Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100331**

ID профиля: **854834**

Вариант 17

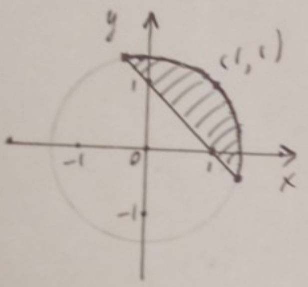
Чистовик

3. $a^2+b^2 \le \min(2a+2b,\ 2)$

1) $a+b \ge 1$, $a^2+b^2 \le 2$

$a \ge 1-b$, $(a-0)^2+(b-0)^2 \le (\sqrt{2})^2$

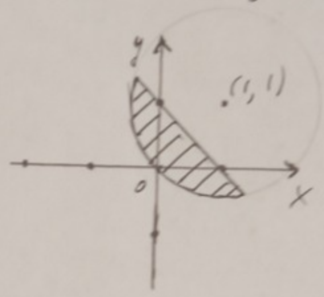
Множество решений это внутренность круга с центром в $(0,0)$ и $R=\sqrt{2}$, лежащая выше прямой $y=1-x$.



2) $a+b \le 1$, $a^2+b^2 \le 2a+2b$

$a \le 1-b$, $(a-1)^2+(b-1)^2 \le (\sqrt{2})^2$

Множество решений это внутренность круга с центром в $(1,1)$ и $R=\sqrt{2}$, лежащая ниже прямой $y=1-x$.

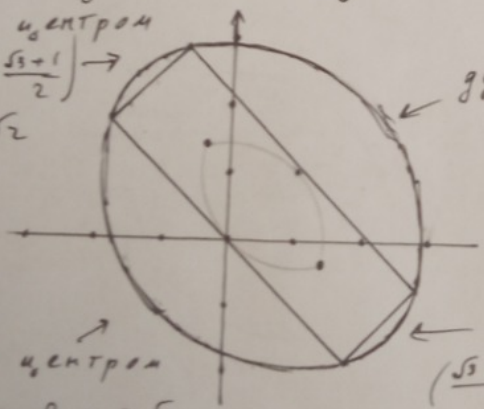


$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$ — уравнение круга с центром (a,b) и $R=\sqrt{2}$.

Объединим эти знания и получим фигуру M:

окр. с центром в $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}; \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$ и $R=\sqrt{2}$

дуга окружности с центром в $(0,0)$ и $R=2\sqrt{2}$



окр. с центром в $(1,1)$ и $R=2\sqrt{2}$

дуга окружности с центром в $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ и $R=\sqrt{2}$

$$S_M = S_{\square} + 2\cdot\left(\pi\cdot 8\cdot\frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} - \frac{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{2}\right) + 2\left(\pi\cdot 2\cdot\frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{2}\right)$$

$$= 2\sqrt{6}\cdot\sqrt{2} + 2\left(\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\pi - \sqrt{3}$$

Ответ: $6\pi - \sqrt{3}$

Черновик

S - сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}$

$a_1 = -5 \quad k = k$

$\geq S+2$

$a_6 a_{12} > S + 1$

$a_7 a_{17} < S + 17$

$\leq S + 16$

$a_1 - ?$

a_1

$a_2 = a_1 + k$

$a_3 = a_1 + 2k$

...

$a_{10} = a_1 + 9k$

$a_{11} = a_1 + 10k$

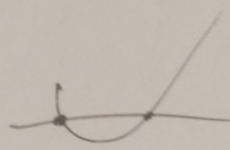
$a_{12} = a_1 + 11k$

$S = 10a_1 + 45k$

$a_6 a_{12} = (a_1 + 5k)(a_1 + 11k) \geq 10a_1 + 45k + 2$

$a_1^2 + 16ka_1 + 55k^2 \geq 10a_1 + 45k + 2$

$a_1^2 + (16k - 10)a_1 + (55k^2 - 45k - 2) \geq 0$



$a_7 a_{17} = (a_1 + 6k)(a_1 + 16k) \leq 10a_1 + 45k + 16$

$a_1^2 + 22ka_1 + 96k^2 \leq 10a_1 + 45k + 16$

$a_1^2 + (22k - \cancel{16}10)a_1 + (96k^2 - 45k - 16) \leq 0$

$(16k \cancel{-10})a_1 + (\cancel{55k^2} \cancel{-45k} \cancel{-2}) \geq (22k \cancel{-10})a_1 + (\overset{41k^2}{\cancel{96k^2}} \cancel{-45k} \overset{-14}{\cancel{-16}})$

$0 \geq 6a_1 + 41k^2 - 14$

$-4\tfrac{1}{2} = \frac{-27}{6} \geq \frac{14 - 41k^2}{6} \geq a$

$-4{,}5 \geq a$

$D = 4(8k-5)^2 - 4(55k^2 - 45k - 2) = -5 \geq a$

$= 4(64k^2 - 80k + 25 - 55k^2 + 45k + 2)$

$= 4(9k^2 - 35k + 27)$

~~(11k) k(5k~~

21100331 (U854834 M1299331)

черновик

$$D = 4(11k-5)^2 - 4(96k^2 - 45k - 16) =$$

$$= 4(121k^2 - 110k + 25 - 96k^2 + 45k + 16) =$$

$$= 4(25k^2 - 65k + 41) \geq 0$$

черновик

черновик

$$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$$

$$a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2) = 2\cdot\min(a+b; 1)$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} \le \min(a+b, 1)$$

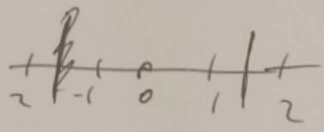
1) если $a+b>1$, то $a^2+b^2 \le 2$

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2 \le 2$$

если $x<1/2$ $y<1/2$

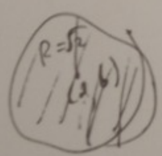
$a = x+1$

$b = y+1$



$$(y-1)^2+(x-1)^2 \le 2x+2y-4$$

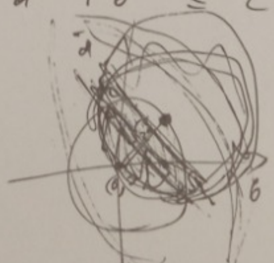
$$y^2-4y+4+x^2-4x+4 \le 2$$

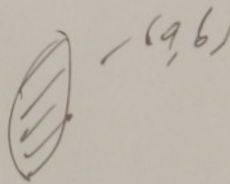


Какими могут быть a и b

1) $a+b>1$, $a^2+b^2 \le 2$

$a > 1-b$



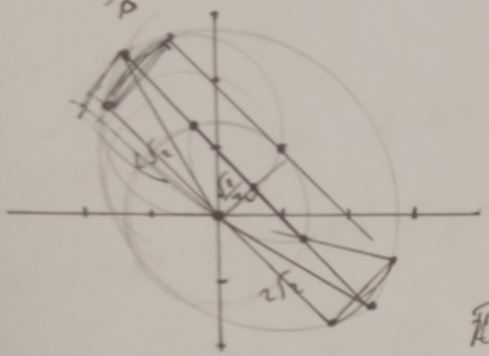


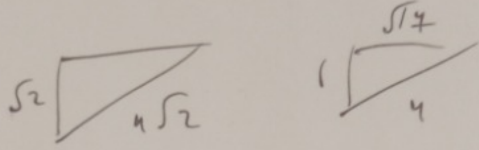
2) $a+b \le 1$, $a^2+b^2 \le 2a+2b$

$a \le 1-b$ $\quad (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2$

черновик

$$S_\triangle = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{17}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{17}}{2}$$





$\cos 2\alpha = \cos^2 - \sin^2$

$= 2\cos^2 - 1$

$\frac{1}{8} - 1$

$-\frac{7}{8}$

$$\pi \cdot 8 \cdot \frac{\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)}{2\pi}$$

7.

$S_\triangle = 4\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)$

$S = 8\arccos\left(-\frac{7}{8}\right) - \sqrt{2} \cdot \sqrt{17}$

$x^2 + y^2 = 2$

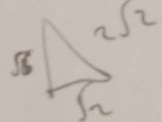
$y = x - 1$

$x^2 + (x^2 - 2x + 1 = 2$

$2x^2 - 2x - 1 = 0$

$D = 4 + 8 = 12$

$x = \frac{\pm\sqrt{12} + 2}{4} = \frac{\pm\sqrt{3} + 1}{2}$



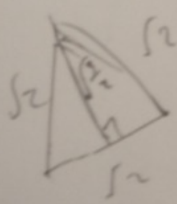
$S = \frac{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{3}$

$180° = \pi$

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$

$\cos 2\alpha = 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$

$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$



$S = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}}{2}$

$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2}{2}$

$4\sqrt{3} + 6\pi - 4\sqrt{3} - \sqrt{3}$

21100331 (U854834 M1299331)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100331**

ID профиля: **854834**

Вариант 17

Чистовик

4. НОД $(a; b; c) = 6$

$\text{НОК}(a; b; c) = 2^{15} \cdot 3^{16}$

Значит, числа a, b и c состоят только из 2 и 3 в каких-то степенях. Причём есть хотя бы одно число, у которого 2 входит ровно в 1 степени, хотя бы одно где 2 ровно в 15, хотя бы одно где 3 ровно в 1, хотя бы одно где 3 ровно в 16 степени.

Разберёмся с 2:

1) ровно в 1 число входит 2 в первой степени, ровно в 1 числе 2 содержится в 15 степени: $6 \cdot 13$

кол-во способов выбрать эти 2 числа; распределение 2 в оставшемся числе от 2^2 до 2^{14}

2) ровно в 2 числах 2 содержится в 1 степени, ровно в 1 2 содержится в 15: 3

3) ровно в 1 числе 2 содержится в 1 степени, ровно в 2 двойка содержится в 15: 3

Итого вариантов „распределить" 2: $6 \cdot 13 + 3 + 3 = 6 \cdot 14$

Аналогично считаются варианты вхождения тройки в эти числа. Их будет $6 \cdot 15$.

Двойки и тройки распределяются независимо друг от друга, поэтому всего вариантов $6 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 15 = 7560$

Ответ: 7560 троек

1

21100331 (U854834 M1299332)

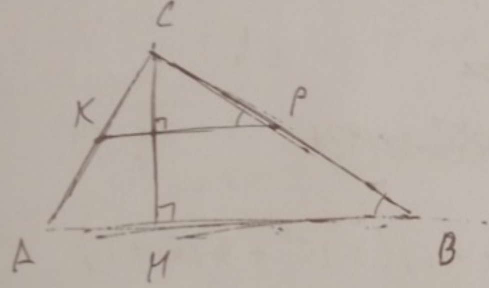
Чистовик.

6. б)

Пусть высота из C на PK равна h.

Тогда высота из C на $AB = \frac{5}{2} h$.

$S_{CPK} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot PK \Rightarrow 8 = h \cdot PK \Rightarrow PK = \frac{8}{h} \Rightarrow AB = \frac{20}{h}$



$tg \angle ABC = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{CM}{BM} = \frac{7}{5} \Rightarrow BM = \frac{5}{7} CM$

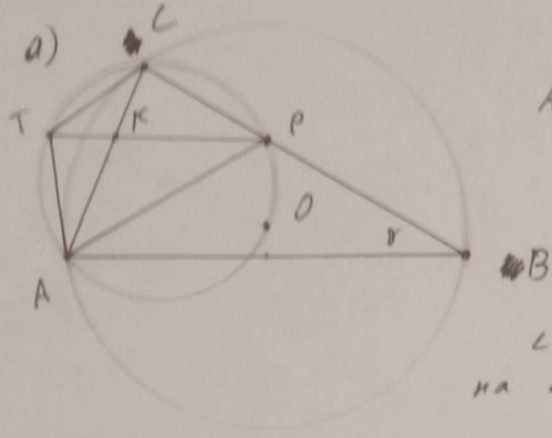
$\Rightarrow BM = \frac{25}{14} h$

$AM = AB - BM = \frac{20}{h} - \frac{25}{14} h$

$AC^2 = AM^2 + MC^2$

Чистовик

6. а)



$\angle TAC = \frac{1}{2} \smile AC = \angle ABC = \gamma$

Аналогично $\angle TCA = \gamma$

$\angle ATC = 180^\circ - 2\gamma$ по т. о сумме углов треугольника

$\angle COA = \smile AC = 2\angle ABC = 2\gamma$

$\angle ATC + \angle COA = 180^\circ \Rightarrow T$ лежит на окружности AOC.

$\angle TAC = \angle TCA \Rightarrow T$ лежит на серединном перпендикуляре к AC.

T и O лежат на сер. пер. к $AC \Rightarrow \angle TOA = \angle TOC =$

$= \frac{1}{2}\angle AOC = \gamma$

$\angle CPT = \frac{1}{2} \smile TC = \angle TOC = \gamma$.

$\angle CPT = \gamma = \angle CBA \Rightarrow PT \parallel AB \Rightarrow \Delta KCP \sim \Delta ACB$ (по 2-ум углам)

$\frac{S_{ACK}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{CK} \Rightarrow$ ~~коэф. подобия $k = \frac{3}{2}$~~ $\frac{AK+CK}{CK} = \frac{10}{4}$ – коэф. подобия

$\cancel{S_{ABC} = k \cdot S_{CPK} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 4 = 9}$

$S_{ABC} = k^2 \cdot S_{CPK} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 4 = 25$.

Ответ: 25

черновик

$(\frac{x}{2}+2) =$

$_{4x+1}$

$-1)$

черновик

$\log^2_{4x+1}(\frac{x}{2}+2) =$ ______

$\frac{x}{2}+2=n$

$x+4=2n$

$x=2n-4$

$5x=10n-20$

$5x-1=10n-21$

$\cancel{(\frac{x}{2}+2)^{2\log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2)}} = (5x-1)$

$(4x+1)^2=(4x+1)^2$

$\left(\sqrt{\frac{t}{2}}\right)^3 - \frac{t}{2} - 1 = 0$

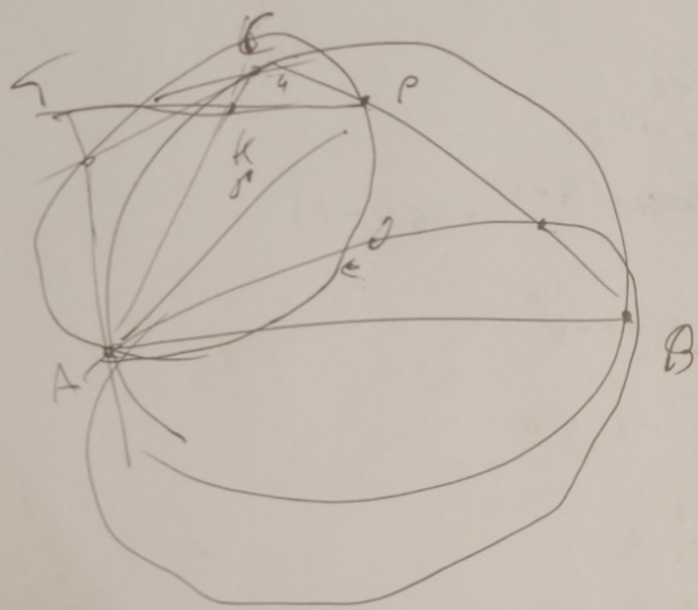
$\left(\sqrt{\frac{t}{2}}\right)^3 = \frac{t}{2}+1$

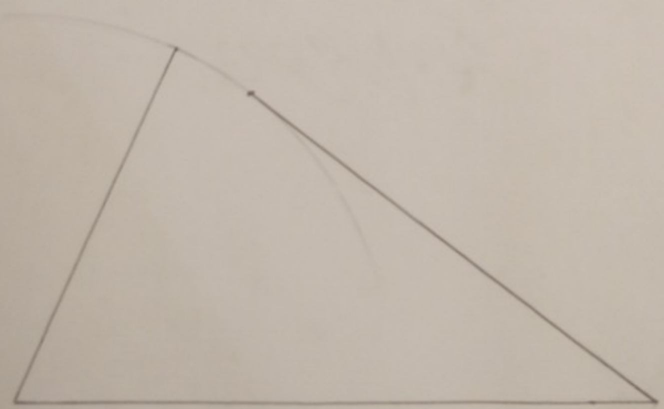
$\left(\frac{t}{2}\right)^3 = \frac{t^2}{4}+t+1$

$\frac{t^3}{8} - \frac{t^2}{4} - t - 1 = 0$

$\frac{t^2}{4} + \cancel{\frac{t}{2}} \cancel{- 2} - \frac{2}{t}$

21100331 (U854834 M1299332)


P
K
A
B



черновик

$\log^2_{4x+1}(5x-1) = 2\log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2) = \cancel{2\log_{4x+1}(\frac{x}{2}}$

$2\log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2)+1 = \frac{\log_{4x+1}(5x-1)}{\log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2)}$

$\log_{4x+1}(5x-1)+1 = 2\log^{-1}_{4x+1}(5x-1)$

$16=2^4$

2^8

$a+1=\frac{2}{a}$

$a^2+a-2=0$

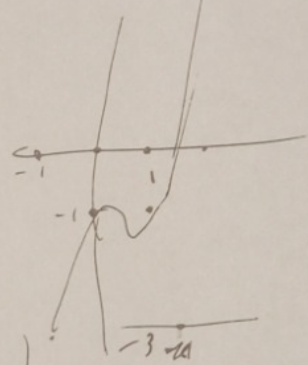
1,6   256

2^{16}

5

$D=1+8=9$

-2 и 1



$2\log^2_{4x+1}(\frac{x}{2}+2) = \log_{4x+1}(5x-1)$

$\frac{2}{\log_{(4x+1)}(5x-1)}+1 = \log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2)$

$\frac{1}{\log^2_{4x+1}(\frac{x}{2}+2)}+1 = \log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2)$

$\frac{1}{a^2}+1=a$ $a^3-a^2-1=0$ $8-4-1$

$1+a^2=a^3$ $\cancel{a-1-\frac{1}{a^2}}$

$5x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{5}$

$5x-1\ne 1 \Rightarrow x\ne\frac{2}{5}$

$\frac{x}{2}+2>0 \Rightarrow x>-4$

$\Rightarrow x\ne -2$

$\frac{1}{5}<\frac{3}{7}$ $\Rightarrow x>\frac{-1}{4}$

$7<10$ $\Rightarrow x\ne 0$

$4x+1$ $5x-1$

2 x

$\frac{x}{2}+2$ $5x-1$

$x+4$ $10x-2$

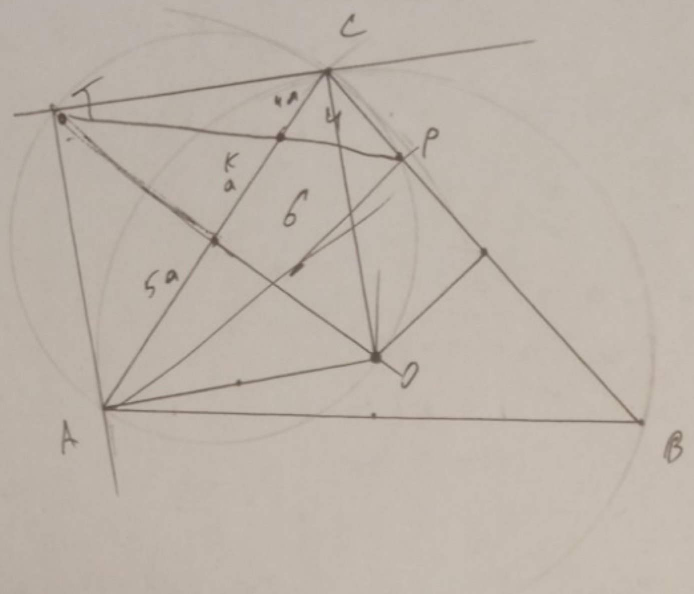
6 $9x$

$4x+1$ $\frac{x}{2}+2$

$8x+2$ $x+4$

$7x$ 2

x $\frac{3}{7}$



$\operatorname{arctg} \frac{7}{5}$

6.