Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100363**

ID профиля: **875113**

Вариант 17

№3

$$a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2)$$

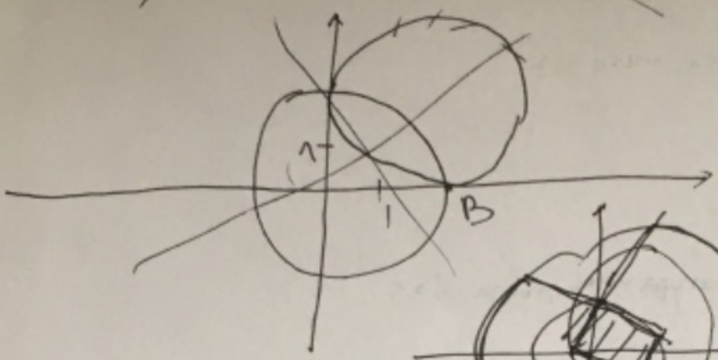
$$a^2+b^2 \le 2a+2b \text{ и } a^2+b^2 \le 2$$

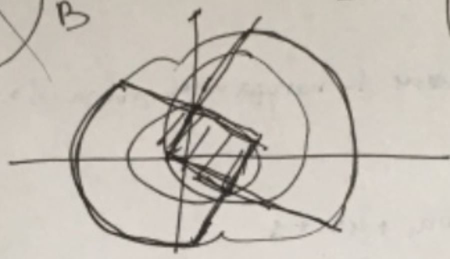
$$a^2+b^2 \le 2a+2b \Leftrightarrow (a+b)^2 - 2(a+b) \le 2ab \le a^2+b^2 \le 2$$

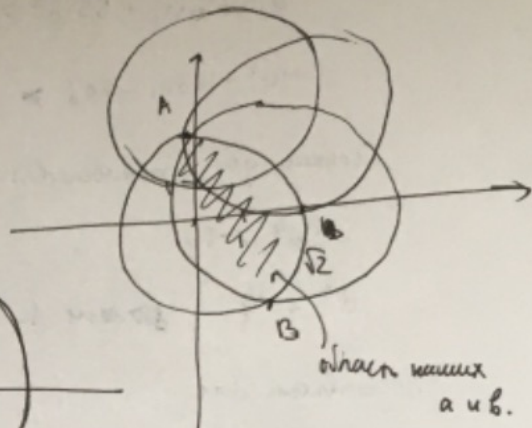
$$a^2+b^2 \le 2, \ (a+b-1)^2 \le 1$$

$$a^2+b^2 \le 2 \text{ и } (a+b-1-1)(a+b-1+1) \le 0$$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2) \end{cases}$$







Берем окружность с B заштрихованной области и считаем площадь полученной фигуры.

$$a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2)$$

$$a^2+b^2 \le 2a+2b \text{ и } a^2+b^2 \le 2$$

$(a-1)^2+(b-1)^2 < 2$ (окружность с центром в $(1;1)$ и радиусом $\sqrt{2}$)

и $a^2+b^2 \le 2$ (окружность с центром в $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{2}$)

Наше ~~множество~~ полученное множество ограничено дугами двух окружностей радиусов $2\sqrt{2}$ и двух окружностей радиусов $\sqrt{2}$. Берем большие два сектора с углом $\frac{2\pi}{3}$, добавляем два маленьких сектора и вычитаем площадь ромба.

Черновик (1)

N1

$S = S_{10}$ $a_n = a_1 + d(n-1)$, $a_6 a_{12} > S+1$, $a_7 a_{11} < S+17$

$(a_1+5d)(a_1+11d) > \frac{2a_1+9d}{2} \cdot 10 + 1$

$(a_1+6d)(a_1+10d) < \frac{2a_1+9d}{2} \cdot 10 + 17$

$\begin{cases} a_1^2 + 16da_1 + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 \\ a_1^2 + 16da_1 + 60d < 10a_1 + 45d + 17 \quad | \cdot (-1) \end{cases}$

$a_1^2 + 16da_1 + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1$

$-a_1^2 - 16da_1 - 60d \; \cancel{*} \; -10a_1 - 45d - 17$

Сложим два неравенства:

$-5d^2 > -16$

$d^2 < \frac{16}{5}$, ~~так~~ d - натуральное, тогда $d = 1$

Подставляем $d=1$

$a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 45 + 1$

$a_1^2 + \cancel{1}6a_1 + 9 > 0$

$(a_1+3)^2 > 0$

$\begin{array}{r} 45 \\ +17 \\ \hline 62 \\ -60 \\ \hline 2 \end{array}$

$a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 45 + 17$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$

$\frac{D}{4} = 9 + 2 = 11$

$a_{1,2} = -3 \pm \sqrt{11}$

$-7 < -3 - \sqrt{11} < -6$

$0 < -3 + \sqrt{11} < 1$

$a \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11})$

Ответ: ~~[crossed out]~~ $a_1 = -6; -5; -4; -2; -1; 0$

21100363 (U875113 M1304760)

Чистовик

№2

$\triangle CAB = \triangle OAB$, поэтому A и B лежат в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра.

Пусть $AK = h$ в $\triangle ACD$. Тогда $\triangle ABK$ – вписан в окружность цилиндра. Пусть $\angle CAD = \alpha$.

Тогда $CD = \sqrt{25+36-60\cos\alpha}$, $h = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\sin\alpha}{\sqrt{25+36-60\cos\alpha}}$, $\dfrac{2}{\sin\beta} = 2R$, где β – $\angle AKB$, R – радиус цилиндра, $\sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} = 2\cdot\frac{1}{h}\cdot\sqrt{\frac{h^2-1}{h}}$

$$R = \frac{h^2}{\sqrt{h^2-1}} = \frac{225\sin^2\alpha}{(61-60\cos\alpha)\cdot\sqrt{-1+\frac{225\sin^2\alpha}{61-60\cos\alpha}}} = \frac{15(x-121)(1-x)}{x\sqrt{(121+(-362+x)x)(121+x(118+x))}}$$

$x = 25+36-60\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{61-x}{60}$

$1-\left(\frac{61-x}{60}\right)^2 = 1-\frac{(61-x)^2}{3600}$

Надо найти минимум этой функции, посчитаем наши x.

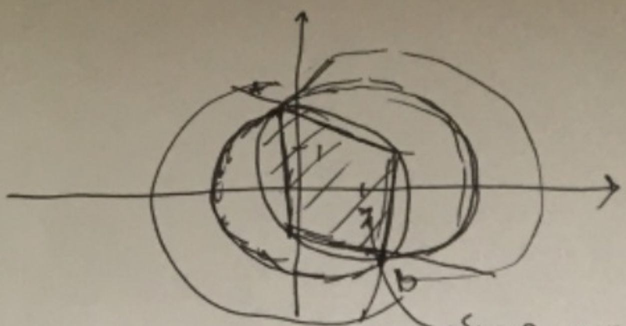
№3

$a^2+b^2 \leq \min(2a+2b, 2)$

$a^2+b^2 \leq 2a+2b$ и $a^2+b^2 \leq 2$

$(a-1)^2+(b-1)^2 \leq 2$ (окружность с центром в $(1;1)$ и радиусом $\sqrt{2}$) и

$a^2+b^2 \leq 2$ (окружность с центром $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{2}$)



Берем окружность в заштрихованной области и считаем площадь полученной фигуры

Наше полученное множество ограничено дугами двух окружностей радиусов $2\sqrt{2}$ и двух окружностей радиусов $\sqrt{2}$. Берём большие два сектора с углом $\frac{2\pi}{3}$, добавляем два маленьких сектора и вычитаем площадь ромба.

$$2 \cdot \frac{2\pi}{3 \cdot 2\pi}(3\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \frac{\pi}{3 \cdot 2\pi} \cdot (\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \underline{6\pi - \sqrt{3}}$$

Ответ: $6\pi - \sqrt{3}$

Чистовик

1

№1

$S = S_{10}$ $\quad a_n = a_1 + d(n-1)$, $\quad a_6 a_{12} > S+1$, $\quad a_7 a_{11} < S+17$

$$(a_1+5d)(a_1+11d) > \frac{2a_1+9d}{2} \cdot 10 + 1$$

$$(a_1+6d)(a_1+10d) < \frac{2a_1+9d}{2} \cdot 10 + 17$$

$$a_1^2 + 16da_1 + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1$$

$$a_1^2 + 16da_1 + 60d < 10a_1 + 45d + 17 \quad | \cdot (-1)$$

$$a_1^2 + 16da_1 + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1$$

$$-a_1^2 - 16da_1 - 60d > -10a_1 - 45d - 17$$

Сложим два неравенства:

$$-5d^2 > -16$$

$d^2 < \frac{16}{5}$, d - натуральное, тогда $d = 1$

Подставляем $d = 1$:

$$a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 45 + 1$$

$$a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$$

$(a_1+3)^2 > 0 \quad \underline{a_1 \neq -3}$

$$a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 45 + 17$$

$$a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0$$

$$\frac{D}{4} = 9 + 2 = 11$$

$$a_{1,2} = -3 \pm \sqrt{11}$$

$\underline{a \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11})}$

$$-7 < -3-\sqrt{11} < -6$$

$$0 < -3+\sqrt{11} < 1$$

Ответ: $a_1 = -6; -5; -4; -2; -1; 0.$

Черновик ③

№3 (продолжение)

$$2\,\frac{2\pi}{3\cdot 2\pi}\,(3\sqrt{2})^2 + 2\,\frac{\pi}{3\cdot 2\pi}\,(\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3} = 6 - \sqrt{3}$$

$$2\left(\frac{3\pi}{3\cdot 2\pi}\right)(2\sqrt{2})^2 *$$

№2 $\triangle CAB = \triangle OAB$, поэтому A и B лежат в плоскости перпендикулярной оси цилиндра. Пусть $AK = h$ в $\triangle ACD$. Тогда $\triangle ABK$ вписан в окружность цилиндра. Пусть $\angle CAD = \alpha$. Тогда $CD = \sqrt{25+36-60\cos\alpha}$, $h = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\sin\alpha}{\sqrt{25+36-60\cos\alpha}}$,

~~[illegible]~~ $\dfrac{2}{\sin\beta} = 2R$, где $\beta - \angle AKB$, R – радиус цилиндра, $\sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} =$

$= 2\,\frac{1}{h}\cdot\sqrt{\dfrac{h^2-1}{h}}$

$$R = \frac{h^2}{\sqrt{h^2-1}} = \frac{15\sin^2\alpha}{}$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

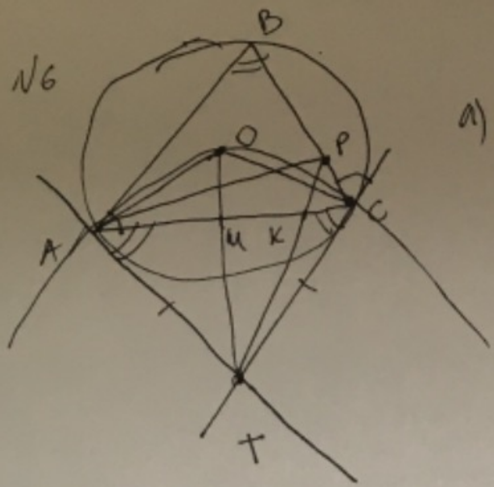
Шифр: **21100363**

ID профиля: **875113**

Вариант 17

Черновик

③



а) $\angle AOC = 2\angle ABC = \angle APC$ ~~$= \angle OAC = \frac{\pi}{2}$~~

$$\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{6}{4} = \frac{AK}{KC}$$

Точки A, O, C, T лежат на одной окружности, поскольку $\angle OAT + \angle OCT = \pi$, тогда $\angle TPC = \angle CAT = \angle ABC$.

$\triangle ABC \sim \triangle KPC$ с коэффициентом подобия $k = \frac{6+4}{4}$

$$S_{ABC} = \left(\frac{10}{4}\right)^2 \cdot S_{KPC} = \frac{100}{4} = \underline{25}$$

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{7}{5}$ $AC - ?$

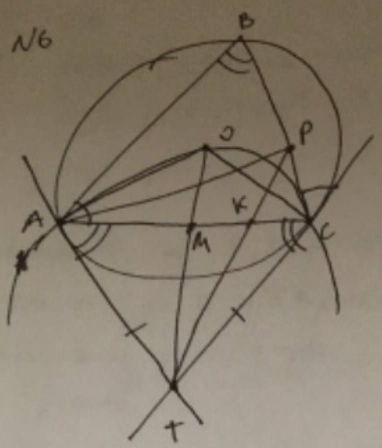
PK - биссектриса, $\frac{AP}{PC} = \frac{6}{4}$

21100363 (U875113 M1304761)

Чистовик

3

N6



а) S_{ABC} - ?

$\angle AOC = 2\angle ABC = \angle APC$

$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{6}{4} = \frac{AK}{AC}$

Точки A, O, C, T - лежат на одной окружности, т.к. $\angle OAT + \angle OCT = \pi$, тогда $\angle TPC = \angle CAT = \angle ABC$

$\triangle ABC \sim \triangle KPC$ с коэффициентом подобия $K = \frac{6+4}{4} = \frac{10}{4}$

$S_{ABC} = \left(\frac{10}{4}\right)^2 \cdot S_{KPC} = \frac{100}{16} \cdot 4 = \frac{100}{4} = 25$

б) AC - ?

$\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{7}{5}$

PK - биссектриса, $\frac{AP}{PC} = \frac{6}{4}$

$\beta = \operatorname{arctg} \frac{2}{7}$

$AC = x$, $OM = \frac{x}{2} \cdot tg\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{x}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7x}{4}$, $MT = \frac{x}{2} \cdot \frac{2}{7} = \frac{x}{7}$

$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 7x$

$AO = \frac{\lambda}{2}$

Ответ: а) 25

Чистовик 1

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 6 = 2\cdot 3 \\ НОК(a;b;c) = 2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

$a = 2^x \cdot 3^y$, $b = 2^v \cdot 3^w$, $c = 2^p \cdot 3^q$

Какое-то из x, v, p — равно 1 и какое-то равно 15. Если два взяли, то третье от 1 до 15 (15 вариантов)

Какое-то из y, w, q равно 1 и какое-то равно 16. Если два взяли, то третье от 1 до 16. (16 вариантов)

~~Получаем: $3\cdot 15\cdot 3\cdot 16 = 2160$~~

~~Ответ: 2160~~

Ищем количество разных троек вида $(1;15;x)$, $(x;1;15)$, $(1;x;15)$, $(15;1;x)$, $(x;15;1)$, $(15;x;1)$ где x от 1 до 15. Имеем для $x=1$ — имеем 3, для $x=15$ — имеем 3, для остальных — 6.

Аналогично, ищем количество разных троек вида $(1;16;y)$, $(y;1;16)$; $(1;y;16)$; $(16;1;y)$, $(y,16,1)$, $(16;y;1)$, где y от 1 до 16, Имеем для $y=1$ — имеем 3, для $y=16$ — имеем 3, для остальных — 6.

Получаем: $(3+3+6\cdot 13)(3+3+6\cdot 14) = \underline{7560}$

Ответ: 7560

№5

$a = \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$; $b = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$; $c = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

ОДЗ: $\begin{cases} 5x-1>0 \\ 5x-1\neq 1 \\ 4x+1>0 \\ 4x+1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases}$ $x \in \left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$

$a = 2\log_{5x-1}(4x+1)$ $b = 2\frac{\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)}{\log_{5x-1}(4x+1)}$ $c = \frac{1}{\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)}$; $abc = 4$

Решаем систему:

$\begin{cases} a = b \\ c = a-1 \\ abc = 4 \end{cases}$

$a^2(a-1) = 4$

$a^2 - a - 4 = 0$

Возможные рациональные корни – это целые делители числа 4.

$a = \pm 1; \pm 2; \pm 4.$

$a = 2$ – подходит, $a^2 - a - 4 = (a-2)(a^2+a+2)$

$a = 2$ или $a^2 + a + 2 = 0$ (тут нет корней, т.к. $D<0$)

Система имеет решение $(a;b;c) = (2;2;1), (2;1;2), (1;2;2)$

Решаем:

1) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2$

$4x+1 = 5x-1$

$x = 2$ – подходит

2) $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) = 2$

$\frac{x^2}{4}\ x + 4 = 16x^2 + 8x + 1$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = -\frac{2}{3} \text{ – не подходят под ОДЗ} \\ x_2 = \frac{2}{7} \text{ – не подходит} \end{array}\right.$

3) $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2$

$5x-1 = \frac{x^2}{4} + 2x + 4$

$x^2 - 12x + 20 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \text{ – подходит} \\ x_2 = 10 \text{ – не подходит} \end{array}\right.$

Ответ: $x = 2$

№ 5 (продолжение)

Решаем систему:

$$\begin{cases} a = b \\ c = a - 1 \\ abc = 4 \end{cases}$$

$a^2(a-1) = 4$

$a^2 - a - 4 = 0$

Возможные рациональные корни — это целые делители числа 4.

$a = \pm 1, \pm 2, \pm 4.$

$a = 2$ подходит, $a^2 - a - 4 = (a-2)(a^2 + a + 2)$,

$a = 2$ или $a^2 + a + 2 = 0$ (тут корней нет, $D < 0$)

Система имеет решения $(a;b;c) = (2;2;1), (2;1;2), (1;2;2)$.

Решаем:

1) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = 2$

$4x + 1 = 5x - 1$

$\underline{x = 2}$ — подходит

~~$x = \frac{2}{7}$~~

~~$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2$~~

2) $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2} + 2\right) = 2$

$\frac{x^2}{4} + 2x + 4 = 16x^2 + 8x + 1$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = -\frac{2}{3} \text{ — не подходит, т.к. не лежит в области определения} \\ x_2 = \frac{2}{7} \text{ — не подходит} \end{array}\right.$

3) $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2$

$5x - 1 = \frac{x^2}{4} + 2x + 4$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \text{ (подходит)} \\ x_2 = 10 \text{ — не подходит} \end{array}\right.$

Ответ: $x = 2$

Черновик 1

№4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 6 = 2\cdot 3 \\ \text{НОК}(a;b;c) = 2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

$a = 2^{x}\cdot 3^{y}$, $b = 2^{v}\cdot 3^{w}$, $c = 2^{p}\cdot 3^{q}$

~~[illegible]~~ какое-то из x, v, p — равно 1 и какое-то равно 15. Если два взяли, то третье от 1 до 15 (15 вариантов)

какое-то из y, w, q равно 1 и какое-то равно 16. Если два взяли, то третье от 1 до 16 (16 вариантов).

~~Пусть $x=1$ и $v=15$. Тогда p любое от 1 до 15. Если два взяли,~~

~~Пусть $y=1$ и $w=16$. Тогда q любое от 1 до 16.~~

Получаем ~~[illegible]~~ $(3+3+6\cdot 13)(3+3+6\cdot 14) =$

Ответ: ~~[illegible]~~

№5

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$; $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$; $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

"a" "b" "c"

ОДЗ:

$$\begin{cases} 5x-1>0 \\ 5x-1\neq 1 \\ 4x+1>0 \\ 4x+1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \end{cases}$$

$x \in \left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$

~~[illegible]~~

$a = \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$; $b = 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$; $c = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$a = 2\log_{5x-1}(4x+1)$

$$b = 2\,\frac{\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)}{\log_{5x-1}(4x+1)}$$

$$c = \frac{1}{\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)}$$

$abc = 4$