер, а значит $n \in \mathbb{N}$, и если мы к целому числу~~, предположим что $d \notin \mathbb{Z}$. Тогда $a_2 = a_1 + d$. $a_1 \in \mathbb{Z}$, $a_2 \in \mathbb{Z}$; Значит $d = a_2 - a_1$ целое - целое число = целое, а мы предположим, что $d \notin \mathbb{Z}$. Значит предположение не верно, и $d \in \mathbb{Z}$. Из условия известно, что $\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S+1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S+17 \end{cases}$ Распишем a_6, a_{12}, a_7, a_{11} по формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$, а $S = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

$$\begin{cases} (a_1 + 5d)(a_1 + 11d) > 10a_1 + 45d + 1 \\ (a_1 + 6d)(a_1 + 10d) < 10a_1 + 45d + 17 \end{cases}$$

Пусть $t = a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 - 10a_1 - 45d$.

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 - 10a_1 - 45d > 1 \\ a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 - 10a_1 - 45d < 17 \end{cases}$$

Тогда система примет следующий вид:

$$\begin{cases} t > 1 \\ t + 5d^2 < 17 \end{cases}$$

Очевидно, что $t \in \mathbb{Z}$, т.к каждое слагаемое $\in \mathbb{Z}$. $d \in \mathbb{Z}$, и $d > 0$ (прогрессия возрастающая)

Если $d = 1$, $t \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Если $d \geq 2$, то $5d^2 \geq 25$, а $t > 1$. Значит $t + 5d^2 > 25$ (неточная оценка, но достаточная), и тогда второе неравенство не будет иметь решений. Значит есть единственное значение d. Перепишем тогда t с осознанием этого факта

$a_1^2 + 6a_1 + 10 = t$; $a_1^2 + 6a_1 + 10 - t = 0$. Именно из этой формулы мы будем получать значения a_1. Рассмотрим это как квадратный трехчлен относительно a_1

$D = 36 - 40 + 4t = 4t - 4 = 4(t-1)$, a_1 мы будем получать по формулам $a_1 = \frac{-6 \pm \sqrt{D}}{2}$. Если $\sqrt{D}$ будет иррациональным, то a_1 - тоже будет иррациональным

21100550 (U844259 M1297507)

Чистовик Значит нам подходят все ~~возможные~~ следующие значения
№2

$t \in \{2, 5, 10\}$

① $t=2$ $D=4$ $a_1 = \frac{-6 \pm 2}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = -2 \\ a_1 = -4 \end{array}\right.$

② $t=5$ $D=16$ $a_1 = \frac{-6 \pm 4}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = -1 \\ a_1 = -5 \end{array}\right.$

③ $t=10$ $D=36$ $a_1 = \frac{-6 \pm 6}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_1 = -6 \end{array}\right.$

Сделаем проверку на каждый случай

$a_1 = -2$ $\quad -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 9$ $\quad \begin{cases} 3 \cdot 9 > \frac{-2+7}{2} \cdot 10 + 1 \\ 4 \cdot 8 < \frac{-2+7}{2} \cdot 10 + 17 \end{cases}$ Да

$a_1 = -4$ $\quad -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ $\quad \begin{cases} 1 \cdot 7 > \frac{-4+5}{2} \cdot 10 + 1 \\ 2 \cdot 6 < \frac{-4+5}{2} \cdot 10 + 17 \end{cases}$ Да

$a_1 = -1$ $\quad -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ $\quad \begin{cases} 4 \cdot 10 > \frac{-1+8}{2} \cdot 10 + 1 \\ 5 \cdot 9 < \frac{-1+8}{2} \cdot 10 + 17 \end{cases}$ Да

$a_1 = -5$ $\quad -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ $\quad \begin{cases} 0 \cdot 6 > \frac{-5+4}{2} \cdot 10 + 1 \\ 1 \cdot 5 < \frac{-5+4}{2} \cdot 10 + 17 \end{cases}$ Да

$a_1 = 0$ $\quad 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ $\quad \begin{cases} 5 \cdot 11 > \frac{0+9}{2} \cdot 10 + 1 \\ 6 \cdot 10 < \frac{0+9}{2} \cdot 10 + 17 \end{cases}$ Да

$a = -6$ $\quad -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ $\quad \begin{cases} -1 \cdot 5 > \frac{-6+3}{2} \cdot 10 + 1 \\ 0 \cdot 4 < \frac{-6+3}{2} \cdot 10 + 17 \end{cases}$ Да

Ответ $a_1 \in \{-2; -4; -1; -5; 0; -6\}$

21100550 (U844259 M1297507)

Чистовик №3

Задача № 3

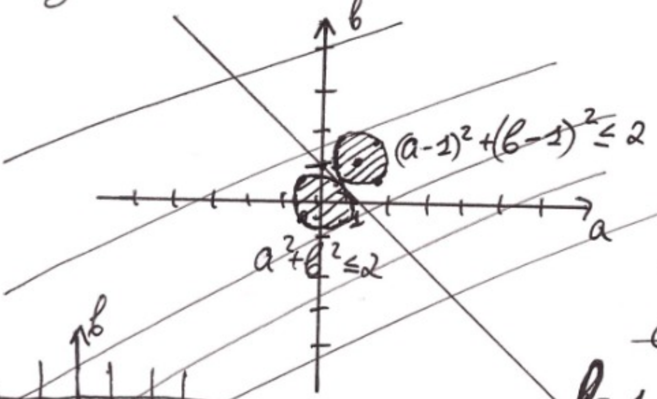
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le \min(2a+2b,2)\end{cases}$$

Сначала разберемся со вторым неравенством

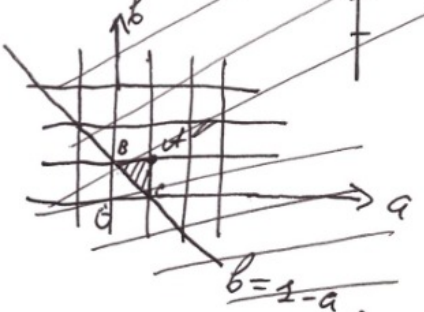
$a^2+b^2\le \min(2a+2b,2)$ Если $2a+2b<2 \Rightarrow a+b<2$, то неравенство имеет вид $a^2+b^2\le 2a+2b$.

$a^2-2a+1+b^2-2b+1\le 2$ $\quad (a-1)^2+(b-1)^2\le 2$

Если $2a+2b\ge 2$ $\quad a+b\ge 1$ $\quad a^2+b^2\le 2$. Построим графики неравенств в системе координат, аналогичной декартовой, но вместо оси x ось a, а вместо оси y ось b



~~Оба круга касаются ~~ прямой ~~$b=1-a$. Т.к рассмотрим случай с кругом $(a-1)^2+(b-1)^2\le 2$. А с другим кругом аналогично в силу симметрии их центров относительно $b=1-a$ прямой $b=1-a$.~~

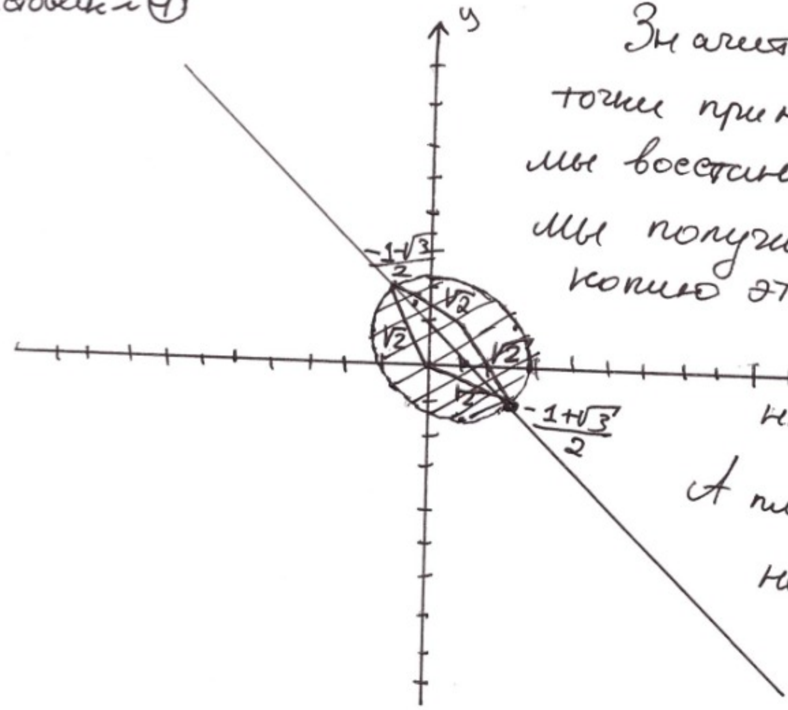


~~Рассмотрим $\triangle ABC$. Опустим высоту из вершины A на BC. Ее длина будет равна~~

Заштрихованная область на графике, это область, координаты точек которой подходят. Графиком первого уравнения является круг с центром (a;b) и радиусом $\sqrt{2}$. Значит и центр окружности принадлежат этой области, но уже в декартовой СК. Поэтому стало необходимо найти координаты этой области.

21100550 (U844259 M1297507)

Чистовик 1



Значит, когда из каждой точки принадлежащий этой области мы восстановим окружность радиуса $\sqrt{2}$, мы получим в итоге увеличенную копию этой фигуры. Просто каждую точку границы надо „отодвинуть" на $\sqrt{2}$.

А площадь фигуры я посчитать не успел.

Черновик 1

№1) S - сумм арифм. прогрессии

$a_1, a_2, \ldots, a_{10} \in \mathbb{Z}$ $\quad a_6 \cdot a_{12} > S+1$ $\quad d>0$, $d \in \mathbb{Z}$

$a_7 \cdot a_{11} < S+17$

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_{12} = a_1 + 11d$ $\quad S = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{11} = a_1 + 10d$ $\quad S = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 10a_1 + 45d$

$2, 5, 8, 11, 14$ $\quad \Sigma = 40$

$S = \frac{4 + 4 \cdot 3}{2} \cdot 5 = \frac{4+12}{2} \cdot 5 = 40$

$(a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > 10a_1 + 45d + 1$

$(a_1 + 6d)(a_1 + 10d) < 10a_1 + 45d + 17$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 \\ a_1^2 + 16a_1d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17 \end{cases}$$

$a^2 + 16a_1d + 55d^2 - 10a_1 - 45d = t$

$$\begin{cases} t > 1 \\ t + 5d^2 < 17 \end{cases}$$ $\quad d = 1 \quad t \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

1) $d = 1 \quad t = 2$

$\cancel{a_1^2 + 16a_1 + 60d^2 - 10a_1} - \quad a^2 + 16a_1 + 55 - 10a_1 - 45 =$

$= a^2 + 6a_1 + 10 = t \quad a^2 + 6a_1 + 10 - t = 0$

$D = 36 - 40 + 4t = 4t - 4 = 2^2(t-1)$

21100550 (U844259 M1297507)

Черновик - 2.

№3) $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$

$a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2)$

$x=a$

$y=b$ $\quad x^2+y^2 \le \min(2x+2y, 2)$

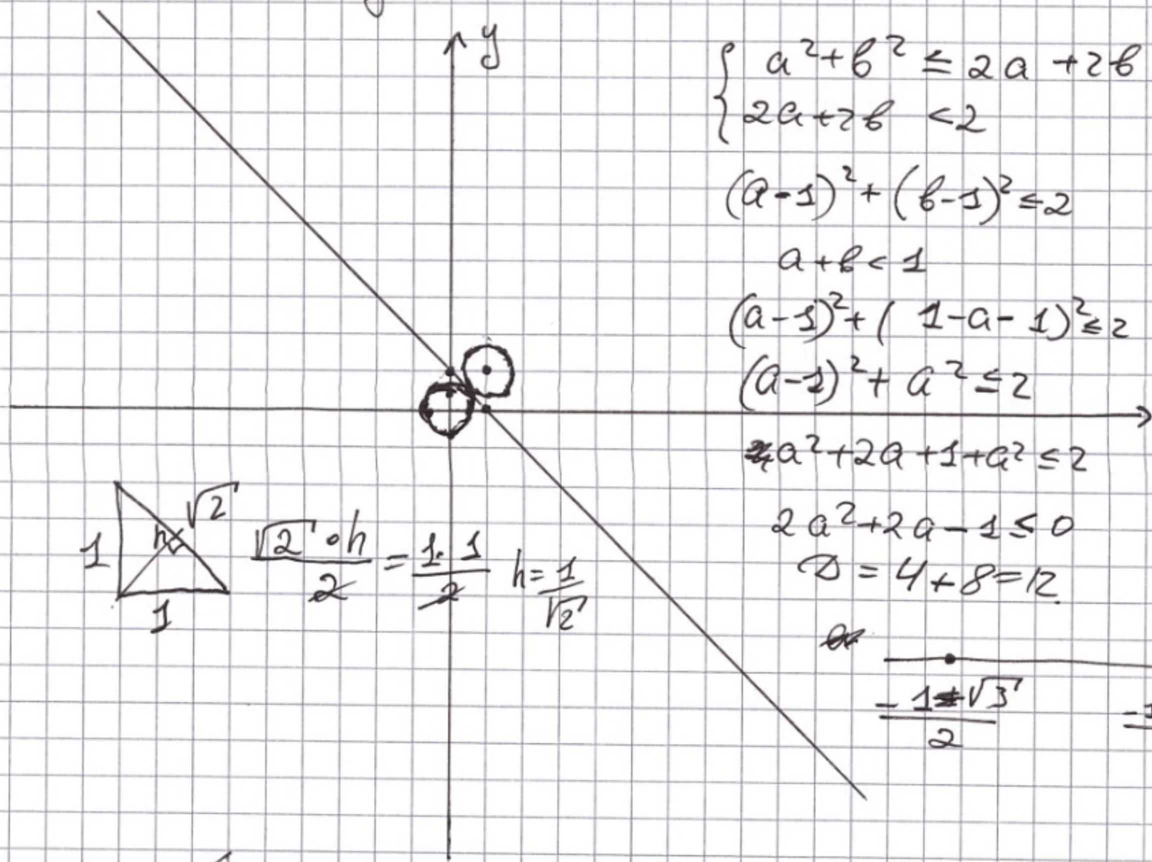
1 случай $\quad 2x+2y < 2 \quad x^2+y^2 \le 2x+2y \quad y = 1-x$

$x+y<1 \quad (x-1)^2+(y-1)^2 \le 2$

2 случай

$2x+2y>2$

$x+y>1 \quad x^2+y^2 \le 2$



$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 2a+2b \\ 2a+2b < 2 \end{cases}$$

$(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2$

$a+b<1$

$(a-1)^2+(1-a-1)^2 \le 2$

$(a-1)^2+a^2 \le 2$

$a^2+2a+1+a^2 \le 2$

$2a^2+2a-1 \le 0$

$D = 4+8 = 12$

$\dfrac{\sqrt{2}\cdot h}{2} = \dfrac{1\cdot 1}{2} \quad h = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \qquad \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$

$(a-1)^2+(b-1)^2 = 2 \quad b = 1-a$

$a^2-2a+1+a^2 = 2$

$2a^2 - 2a - 1 = 0$

$D = 4+8 = 12$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100550**

ID профиля: **844259**

Вариант 17

Чистовик № 1 Вариант 17

№4) $\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=2\cdot 3 \\ \text{НОК}(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$ Пусть $a=2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}$
$b=2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}$
$c=2^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3}$

Тогда из системы получаем:

$$\begin{cases} \min(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)=1 \\ \min(\beta_1;\beta_2;\beta_3)=1 \\ \max(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)=15 \\ \max(\beta_1;\beta_2;\beta_3)=16 \end{cases}$$

Пусть $\alpha_1\leq\alpha_2\leq\alpha_3$, но $\alpha_1\neq\alpha_3$
$\beta_1\leq\beta_2\leq\beta_3$ но $\beta_1\neq\beta_3$
Т.к система симметрична относительно перестановок $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ / $\beta_1 \beta_2 \beta_3$

То мы можем рассмотреть этот случай, а потом посчитать кол-во способов „поменять их местами"

Тогда $\min(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)=1=\alpha_1$ $\min(\beta_1;\beta_2;\beta_3)=1=\beta_1$
$\max(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)=15=\alpha_3$ $\max(\beta_1;\beta_2;\beta_3)=16=\beta_3$

$\alpha_2\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$ $\beta_2\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$

Значит кол-во $(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$ – 15, $(\beta_1;\beta_2;\beta_3)$ – 16. Но ведь возможны и другие порядки следования помимо $\alpha_1\leq\alpha_2\leq\alpha_3$, $\beta_1\leq\beta_2\leq\beta_3$. Тогда кол-во $(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$ – 90 и $(\beta_1;\beta_2;\beta_3)$ – 96. Итоговым ответом будет являться произведение: $90\cdot 96$. Тк каждому набору $(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$ мы можем сопоставить любой набор $(\beta_1;\beta_2;\beta_3)$. И мы ничего не посчитаем более 1 раза. Ответ: $90\cdot 96$.

"Чистовик" 2 Вариант 17

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

Для начала напишем ограничения на x.

$\begin{cases} 5x-1>0 \\ 5x-1\neq 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} 4x+1>0 \\ 4x+1\neq 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \end{cases}$ и $\begin{cases} x>-\frac{1}{4} \\ x\neq 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x>-4 \\ x\neq -2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x\in\left(\frac{1}{5};+\infty\right)\setminus\left\{\frac{2}{5}\right\}$

Тогда мы можем вынести степень $\frac{1}{2}$ из основания 1 логарифма и степень 2 из аргумента второго. Модули или что-то иное не нужны, т.к на ограничениях знак раскрывается однозначно. Тогда мы получим следующие логарифмы:

$2\log_{(5x-1)}(4x+1)$; $2\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)$; $\log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1)$

Заметим, что если их перемножить, произведение будет равно 4. Тогда если мы обозначим какой-то логарифм за t, мы будем искать x при которых верно следующее выражение

$t\cdot t\cdot(t-1)=4$. $\quad t^3-t^2-4=0$ $\quad (t-2)(t^2+t+2)=0$ (1)

Это я совместил свою находку с условием задачи

(1)$=0$ при $t=2$. Нам остается приравнять каждый логарифм к t и проверить x ~~(на всякий случай)~~ т.к это условие необходимое но недостаточное.

$2\log_{(5x-1)}(4x+1)=2$
$4x+1=5x-1$
$\underline{x=2}$

$2\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)=2$
$\frac{x}{2}+2=4x+1$
$x+4=8x+2$
$7x=2$
$\underline{x=\frac{2}{7}}$

$\log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1)=2$
$5x-1=\frac{x^2}{4}+4+2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}$
$x^2-12x+20=0$
$\underline{x=10}$
$\underline{x=2}$

Проверка x

$x=2$ $\quad \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2$
$\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=1$ $\quad$ Подходит.
$\log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1)=2$

21100550 (U844259 M1297508)

Чистовик №③ Вариант 17

$x=10$ $\qquad \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=\log_7 41$

$\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=\log_{41}49=2\log_{41}7.$ не подходит

$\log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1)=2$

$x=\frac{2}{7}$ $\qquad \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2\log_{\frac{3}{7}}\frac{15}{7}$

$\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2$ не подходит

$\log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1)=\log_{\frac{15}{7}}\left(\frac{3}{7}\right)$

Ответ: 2.

21100550 (U844259 M1297508)

[redacted] Черновик №1

$НОД(a, b, c) = 6 = 2\cdot 3$

$НОК(a, b, c) = 2^{15}\cdot 3^{16}$

$2^{16}\cdot 3^{16} = a\cdot b\cdot c$

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}$ $b = 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}$; $c = 2^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3}$

$НОД = 2^{\min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}\cdot 3^{\min(\beta_1; \beta_2; \beta_3)}$

$НОК = 2^{\max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}\cdot 3^{\max(\beta_1; \beta_2; \beta_3)}$

№5) $5x - 1 = a$ $2\log_a c$; $2\log_c b$; $\log_b a$

$\frac{x}{2} + 2 = b$ $2\log_a c = \log_b a = 2\log_c b + 1$

$4x + 1 = c$ $2\log_a$

$2\log_a c = 2\log_c b$

$\log_a c = \log_c b$

$\frac{1}{\log_c a} = \log_c b$

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}$ $b = 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}$ $c = 2^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3}$

$\min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$

$\frac{15}{6}$ $\frac{16}{6}$ $\min(\beta_1; \beta_2; \beta_3) = 1$

90 96

$\max(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3) = 15$

$\max(\beta_1; \beta_2; \beta_3) = 16$

$\alpha_1 = 1$ $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$

$\alpha_3 = 15$ $\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_2$

α_2

1 2 3 $\frac{2}{7} \vee \frac{1}{5}$

10

$5x-1>0 \quad 4x+1>0 \quad \frac{x}{2}+2>0$
$5x-1\neq 1 \quad 4x+1\neq 1 \quad \frac{x}{2}+2\neq 1$

Черновик №2.

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1), \quad \log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2, \quad \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$5x-1=a; \quad 4x+1=b \quad \frac{x}{2}+2=c$

$2\log_a b; \quad 2\log_b c; \quad \log_c a.$

$2\log_a b+\log_c a = 2(\cancel{2}\log_b c+1)$

$2\log_a b+\log_c a=4\log_b c+2.$

$\cancel{2}\log_a b=\cancel{2}\log_b c$

$\log_b c-\frac{1}{\log_b a}=0$

$\log_b c\cdot\log_b a-1=0$

$\log_b c\cdot\log_b a=1$

$\log_b c=\frac{1}{\log_b a}$

$2\log_b c=\log_c a+1$

$2=\log_c a\cdot\log_c b+\log_c b$

$2=\log_c a\cdot\log_b a+\log_c b$

$2=\frac{1}{\log_a c\cdot\log_a b}$

$x>\frac{1}{5} \quad x>-\frac{1}{4} \quad x>-4$

$x\neq\frac{2}{5} \quad x\neq 0 \quad x\neq -2$

$\boxed{x>\frac{1}{5}}$

$5x-1>4x+1$

$\boxed{x>2}$

$4x+1>\frac{x}{2}+2$

$8x+2>x+4$

$7x>-2$

$\boxed{x>-\frac{2}{7}}$

$\cancel{\log}\ \frac{x}{2}+2>5x-1$

$x+4>10x-2$

$9x<6$

$x<\frac{3}{2}\ \frac{2}{3}$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=\frac{1}{\log_{(4x+1)}(5x-1)}$

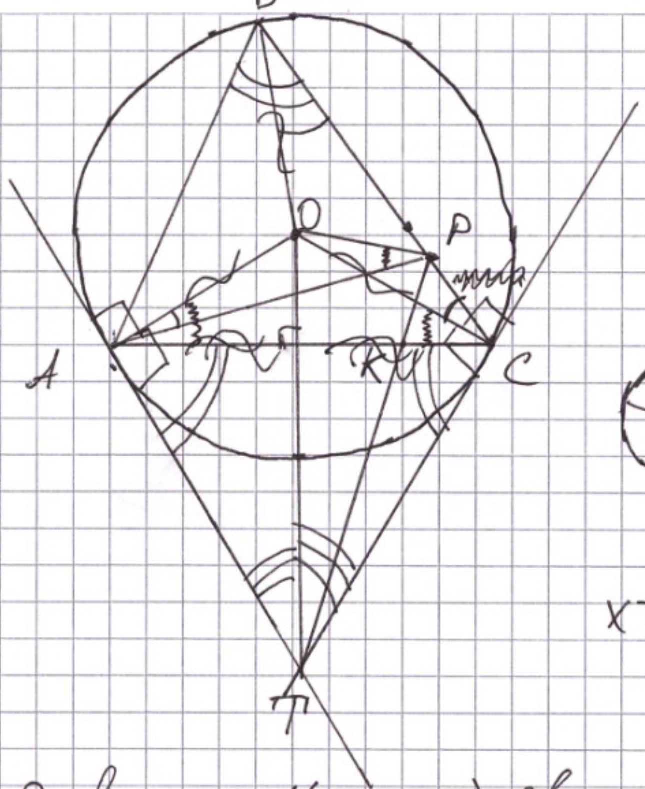
$\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\log_{(4x+1)}(5x-1)=1$

$2\log_{5x-1}(\cancel{4x+1})-2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=4$

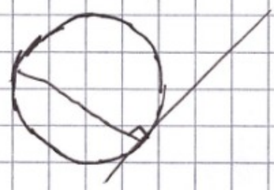
$\frac{8}{7}+\frac{7}{7}=\frac{15}{7} \quad \frac{1}{7}+$

21100550 (U844259 M1297508)

Черновик к 3.



$$\frac{AK}{KC}=\frac{3}{2}$$



$x > \frac{1}{5}$

$2\log_{5x-1}(4x+1),\ 2\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)\ \log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1)$

$2\log_a b,\ 2\log_b c,\ \log_c a$

$\log_a b=\log_b c$ $\qquad \begin{cases}2\log_a b=\log_c a\\ 2\log_a b-2\log_b c=1\end{cases}$

$$2\log_{5x-1}(4x+1)=\log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1)$$

$$2\log_{(5x-1)}(4x+1)=\frac{1}{\log_{(5x-1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)}$$

$$2\log_{(5x-1)}(4x+1)\cdot\log_{(5x-1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)=1$$

$5x-1>4x+1$ $\qquad$ $5x-1>1$

$x>2$ $\qquad$ $x>\frac{2}{5}$

Черновик №4.

$$2\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=a$$

$$2\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)=b$$

$$\log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1)=c$$

$$4\cdot\log_{(5x-1)}(4x+1)\cdot\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)}(5x-1)=$$

$$=4$$

$$x\cdot x\cdot(x-1)=4$$

$$x^3-x^2=4$$

$$x^3-x^2-4=0$$

$$\cancel{(x-2)(x^2+x)}$$

$$(x-2)(x^2+x+2)=x^3-2x^2+x^2\cancel{-2x}\cancel{+2x}-4$$

$$x=2 \qquad 8-8 \qquad x^3-x^2-4$$

21100550 (U844259 M1297508)