Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100440**

ID профиля: **183834**

Вариант 17

Математика, 11кл.

Чистовик

Вариант 17.

$\boxed{N1}$ По условию сказано, что последовательность является возрастающей $\Rightarrow q>0$. А также сказано, что любой a_i данной последовательности $\in \mathbb{Z}$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Если $a_1 \in \mathbb{Z}$, и все остальные члены арифметической последовательности $\in \mathbb{Z}$, то следует полагать, что $q \in \mathbb{Z}$ и $q>0 \Rightarrow q \in N$ (Иначе члены последовательности будут нецелые).

Тогда пусть a_1 - первый член послед., тогда имеем, что $S = a_1 + (a_1+q) + \dots + (a_1+9q) = 10a_1 + 45q$.

Из условия известно:

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{12} > S+1 \\ a_7 \cdot a_{11} < S+17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+5q)(a_1+11q) > 10a_1+45q+1 \\ (a_1+6q)(a_1+10q) < 10a_1+45q+17 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a_1^2 - 16a_1 \cdot q - 55q^2 < -10a_1 - 45q - 1 \\ a_1^2 + 16a_1 \cdot q + 60q^2 < 10a_1 + 45q + 17 \end{cases} \oplus$$, сложим 2 неравенства, получим $5q^2 < 16 \Leftrightarrow q^2 < \frac{16}{5} = 3,2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow q \in (-\sqrt{3,2}; \sqrt{3,2})$. Заметим, что $\sqrt{3,2} < \sqrt{4} = 2$, а также $q \in N \Rightarrow$ единственное целое натуральное значение, которое нам подходит, это $q = 1$.

Но тогда условие задана равносильно системе:

$$\begin{cases} (a_1+5)(a_1+11) > 10a_1+46 \\ (a_1+6)(a_1+10) < 10a_1+63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \\ a_1 + 6a_1 - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -3 \\ a \in (-3-\sqrt{12}; -3+\sqrt{12}) \end{cases}$$. Заметим, что $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

(продолжение на стр 2)

(N1 продолжение)

$\Rightarrow$ т.к $3 < \sqrt{12} < 4 \Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ a_1 \in \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0\} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1$ может равняться $-6, -5, -4, -2, -1, 0$.

Ответ: $\boxed{a_1 = -6;\ a_1 = -5;\ a_1 = -4;\ a_1 = -2;\ a_1 = -1;\ a_1 = 0.}$

2

Чистовик Математика. 11 кл.

Вариант 17

$\boxed{N2}$

Заметим, что если CD || оси цилиндра, то Также заметим, что (·)C - равноудалена от отрезка AB, и (·)D также равноудалена от отрезка AB => если CD || оси цилиндра, то отрезок AB ∈ окружности являющейся сечением цилиндра, эта окружность || основаниям цилиндра (пояснение на рисунке N1)

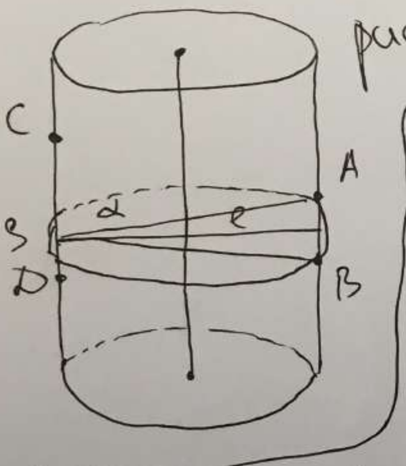


рисунок N1. Но тогда заметим, что радиус окружности зависит от серединного перпендикуляра к стороне AB => очевидно, что наименьший радиус данной окружности достигается, когда △ABS - равносторонний со стороной 2, и окружность описана вокруг данного треугольника.

Мы поняли когда достигается наименьший радиус теперь посчитаем все возможные отрезки, которые могут быть в данной конструкции (отрезки CD)

3

1) Либо (·)C и (·)D по разные стороны от плоскости окружности || основанию (плоскость α - рисунок N1) (продолж. стр. N4)

(N2 продолжение)

Тогда ~~сд~~ $CD = \sqrt{25-3} + \sqrt{36-4} = \boxed{\sqrt{32}+\sqrt{21}}$

2) Либо (·)C и (·)D по ~~разные~~ одну сторону от α => $CD = \boxed{\sqrt{32}-\sqrt{21}}$

Ответ: $CD = \sqrt{32}+\sqrt{21}$ либо $CD = \sqrt{32}-\sqrt{21}$.

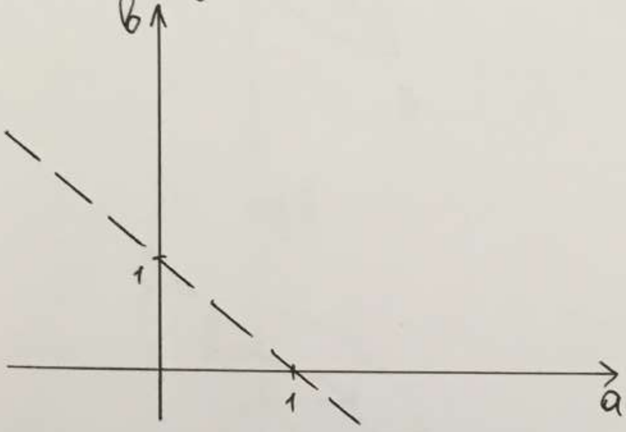
4

Чистовик Математика, 11 кл.

Вариант 17

$\boxed{N3}$

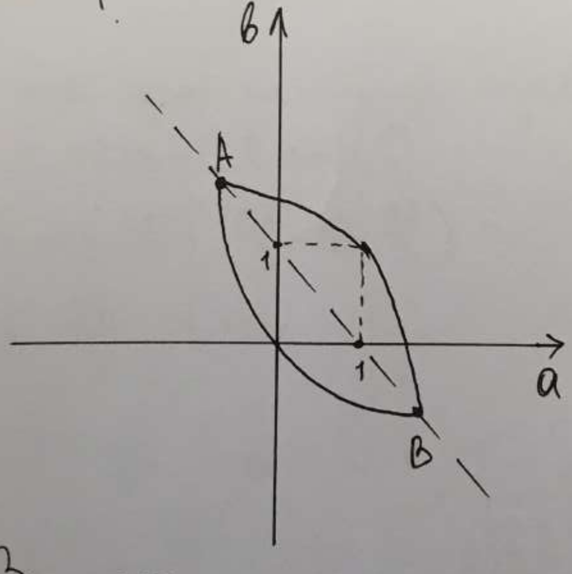
Рассмотрим множество (a, b), удовлетворяющее второму условию: $a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2)$.



Воспользуемся методом плоскостей и заметим, что прямая $a+b=1$ разделяет плоскость на 2 части (полуплоскости), где $a^2+b^2 \le 2$ или $a^2+b^2 \le$ $\le 2a+2b$.

Но тогда $a^2+b^2 \le 2$ (для $a+b>1$) или $a^2+b^2 \le 2a+2b$
$(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2$
(для $a+b \le 1$).

Построим:



Но это 2 сегмента окружности с радиусом $\sqrt{2}$ и общей хордой AB, где:

$A=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$; $B=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$,

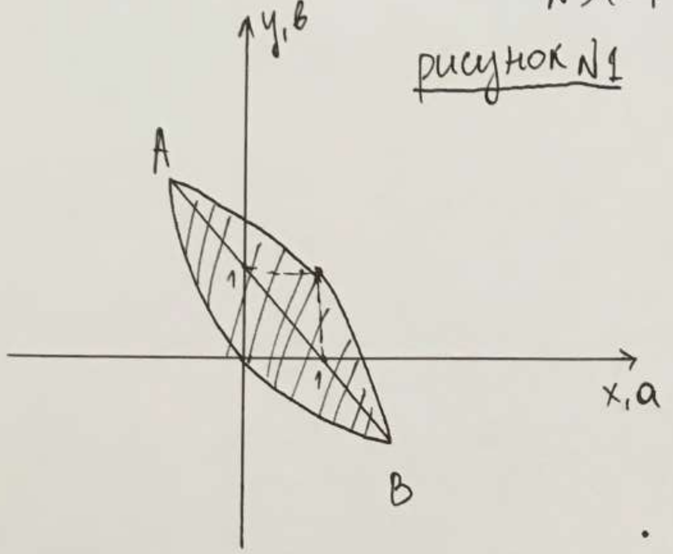
из $\begin{cases} a^2+b^2=2 \\ a+b=1 \end{cases}$ и $\begin{cases} (a-1)^2+(b-1)^2=2 \\ a+b=1. \end{cases}$

5

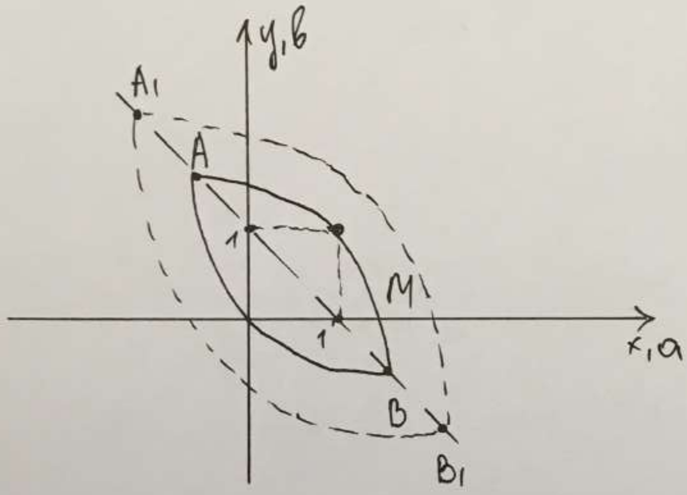
Заметим, что:

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$ - является семейством окружностей для всех возможных (a, b). Тогда заштрихованная фигура (рисунок N1 на следующую стр) является семейством центров окружностей радиуса $\sqrt{2}$.

N3 (продолжение)



Но фигура M является подобной изначальной фигуре, состоящей из 2-х сегментов окружности, т.к тоже образует два сегмента с общей хордой (рисунок N2)



Тогда вычислим площадь фигуры M как площадь подобной. $K = \frac{A_1B_1}{AB} =$

$= \frac{AB + 2\sqrt{2}}{AB} = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{AB} =$

$= 1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\left(2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} =$

$= 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$

Найдем площадь изначальной фигуры:

$c = AB = 2R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$\boxed{\begin{gathered}\sqrt{6} = 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \alpha = \frac{2\pi}{3}\end{gathered}}$$

$S = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) =$

$= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Тогда $S_M = S \cdot K^2 \Rightarrow S_M = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 =$

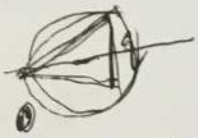
$= \left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}\right)\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \boxed{\frac{28\pi - 21\sqrt{3} - 36 + 16\pi\sqrt{3}}{18}}$

Ответ: $S_M = \frac{28\pi - 21\sqrt{3} - 36 + 16\pi\sqrt{3}}{18}.$

6

Черновик

$a^2+b^2 \le \min(2(a+b),2)$



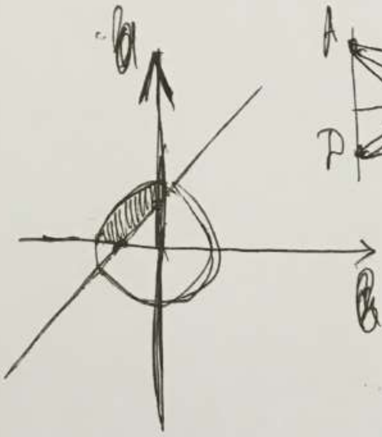
$4\cdot 8$ $32 < 25+7$

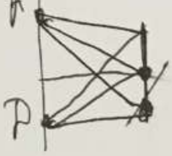
18

$3\cdot 9$

$27 > 26.$

при $a+b \ge 1$





$a \ge b+1$

$a+b \le 1$

$\frac{7\cdot 8}{2} = \frac{56}{2}$

$28-3=25$

1 2 3 4 5 6

$-2-1+0+1\ldots\ldots+7=S$

$S=25$

48

$D = 36+4\cdot 3 = 24.$

$q < \pm\sqrt{3}, 1$

$q=-1$ $q=0$ $q=1$ $(a_1+3)^2$

$(a_1 \ne -3)$

$0{,}5$ $45+17$ $\sqrt{4\cdot 12}$

$2\sqrt{12}$

$a_1 + a_1 + 1$

$10a_1 + 45$

$$\begin{cases} a_1^2+6a_1+9>0 \\ a_1^2+6a_1-3<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+5)(a_1+11) > 10a_1+46 \\ (a_1+6)(a_1+10) < 10a_1+63 \end{cases}$$

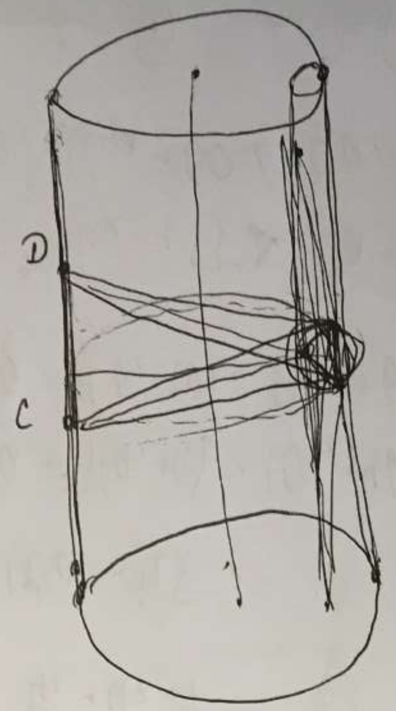
$$\begin{cases} (a_1+3)^2>0 \\ \end{cases}$$

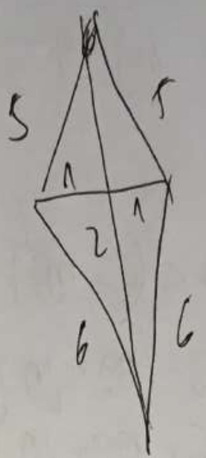
$$\begin{cases} a_1^2+16a_1+55 > 10a_1+46 \\ a_1^2+16a+60 \le 10a_1+63 \end{cases}$$

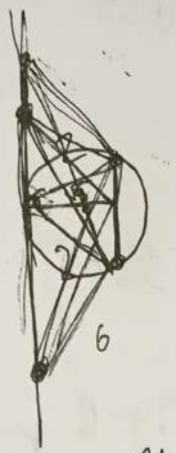
$\frac{-6+\sqrt{48}}{2}$ $\frac{-6-\sqrt{48}}{2}$

$-3+\sqrt{12}$ $-3-\sqrt{12}$

$[-6;0]/\{-3\}$







$25-4=\sqrt{21}$

$4\sqrt{24}$

$36-4=32$

$24 \cdot\cdot \quad \sqrt{21}.\ \sqrt{32}.$

$\sqrt{21}+\sqrt{32},$

Черновик

Черновик

$a^2+b^2 \le \min(2(a+b), 2)$

$\frac{9\cdot 80}{2}$ $(a_1+5q)(a_1+11q) >$

45

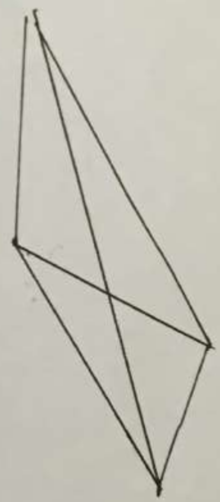
S -

$a_1, a_1+q, \ldots, a_1+9q$

$10a_1+45q=S$

$(a_1+5q)(a_1+11q) > 10a_1+45q+1$

$(a+6q)(a_1+10q) < 10a_1+45q+17$



$a_1^2+11a_1q+55q^2+5qa_1 > 10a_1+45q+1$

$a_1^2+10a_1q+6qa_1+60q^2 < 10a_1+45q+17$

$$\begin{cases} -\cancel{a_1^2}-\cancel{16a_1q}-55q^2 < -\cancel{10a_1}\cancel{-45q}-1 \\ \cancel{a_1^2}+\cancel{16a_1q}+60q^2 < \cancel{10a_1}+\cancel{45q}+17 \end{cases} \oplus$$

>0

$5q^2 \le 16.$

$q^2 < \frac{16}{5} = 3{,}2$

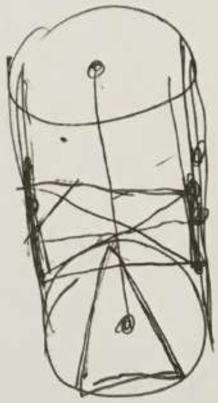
$q^2 < \sqrt{3{,}2}$

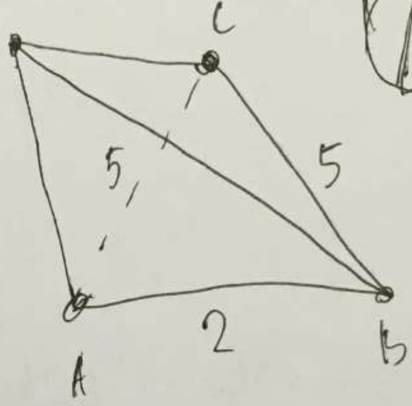
Черновик

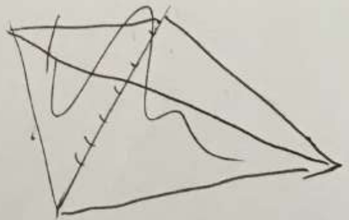
N1

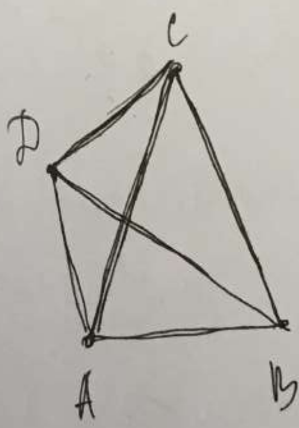
N2 +

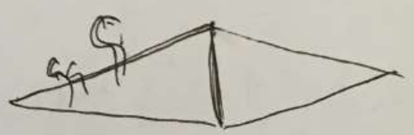
N3 +

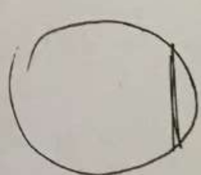












Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100440**

ID профиля: **183834**

Вариант 17

Чистовик Математика, 11 кл.

Вариант 17

N4

Если $НОД(a, b, c) = 6$, то

$a_1 \in N$, если $a_1 = \frac{a}{6}$, аналогично

$b_1 \in N$, если $b_1 = \frac{b}{6}$,

$c_1 \in N$, если $c_1 = \frac{c}{6}$.

Тогда $НОК(a_1, b_1, c_1) = 2^{14} \cdot 3^{15}$

и

$$НОД(a_1, b_1, c_1) = 1$$

Заметим, что это значит, что хотя бы в одном из чисел отсутствует степень двойки в каноничном расположении. Аналогично со степенью тройки. Тогда сначала выберем такое число для двойки 3 вариантами, затем заметим, что можем расположить 14 двоек в двух числах 15-ю способами (= 45 вар), аналогично для троек имеем $3 \cdot 16 = 48$ вариантов. Всего вариантов: $45 \cdot 48 = 2160$. Заметим, что множество чисел (a, b, c) является биективным отображением множества (a_1, b_1, c_1), т.е. количество вариантов удовлетворяющих условию задачи тоже 2160.

Ответ: 2160 вариантов.

Чистовик Математика, 11 кл.

Вариант 17.

$\boxed{N5}$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \begin{cases} \sqrt{5x-1} > 0 \\ \sqrt{5x-1} \neq 1 \\ 4x+1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x+1 > 0 \\ 4x+1 \neq 1 \\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x}{2}+2 > 0 \\ 5x-1 > 0 \\ \frac{x}{2}+2 \neq 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ x \neq 0 \\ x > -\frac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x > -\frac{1}{4} \\ x \neq -4 \\ x \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > -4 \\ x \neq -2 \\ x > \frac{1}{5} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ x > -\frac{1}{4} \\ x \neq 0 \\ x > \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{5}$$

Заметим, что если: $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = a$,

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = b$,

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = c$, то

$a \cdot b \cdot c = 4$. Если два из этих чисел равны, а третье меньше на 1, то $a = b$; $c = a-1$: $a^2(a-1) = 4$.

Легко „угадать" $a = 2$. $2^2(2-1) = 4$, верно.

Тогда:

$$\begin{array}{r|l} a^3 - a^2 - 4 & a-2 \\ \cline{2-2} -\ a^3 - 2a^2 & a^2+a+2 \\ \cline{1-1} a^2 - 4 & \\ -\ a^2 - 2a & \\ \cline{1-1} 2a - 4 & \\ -\ 2a - 4 & \\ \cline{1-1} 0. & \end{array}$$

②

Но тогда $a^2(a-1) = 4 \Leftrightarrow (a-2)(a^2+a+2) = 0$.

Заметим, что вторая скобка не имеет решений в вещественных числах. (продолжение на стр. N3)

Чистовик Математика, 11 кл.

Вариант 17

N5 продолжение

Тогда условие задачи выполняется если два числа будут равны 2, а третье 1.

Это возможно в трех случаях:

1) $$\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2 \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_{5x-1}(4x+1)=2 \\ 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=2 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-1=4x+1 \\ 4x+1=\frac{x}{2}+2 \\ \frac{x}{2}+2=5x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{2}{3} \\ x=\frac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$$

2) $$\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2 \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=1 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_{5x-1}(4x+1)=2 \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=1 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-1=4x+1 \\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^2=4x+1 \\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^2=5x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=6 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=10 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

3) $$\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=1 \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_{5x-1}(4x+1)=1 \\ 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=2 \\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-1=(4x+1)^2 \\ 4x+1=\frac{x}{2}+2 \\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^2=5x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in\varnothing \\ x=2/7 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=10 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$$

3

Примечание! (на стр N4)

Чистовик Математика. 11 кл.
Вариант 17

N5 продолжение

<u>Примечание!</u> Все расчеты я выполнял на ОДЗ, а также опускал очевидные решения квадратных уравнений и логарифмических уравнений, просто писав равносильные переходы.

В итоге после рассмотрения 3-х возможных случаев. Подходящим оказался лишь 2, при котором $X=2$, значит $X=2$ - искомый ответ.

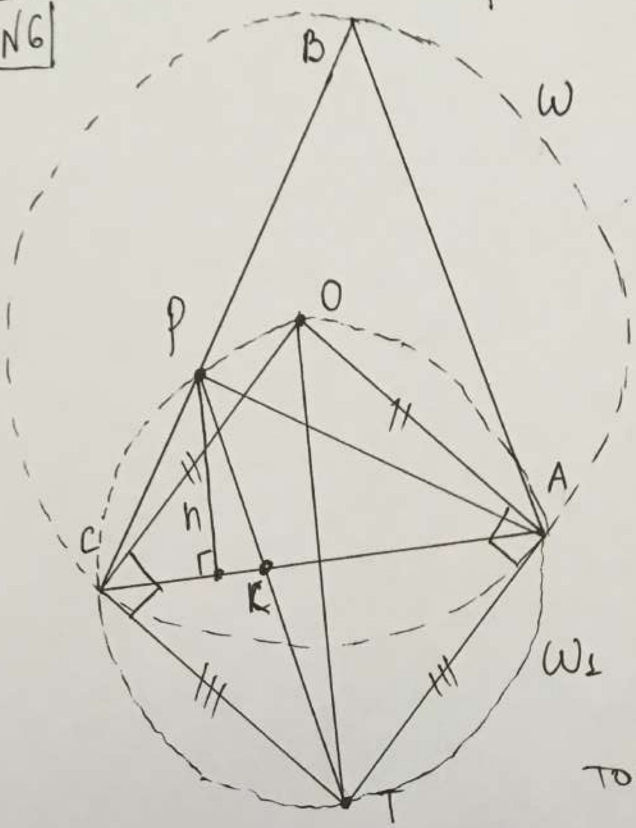
Ответ: при $X=2$

4

Чистовик Математика, 11 кл

Вариант 17

N6



Выведем некоторые факты:

1) Из того, что CT и AT – касательные к окружности ω, то $\angle OCT = \angle OAT = 90^\circ$ (угол между кас и радиусом.

2) Но заметим, что тогда четырехугольник COAT – вписанный (обозначим ω_1)

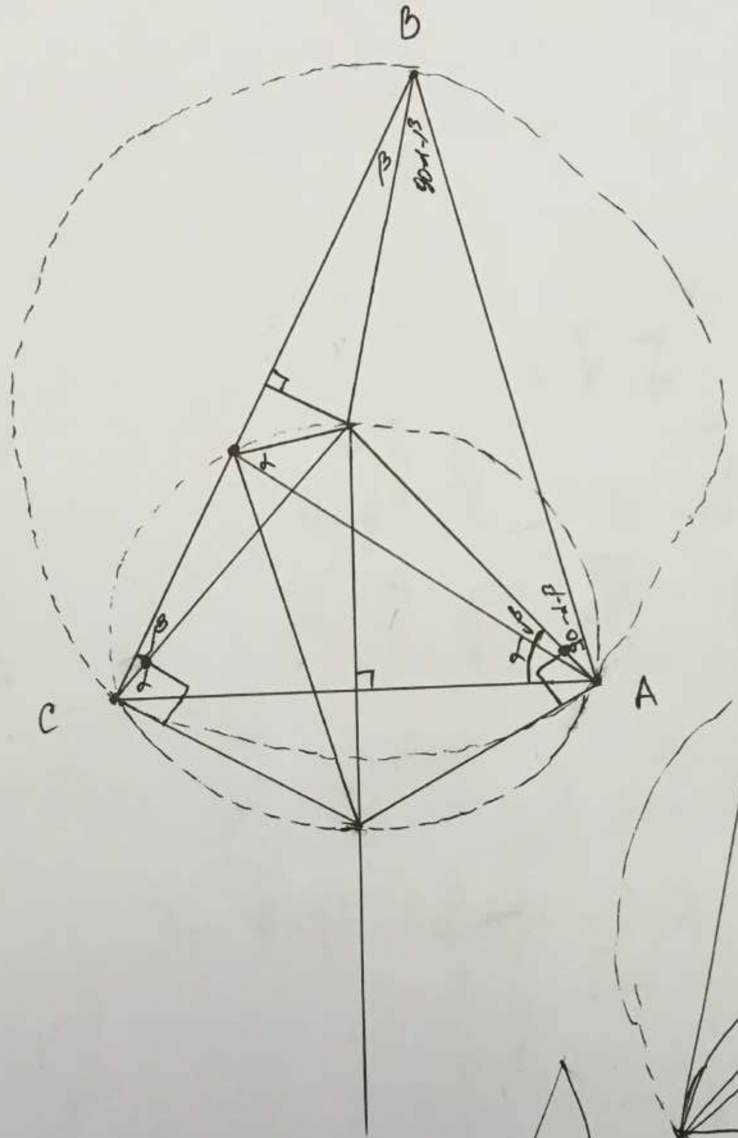
2) Также $S_{CPK} = \frac{1}{2} h \cdot CK$
$S_{APK} = \frac{1}{2} h \cdot AK$ $\Rightarrow$ т.к $S_{CPK} = 4$, а $S_{APK} = 6 \Rightarrow$

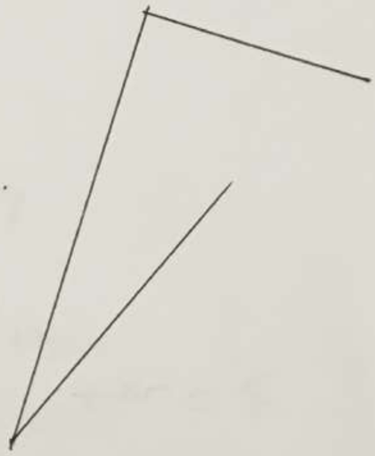
$\Rightarrow \boxed{\frac{AK}{CK} = \frac{3}{2}}$

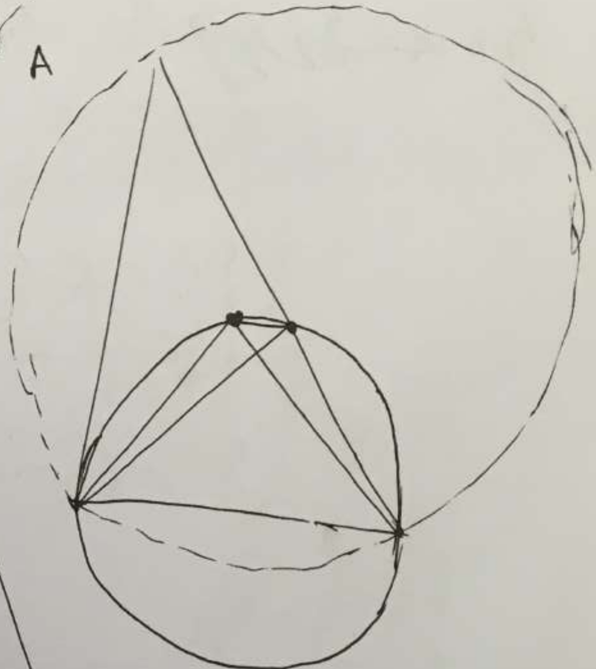
Дальнейших продвижений нет.

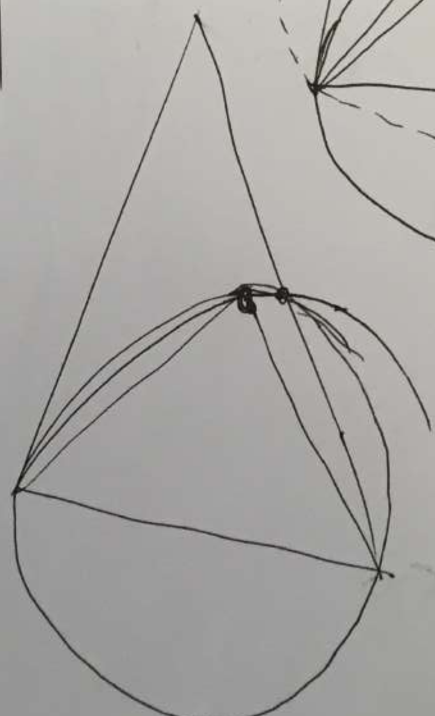
5

Черновик









Черновик

НОД $(a, b, c) = 6$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1}$

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2}$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3}$

a_x $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 15 - 2 = 13 \end{cases}$ $\begin{cases} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = 1 \\ \beta_3 = 16 - 2 = 14. \end{cases}$

$\min \alpha_i = 1$ НОД

$\min \beta_i = 1$ $A = p_1^{\alpha_1}$

$\max \alpha_j = 15$

$\max \beta_j = 16.$ $B = p_1^{\beta_1}$

2 1 2

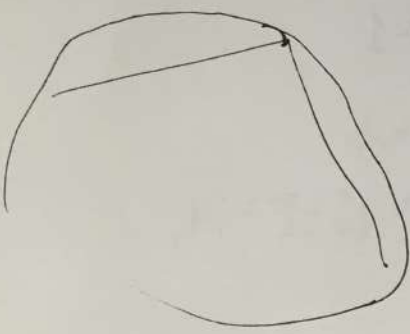
$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$8 = h a_1$$

$$12 = h a_2$$

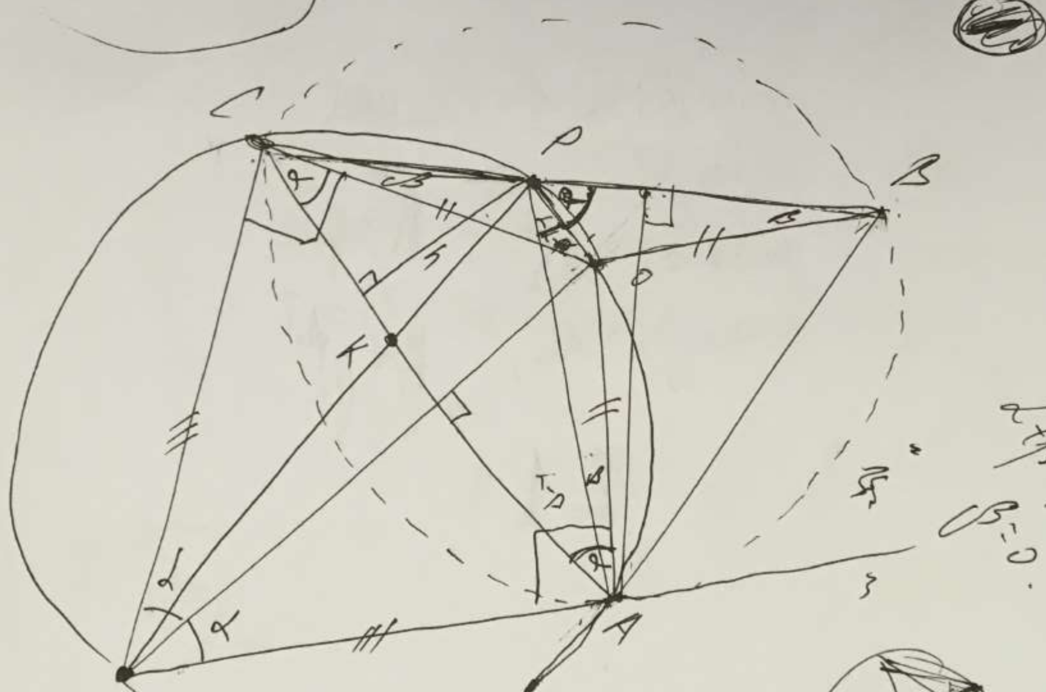
$$4 = \frac{1}{2} h a_1$$

$$6 = \frac{1}{2} h a_2$$



$$S_1 = \frac{1}{2} h a_1$$

$$S_2 = \frac{1}{2} h a_2$$



Черновик

Черновик

$$НОД(a,b,c) = 2^1 \cdot 3^1$$

$$НОК(a,b,c) = 2^{15} \cdot 3^{16}.$$

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \ldots$$

$$b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \ldots$$

$$c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3} \ldots$$

$$НОД(a,b,c) \Rightarrow \min(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 1$$

$$НОК(a,b,c) \Rightarrow \max(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 15$$

$$НОД(a,b,c) \Rightarrow \min(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = 1$$

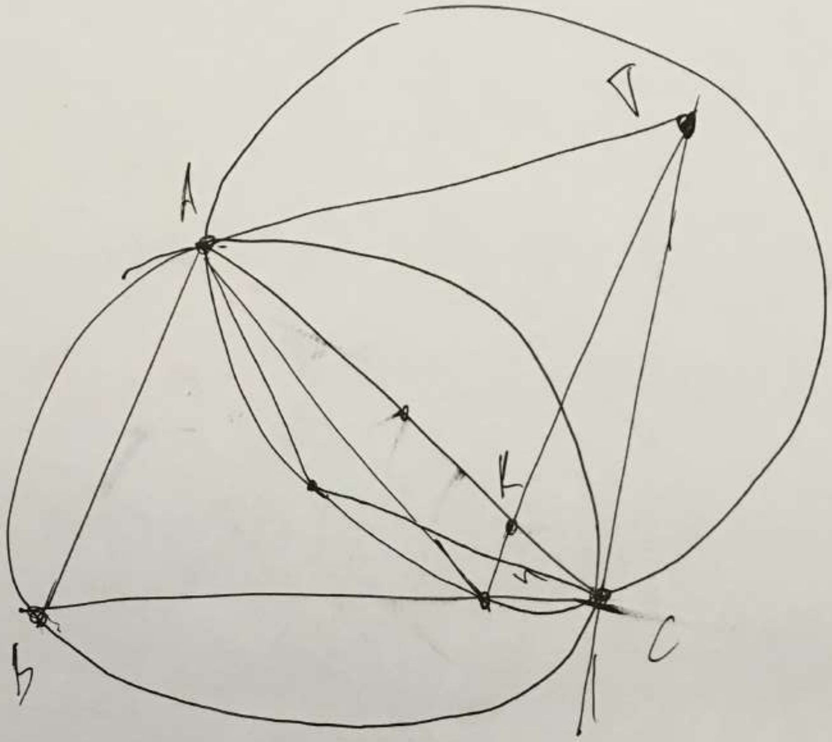
$$НОК(a,b,c) \Rightarrow \max(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = 16$$

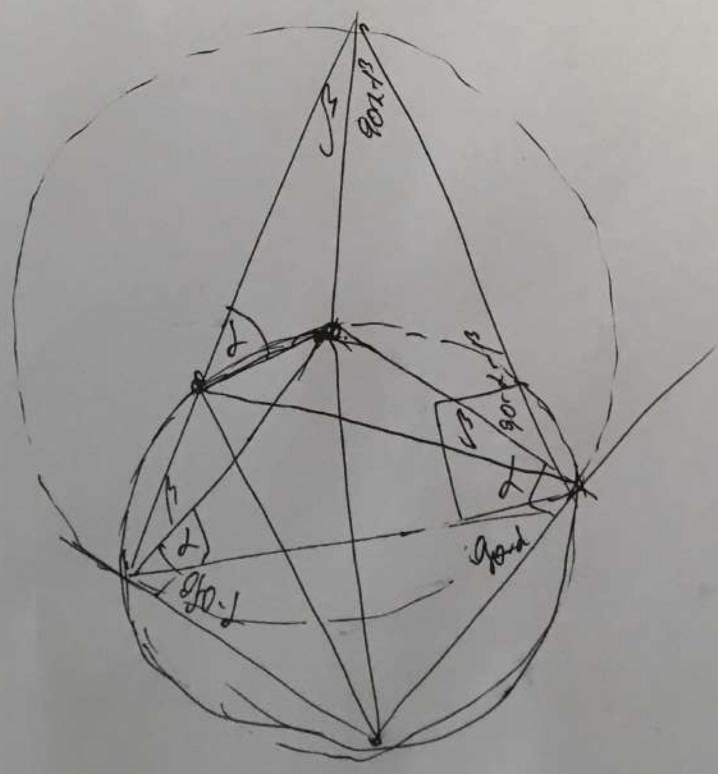
$$НОД(a,b,c) \Rightarrow \min(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3) = 0$$

$$НОК(a,b,c) \Rightarrow \max(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3) = \infty.$$

Черновин

N5 ⊕
N6 ⊕
N7 –





Черновик