Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100524**

ID профиля: **344555**

Вариант 17

Вариант 17

1) d – разность прогрессии

Т.к. последовательность возрастающая и $a_1, a_2, a_3 \ldots$ – целые числа, то d – целое число, $d \geq 1$.

$$S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 10a_1 + 45d$$

$a_{10} = a_1 + 9d$

$a_6 = a_1 + 5d \qquad a_7 = a_1 + 6d$

$a_{12} = a_1 + 11d \qquad a_{11} = a_1 + 10d$

$a_6 \cdot a_{12} = a_1^2 + 16da_1 + 55d^2 > S+1$

$+$

$S + 17 > a_{11} \cdot a_7 = a_1^2 + 16da_1 + 60d^2$

$\cancel{S} + 17 + \cancel{a_1^2} + \cancel{16d}a_1 + 55d^2 > \cancel{S} + 1 + \cancel{a_1^2} + \cancel{16d}a_1 + 60d^2$

$5d^2 < 16$

$d^2 < \frac{16}{5}$

$d < \frac{4}{\sqrt{5}} \quad \sqrt{5} > 2 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{5}} < 2 \; ; \; d \geq 1 \Rightarrow d = 1$

$a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 46$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 = (a_1+3)^2 > 0 \Rightarrow \underline{a_1 \neq -3}$

$a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 62$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$

$D = 36 + 8 = 44 = 4 \cdot 11 \; ; \; a_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{11}}{2} = -3 \pm \sqrt{11} \quad 3 < \sqrt{11} < 4$

$\underline{a_1 \in [-6 \; ; \; 0] \quad a_1 \in \mathbb{Z}}$

Ответ: $-6; -5; -4; -2; -1; 0.$

Чистовик

Лист 1 из 2

Вариант 17

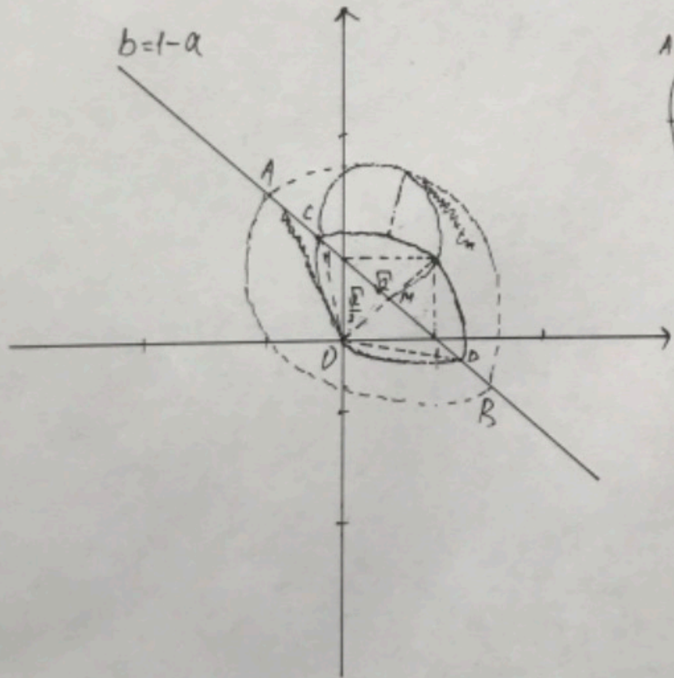
③ Представим a и b, как точки на плоскости.

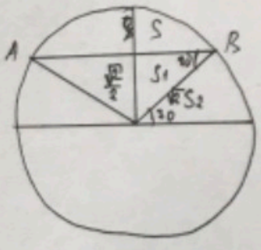
$2a+2b \geq 2$

$a+b \geq 1$

$b \geq 1-a$ − прямая

Тогда для точек a и b, лежащих выше это прямой, должно выполняться условие: $a^2+b^2 \leq 2$ − окружность с центром в $(0;0)$ и $R=\sqrt{2}$, для точек ~~лежащих~~ a и b, лежащих ниже это прямой, должно выполняться условие $a^2+b^2 \leq 2a+2b \Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2 \leq 2$ − окружность с центром в $1;1$ и радиусом $\sqrt{2}$.





$$\frac{\pi R^2}{4} = S+S_1+S_2$$

$$\frac{\pi R^2}{4} = S+S_1+\frac{\pi R^2}{12}$$

$$\frac{\pi R^2}{6} = S + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 60 =$$

$$= S + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S = \frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi+3\sqrt{3}}{12}$$

~~Рассмотрим~~ Перейдём к неравенству $(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 2$ − окружность с центром в точке $(a;b)$ и радиусом ~~окружн~~ $\sqrt{2}$. Рассмотрим множество окружностей с центрами на ~~..~~ контуре фигуры, ограничивающей множество точек $(a;b)$ на плоскости (на рисунке − черный сплошной контур), ~~...~~ тогда фигура, образованная множеством $(x;y)$, удовлетворяющих условию неравенства состоит из двух частей окружности радиуса $2\sqrt{2}$. Сумма площадей которых равна $4S$

Ответ: $\frac{4\pi+3\sqrt{3}}{3}$

Чистовик

Лист 2 из 2

a^2-2a

$2a+2b \geq 2$

$a+b \geq 1$

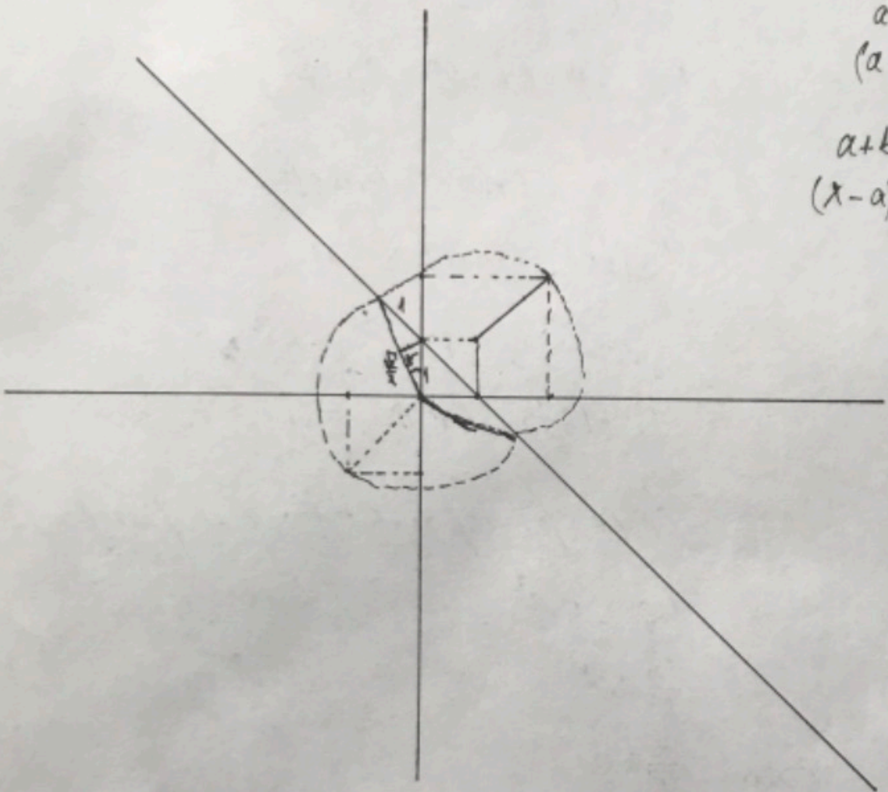
$b \geq 1-a$

$a^2-2a+1+b^2-2b+1 \leq 2$

$(a-1)^2+(b-1)^2 \leq 2$

$a+b=1$

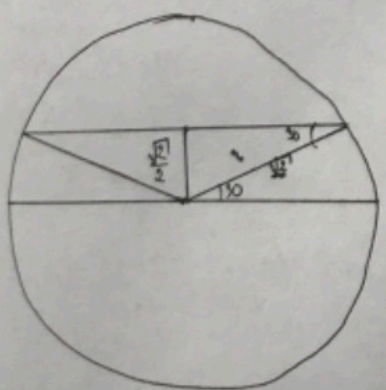
$(x-a)^2+$



$MD^2 = 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$MD=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$MB=$



Черновик

a_1 $\cancel{S = \frac{a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 5a_1}$

d

$$S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 5 \cdot (2a_1 + 9d) = 10a_1 + 45d = 10a_1 + 45$$

$a_{10} = a_1 + 9d$

$(a_1+5d) \cdot (a_1+11d) > S+1$ $\cancel{10a_1+45d}$

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$(a_1+10d) \cdot (a_1+6d) < S+17$

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$S + 17 > (a_1+10d) \cdot (a_1+6d)$

$(a_1+5d) \cdot (a_1+11d) > S+1$

$+$ $S+17 > a_1^2 + 16da_1 + 60d^2$

$a_1^2 + 16da_1 + 55d^2 > S+1$

$\cancel{S} + 17 + \cancel{a_1^2} + \cancel{16d}a_1 + 55d^2 > \cancel{S} + 1 + \cancel{a_1^2} + \cancel{16d}a_1 + 60d^2$

$16 > 5d^2$

$\frac{16}{5} > d^2$

$\sqrt{5} > 2 \Rightarrow$ $\frac{4}{\sqrt{5}} > d$

$\Rightarrow d = 1$

$(a_1+5) \cdot (a_1+11) = a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 46$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$

$(a_1+3)^2 > 0$

$a_1 \neq -3$

$(a_1+10) \cdot (a_1+6) = a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 45 + 17 = 10a_1 + 62$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$

$D = 36 + 8 = 44$

$a_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{11}}{2} = -3 \pm \sqrt{11}$

$3 < \sqrt{11} < 4$

$a_1 \in [-6; 0]$ $a_1 \neq -3$

Черновик

$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 2$ - окружность с центром в точке $(a;b)$

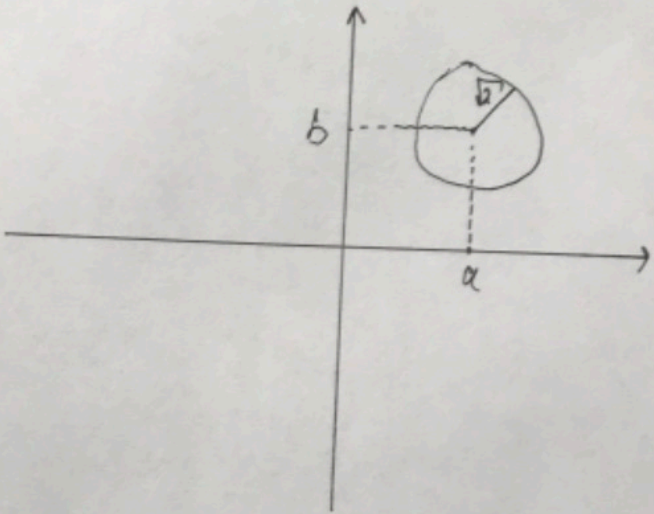
$a^2+b^2 \leq \min(2a+2b, 2)$

$2a+2b \geq 2$

$a+b \geq 1$

$a^2+b^2 \leq 2a+2b$

$a\cdot(a-2)+b\cdot(b-2) \leq 0$



$f(a)\ a^2-2a$

$f(a)' = 2a-2 = 0 \quad a = 1$

$x_B = \frac{2}{2} = 1$

-1

$a(a-2)$

$a^2-2a-1 \geq 0$

$D = 4+4 = 4\cdot 2$

$a_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$a \in [1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}]$

$b \in [1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}]$

$a^2+b^2 \leq 2$

$(a^2-1)+(b^2-1) \leq 0$

$a-1$

$2a$

$a^2-1 > 1$

$a^2-2 \geq 0$

$a \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

$b \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

$2a+2b \geq 2$

$a+b \geq 1$

Черновик

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100524**

ID профиля: **344555**

Вариант 17

Вариант 17

5

Рассмотрим 3 случая:

1) $K = \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)+1$

$5x-1>0$; $x>\frac{1}{5} \Rightarrow 4x+1>1$; $\frac{x}{2}+2>1$

$5x-1\neq 1 \Rightarrow x\neq\frac{2}{5}$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\cdot\left(\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)+1\right)=$

$=4\cdot\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\left(\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)+1\right)=4+4\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=K^3$

$t=\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$ $t=-1$

$4+4t=\left(\frac{1}{t}+1\right)^3$ $\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=-1$

$4\cdot(1+t)=\frac{(1+t)^3}{t^3}$ $x+4=\frac{2}{5x-1}$

$5x^2+20x-x-4=2$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=4\cdot\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=K^2=\left(\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)+1\right)^2$

$t=\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$4t=\left(\frac{1}{t}+1\right)^2=\frac{(t+1)^2}{t^2}$ $t\neq0$, т.к. подлогарифметное выражение >1

$4t^3-t^2-2t-1=(t-1)\cdot(4t^2+3t+1)$

$t=1$ $t\in\varnothing$

$5x-1=\frac{x}{2}+2$ $10x-2=x+4$

$\cancel{4x=3}$ $9x=6$

$\cancel{x=\frac{3}{4}}$ $x=\frac{2}{3}$

$x=\frac{2}{3}$ не подходит при подстановке

2) $K=\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2+1=\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(4x+1)=K^2=\left(2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)+1\right)^2$

Чистовик Лист 1/3

$t = \log_{\frac{x}{2}+2}(4x+1)$

$2t = \left(\frac{2}{t}+1\right)^2$

$2t = \frac{(t+2)^2}{t^2}$

$2t^3 = t^2+4t+4$

$2t^3 - t^2 - 4t - 4 = 0$

$(t-2)\cdot(2t^2+3t+2) = 0$

$t = 2 \qquad t \in \varnothing$

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 4x+1$

$(x+\cancel{2}4)^2 = 16x+4 \qquad x^2+8x+16 = 16x+4$

$x^2 + \cancel{4}8x + \cancel{4}16 = 16x + \cancel{4} \qquad x^2 - 8x + 12 = 0$

$\cancel{x^2 - 12x = 0} \qquad D = 64 - 48 = 16$

$\cancel{x(x-12) = 0} \qquad x_{1,2} = \frac{8 \pm 4}{2}$

$\cancel{x = 0 \vee x = 12} \qquad x_1 = 2;\ x_2 = 6$

$x = 6$ не подходит при подстановке

3) $k = \log_{5x-1}(4x+1)+1 = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2\log_{4x+1}(5x-1) = k^2 = \left(2\log_{5x-1}(4x+1)+1\right)^2$

$t = \log_{4x+1}(5x-1)$

$2t = \left(\frac{2}{t}+1\right)^2 = \frac{(t+2)^2}{t^2}$

$(t-2)\cdot(2t^2+3t+2) = 0$

$t = 2 \qquad t \in \varnothing$

$(4x+1)^2 = 5x-1$

$16x^2+8x+1 = 5x-1$

$16x^2+3x+2 = 0$

$D < 0 \Rightarrow x \in \varnothing$

Ответ: [illegible] 2.

(4) НОД$(a;b;c) = 6$, тогда $a = 6 \cdot K_1$; $b = 6 \cdot K_2$; $C = 6 \cdot K_3$

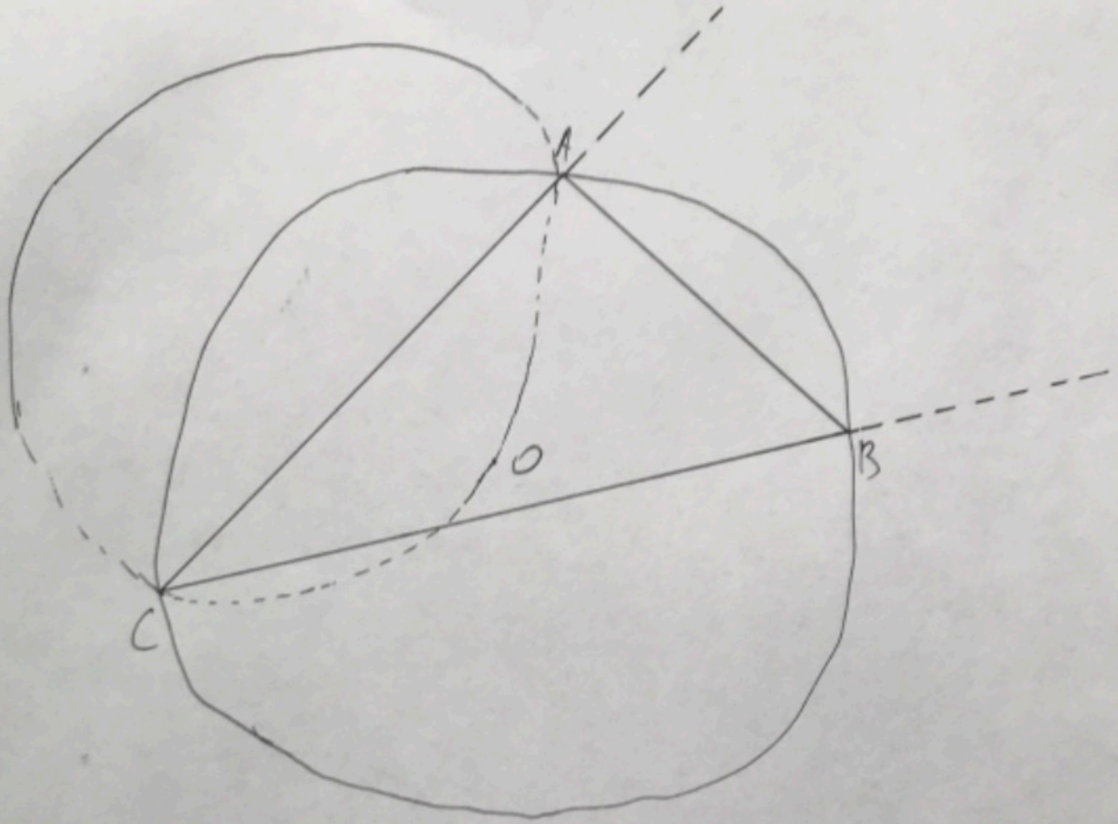
НОК$(a;b;c) = 2^{15} \cdot 3^{16} \Rightarrow a = 2^i \cdot 3^j$; $b = \ldots$; $c = \ldots$, но т.к. НОД чисел $a, b, c = 6$, то степень двойки или тройки ≥ 1 может содержаться только в 2 из них.

НОД$(a;b;c) = 6 \Rightarrow$ надо распределить 2^{14} и 3^{15} по K_1; K_2 и K_3

Выберем сначала 2 числа в ~~которых степень двойки~~ между которыми будем распределять степени двойки. 14 в сумме можно получить 8 различными способами $(7+7; 6+8 \ldots) \Rightarrow$ всего вариантов разбиения $C_3^2 \cdot 8$, Аналогично число разбиений для 3^{15} $C_3^2 \cdot 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего ~~сп~~ способов $- (C_3^2 \cdot 8)^2 = (24)^2 = 576$

Ответ: 576.



$S_\Delta \quad \frac{3}{8}+2 \quad \frac{13}{8}$

$2\cdot\log_{\frac{11}{4}}(4) \quad 2\ 4\log_{\frac{11}{4}} 2$ $\qquad 2\log_{\frac{7}{3}}\frac{11}{3}$

$2\log_4\frac{13}{8} \qquad \log_2\frac{13}{8} > 1$ $\qquad 2\log_{\frac{11}{3}}\frac{7}{3}$

$\log_{\frac{11}{4}}\frac{13}{8} \qquad \log_{\frac{13}{8}}\frac{11}{4}+1$

$\log_3 9 \quad \log_3 9 \quad \log_3 9$ $\qquad \frac{2}{6}+2 \quad \frac{14}{6}=\frac{7}{3}$

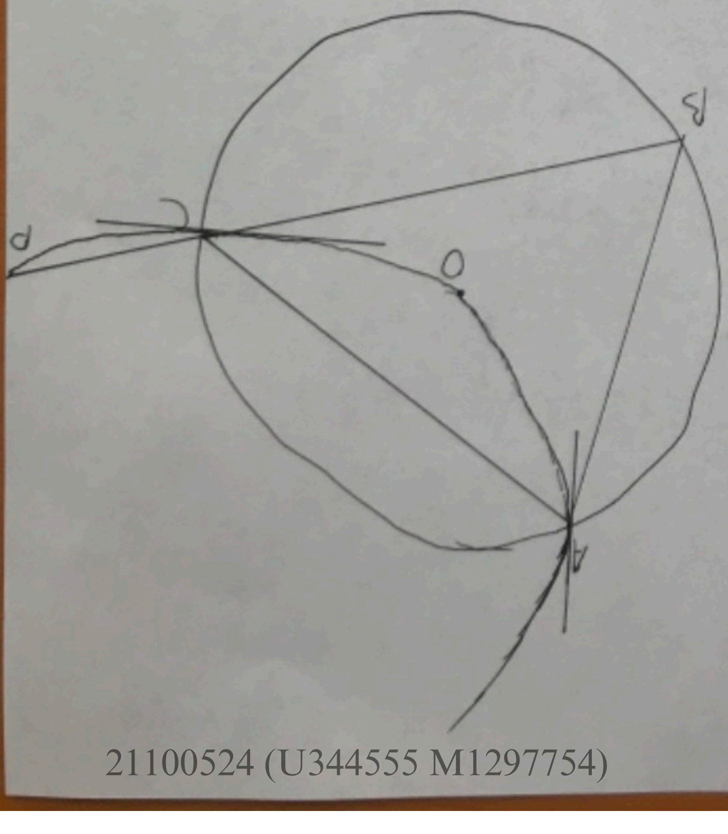
2 $\qquad \frac{7}{3} \quad \frac{7}{3}$

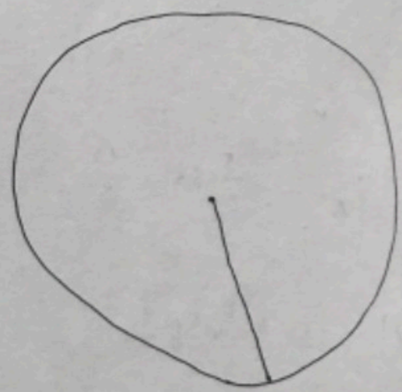
$\log_{\sqrt{23}}(25)$

$2\log_{23}(25) \qquad \log_5 23$

21100524 (U344555 M1297754)

Чумовик.

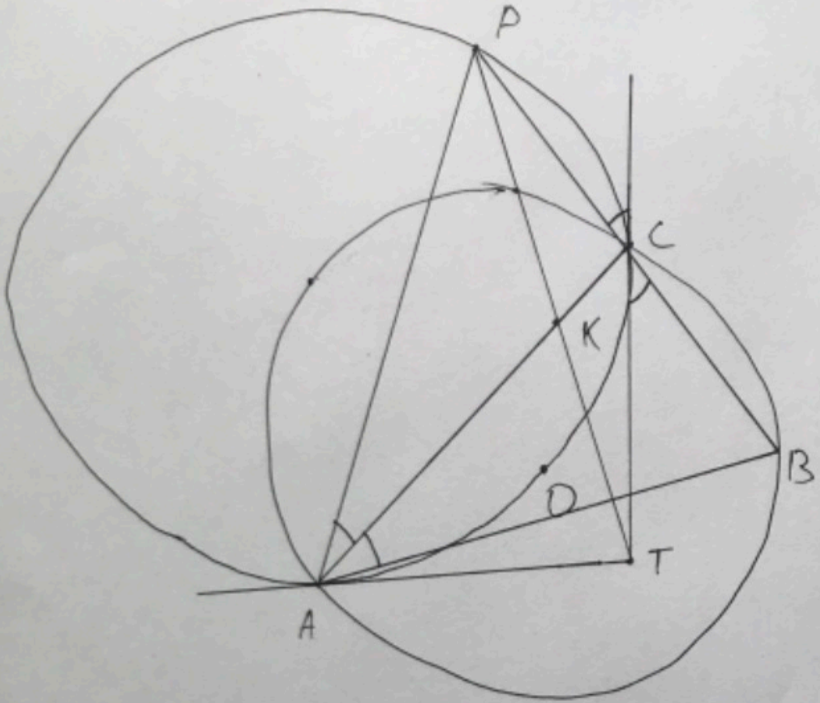




Черновик

$S_{\Delta APK} = 6$

$S_{\Delta CPK} = 4$



Черновик

4. $\log_{5x-1}(x+2) = \left(\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)+1\right)^2$

$4t = \left(\frac{1}{t}+1\right)^2 = \frac{(t+1)^2}{t^2}$

$t^2+2t+1 = 4t^3$

$4t^3 - t^2 - 2t - 1 = 0$

$$\begin{array}{l|l} 4t^3 - t^2 - 2t - 1 & t-1 \\ \cline{2-2} -\ 4t^3 - 4t^2 & 4t^2+3t+1 \\ \hline 3t^2 - 2t - 1 & \\ -\ 3t^2 - 3t & \\ \hline t-1 & \end{array}$$

$(t-1)\cdot(4t^2+3t+1) = 0$

$$\begin{array}{l|l} 2t^3 - t^2 - 4t - 4 & t-2 \\ \cline{2-2} -\ 2t^3 - 4t^2 & 2t^2+3t+2 \\ \hline 3t^2 - 4t - 4 & \\ -\ 3t^2 - 6t & \\ \hline 2t-4 & \end{array}$$

$\frac{15}{4} - 1 = \frac{11}{4}$

$\log_{\sqrt{59}}(49)$ $\log_{49} 64$

$\frac{\log_{59} 49}{2}$ $\log_7 8$ $\log_8 59$

$\cancel{\tfrac{1}{2}}\, 2\log_{\frac{11}{4}}(4) = 4\log_{11/4}(2)$

$\log_{42}($

Черновик

21100524 (U344555 M1297754)

4) $НОД(a;b;c)=6$ $a=6\cdot K_1$

$НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16}$ $b=6\cdot K_2$

$c=6\cdot K_3$

0	14
1	13
2	12
3	11
4	10
5	9
6	8
7	7

$2^{14}\cdot 3^{15}$

0	15
1	14
2	13
3	12
4	11
5	10
6	9
7	8

$C_{13}^{2}\cdot \cancel{7}8 \quad C_{13}^{2}\cdot 8$

$24 \times 24 = 96 + 48 = 576$

5) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)+\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2+\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)+1=3K$

$2\cdot\log_{5x-1}(4x+1)+2\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$2\cdot\left(\frac{1}{\log_{4x+1}(5x-1)}+\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\right)$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)\cdot\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\cdot\left(\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)+1\right)$

$\log_{\sqrt{5x-1}}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\left(\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)+1\right)$

$4\cdot\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\left(\log_{\frac{x}{2}}(5x-1)+1\right)=4+4\cdot\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=$

$4\cdot\left(\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)+1\right)=\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)+1$

черновик

21100524 (U344555 M1297754)