Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100262**

ID профиля: **244896**

Вариант 17

Чистовик вар 17

№1

a_1 – первый член, d – разность прогрессии, по условию ~~ол~~ $d>0$, т.к. последовательность возрастает, $d \in \mathbb{Z}$ т.к. последовательность состоит из целых чисел

$$S = \frac{2a_1+9d}{2}10 = 10a_1+45d$$

$$\begin{cases} a_6 a_{12} > 10a_1+45d+1 \\ S+17 > a_7 a_{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+11d) > 10a_1+45d+1 \\ 10a_1+45d+17 > (a_1+6d)(a_1+10d) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} a_1^2+16a_1d+55d^2 > 10a_1+45d+1 \\ 10a_1+45d+17 > a_1^2+16a_1d+60d^2 \end{cases}$$

$$\cancel{a_1^2}+\cancel{16a_1d}+55d^2+\cancel{10a_1}+\cancel{45d}+17 > \cancel{a_1^2}+\cancel{16a_1d}+60d^2+\cancel{10a_1}+\cancel{45d}+1$$

$$16 > 5d^2$$

$d^2 < \frac{16}{5}$, учитывая, что $d>0$,

* $0 < d < \frac{4}{\sqrt5}$

I. пусть $d=1$ $\quad 0<1<\frac{4}{\sqrt5}$ т.к. $\quad 1 \vee \frac{4}{\sqrt5}$

$1^2 \vee \frac{16}{5}$

$1^2 < \frac{16}{5}$

$1 < \frac{4}{\sqrt5}$

$$\begin{cases} (a_1+5)(a_1+11) > 10a_1+46 & (1) \\ 10a_1+45+17 > (a_1+6)(a_1+10) & (2) \end{cases}$$

1) $a_1^2+16a_1+55 > 10a_1+46$

$a_1^2+6a_1+9>0$

$(a_1+3)^2>0$

верно при $a_1 \in (-\infty; -3) \cup (-3; \infty)$, где a_1 – целое (т.к. последов. целых чисел)

2) $10a_1+45+17 > a^2+16a_1+60$

$a_1^2+6a_1-2<0$

$D = 36+8 = 44$

$a_{1,1} = \frac{-6-\sqrt{44}}{2}$

$a_{1,2} = \frac{-6+\sqrt{44}}{2}$

верно при $a_1 \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11})$

Чистовик вар 17

Найдем пересечение полученных множеств:

$$\begin{cases} (-\infty;-3)\cup(-3;\infty) \\ \cancel{(-3-\sqrt{11})}(-3-\sqrt{11};-3+\sqrt{11}) \end{cases}$$

$3<\sqrt{11}<4$ (т.к. $9<11<16$)

значит, во второй промежуток входят целые числа:

$-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0$, -3 не подходит согласно первому промежутку.

значит, $a_1=-6$ $a_1=-5$ $a_1=-4$ $a_1=-2$ $a_1=-1$ $a_1=0$ подходят.

II пусть $d\geq 2$

$$d \vee \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$d^2 \vee \frac{16}{5}$$

$d^2 \vee 3{,}2$, но $d\geq 2 \Rightarrow d^2\geq 4 \Rightarrow d^2>3{,}2 \Rightarrow d>\frac{4}{\sqrt{5}}$

т.е. $d\geq 2$ не подходит.

Ответ $-6; -5; -4; -2; -1; 0$

чистовик вар 17

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2\\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2)\end{cases}$$

рассмотрим второе неравенство:

если $2a+2b \le 2$

$a^2+b^2 \le 2a+2b$

$\cancel{a^2-2a+1}$ $a^2-2a+1+b^2-2b+1 \le 2$

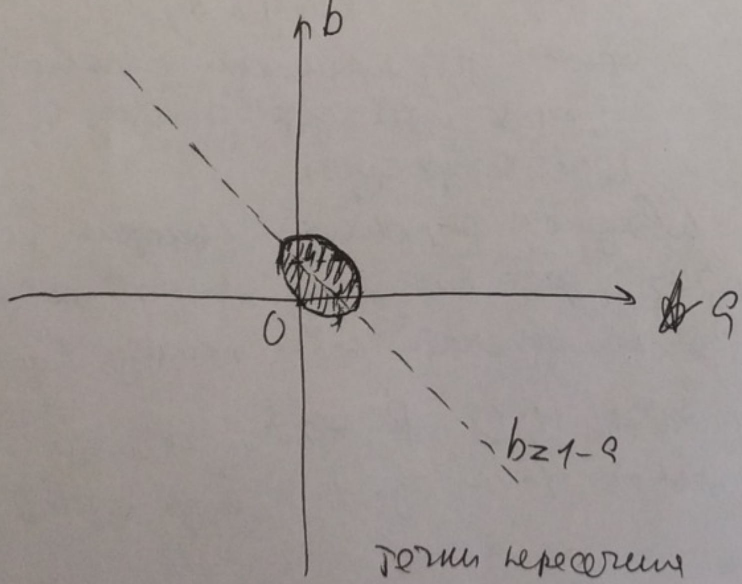
$(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2$

если $2a+2b > 2$

$a^2+b^2 \le 2$

$2a+2b>2 \Rightarrow b>1-a$

построим плоскость с осями Oa и Ob:



Если (a,b) выше прямой $b=1-a$, тогда должно соблюдаться $a^2+b^2 \le 2$ (круг с центром в $(0;0)$ и $r_1=\sqrt{2}$)

Если (a,b) ниже прямой $b=1-a$, тогда должно соблюдаться $(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2$ (круг с центром $(1;1)$ и $r_2=\sqrt{2}$)

точки пересечения окружностей $a^2+b^2=2$ и $(a-1)^2+(b-1)^2=2$ лежат на прямой ($b=1-a$)

(т.к. $a^2+b^2=2$, $\cancel{a^2+b^2+2ab+2}$, $a^2+b^2=2a+2b$ $\Rightarrow 2=2a+2b \Rightarrow b=1-a$)

т.е. полученная фигура в плоскости aOb состоит из двух дуг

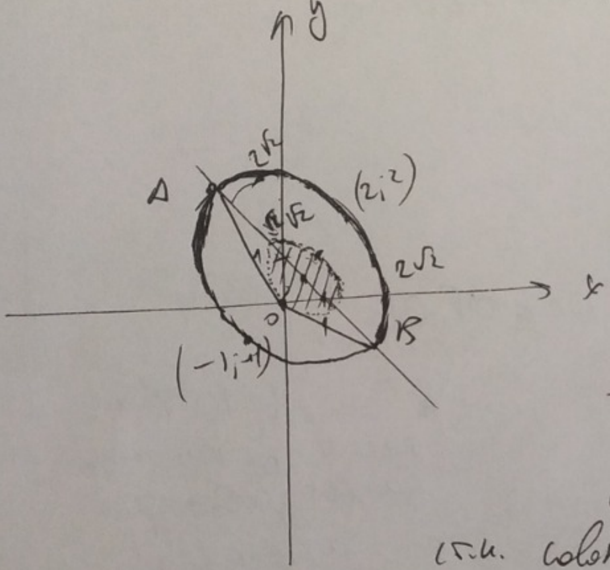
Чистовик Вар 17

рассмотрим первое ~~ур-я~~ неравенство системы и плоскости xOy:

$$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 2$$

представляет собой круг с центром $(a;b)$ и ~~ра~~ ~~R~~ $R=\sqrt{2}$

т.к. фигура M задается всеми точками (x,y) для которых существует такая пара (a,b), фигура будет состоять из всех точек совокупности кругов с такими (a,b), которые принадлежат фигуре K (фигура, полученная на aOb)



~~пунктир - фигура K~~

пунктиром обозначена фигура K

рассмотрим Ω_1 с центром $(0;0)$

$R_1 = 2\sqrt{2}$ $(x^2+y^2=8)$

~~она~~ дуга, ограниченная прямой $y=1-x$ будет задавать одну из частей фигуры

(т.к. совокупность окружностей с центрами на $x^2+y^2=2$ дает окружность $x^2+y^2=8$, соответственно фигуре будет принадлежать вся площадь внутри)

аналогично Ω_2 с центром $(1;1)$ $R_2=2\sqrt{2}$ $((x-1)^2+(y-1)^2=8)$

дуга ограниченная ~~пр~~ прямой $y=1-x$ будет задавать вторую часть фигуры

найдем длину AB:

$$\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ y=1-x \end{cases}$$

$2x^2-2x-7=0$

$D=60$

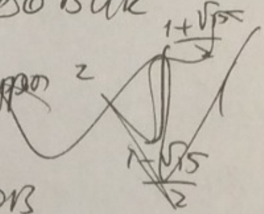
$x=\dfrac{2\pm\sqrt{60}}{4}=\dfrac{1\pm\sqrt{15}}{2} \Rightarrow y=\dfrac{1\mp\sqrt{15}}{2}$

$|AB|=\sqrt{\left(\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}-\dfrac{1+\sqrt{15}}{\cancel{4}}\right)^2+\left(\dfrac{1-\sqrt{15}-1-\sqrt{15}}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{120}{4}}=\sqrt{30}$

21100262 (U244896 M1300503)

Чистовик вер 17

~~S искомой фигуры~~ =



по т косинусов

$30 = 8+8-2\cdot 8\cos\angle AOB$

$\cos\angle AOB = -\frac{7}{8}$

по осн триг тождеству $\sin\angle AOB = \sqrt{\frac{64-49}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8}$

$S_{\triangle AOB} = \frac{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{15}}{8\cdot 2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$

$S_{\text{искомой фигуры}} = \pi\cdot(2\sqrt{2})^2\cdot\frac{\arccos(-\frac{7}{8})}{2\pi} - S_{\triangle AOB} =$

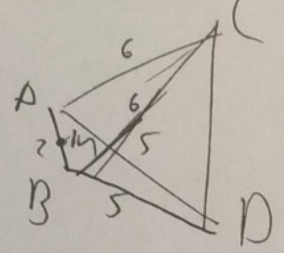
$= 4(\pi - \arccos\frac{7}{8}) - \frac{\sqrt{15}}{2}$ (т.е. $S = \pi R^2\cdot\frac{\alpha}{2\pi} - S_{\text{сектора } AOB}$)

$S_M = 8(\pi - \arccos\frac{7}{8}) - \sqrt{15}$ т.к. фигура симметрична относительно $y = 1-x$

Ответ: $8(\pi - \arccos\frac{7}{8}) - \sqrt{15}$

Черновик Вар 17

№2

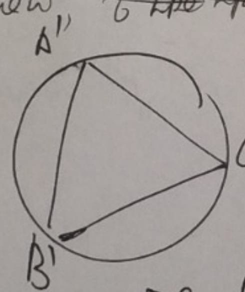


Во-первых, заметим, что $AB \perp CD$ (т.к. в CAB и в ~~CAB~~ DAB — ~~тр~~ $\triangle$ равнобедренные с оси AB, т.е. медианы из вершин C и D уходят в одну точку, но по свойству равнобедренного треугольника они также высоты $\Rightarrow (CMD) \perp AB$ (где M — основание медиан и высот) $\Rightarrow$

$\Rightarrow CD \perp AB$

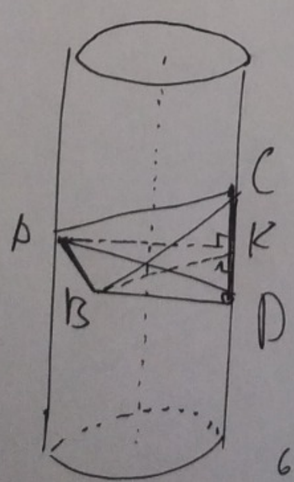
При вписывании в цилиндр CD будет лежать на какой-то образующей, $AB \perp$ всем образующим, т.е. AB и AB параллельно основаниям цилиндра.

Значит, ~~в проекции~~ проекции на основания будут выглядеть так:



A', B', C' — проекции A, B, C соотв., причем $A'B' = AB$.

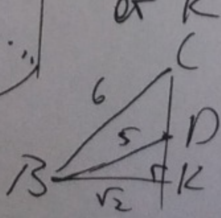
если $A'B'$ — хорда — она меньше диаметра окружности т.е. $D > 2$, соответственно минимальный радиус цилиндра достигается при $AB =$ диаметр $= 2$.



рассмотрим такую плоскость α, что $AB \in \alpha$, $\alpha \parallel$ основаниям цилиндра.

$K \in$ образующей, на которой лежит CD, т.е. AK, BK — проекции AC и AD, BC и BD соотв. на эту плоскость

т.к. C и D лежат по одну сторону от K



$BK = AK = \sqrt{2}$ (см. они равн., $AB = 2$)

$\angle BDK = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{5} \Rightarrow \angle BDC = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{5}$

$\Rightarrow \cos BDC = -\frac{\sqrt{23}}{5}$ (но она тупая)

$CD =$

по т. косинусов

$36 = 25 + CD^2 + 10CD \cdot \frac{\sqrt{23}}{5}$

6

Черновик вар 17

$CD^2 + 2\sqrt{23}\,CD - 11 = 0$

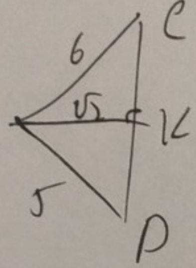
$D = 4\cdot 23 + 44 = 136$

$CD = \frac{-2\sqrt{23}+\sqrt{136}}{2} = \sqrt{34}-\sqrt{23}$

$\sqrt{34}-\sqrt{23} \vee 1$ (т.к. $CD > 1$ по усл-ву б))

$34+23-2\sqrt{784} \vee 1$

не подходит $57-2\sqrt{784} \vee 1$



$CD = \sqrt{36-2}+\sqrt{25-2} = \sqrt{34}+\sqrt{23}$

$\sqrt{34}+\sqrt{23} \vee 11$ ($CD = 11$ по усл-ву б))

< 6 < 5 $\Rightarrow$ $\sqrt{34}+\sqrt{23} = 11$ не подходит

Ответ: $\sqrt{34}+\sqrt{23}$

черновик

$S = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10$

$10a_1 + 45d$

$\begin{cases} (a_1 + 5d)(a_1 + 11d) > 10a_1 + 45d + 1 \\ (a_1 + 6d)(a_1 + 10d) < 10a_1 + 45d + 17 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 \\ a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17 \end{cases}$

$a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 + 10a_1 + 45d + 17 > 10a_1 + 45d + 1 + a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2 + 40a_1$

$-5d^2 > -16$

$5d^2 < 16$

$d^2 < \frac{16}{5}$

$0 < d < \frac{4}{\sqrt{5}}$ $d = 1$

$2 < \frac{4}{\sqrt{5}}$ $2 < \frac{4}{\sqrt{5}}$

$4 < \frac{16}{5}$

$3 > 2$

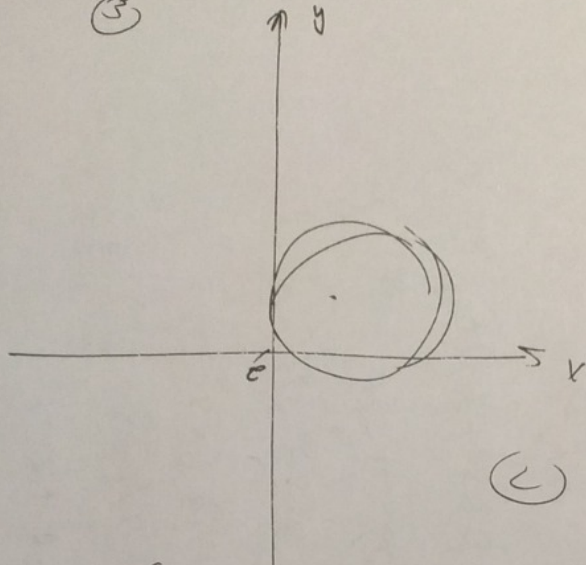
$-4 > -6$

$-1 > -4$

черновик (9)

Черновик (2)

(3)

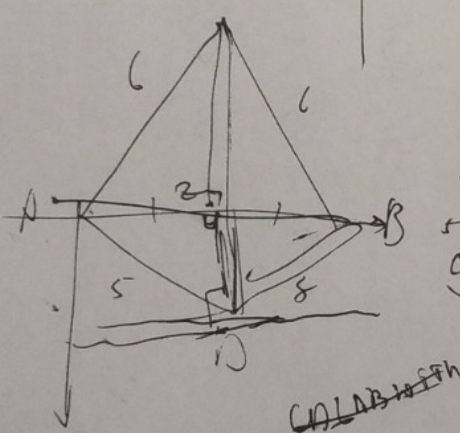


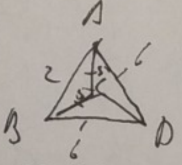
$a^2+b^2 \le 2a+2b$

$(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2$

$a^2+b^2 \le 2$

(2)





$CD+6>5$

$CD<11$

$5+CD>6$

$CD>1$

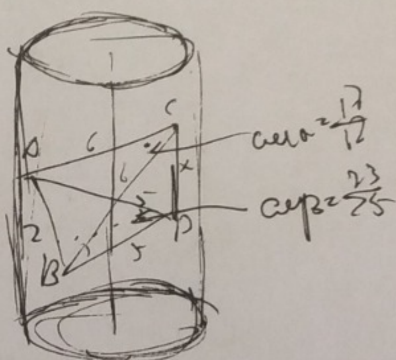
$CD>1$

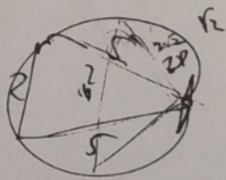
$CD<11$

$1<CD<11$

~~CA⊥AB~~

$\vec{DB}$





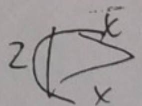
$4=25+25-2\cdot 25\cos\varphi$

$\frac{4}{50}$ $\frac{23}{25}$

$4=36+36-2\cdot 36\cos\alpha$

$\frac{68}{72}=\cos$

$\cos\alpha=\frac{17}{18}$



$x^2=36+25-60\cos\varphi$

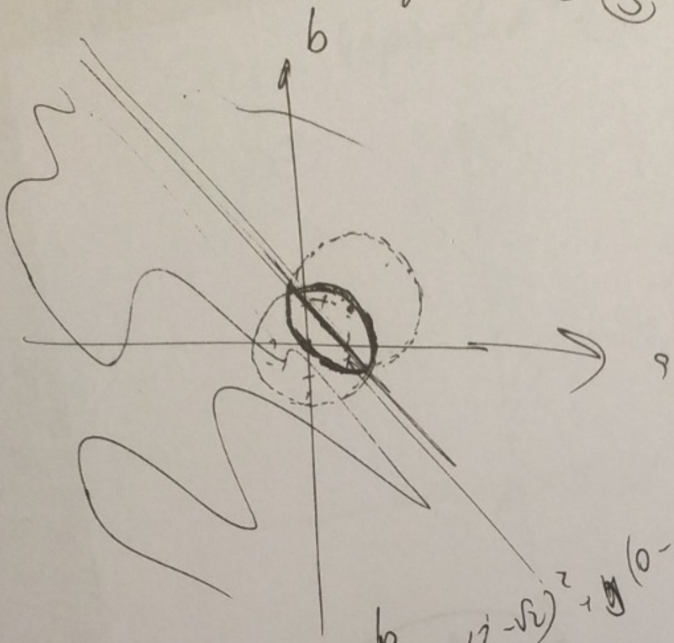
$\cos\varphi=\frac{36+25-x^2}{60}$

$4=2x^2-2x^2\cos\alpha$

$\frac{2x^2-4}{2x^2}=\cos\alpha$

$x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)$

черновик ③



$ax+by=4$

$2a+2b<2$ $\quad ax+by=4$

$a+b\le 1$ $\quad (x-a)^2+(y-b)^2=2$

$a<b<1-a$ $\quad x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=2$

$x^2+y^2=8$

$a^2+b^2=2$

$\sqrt{2}-$

$1+\sqrt{2}$

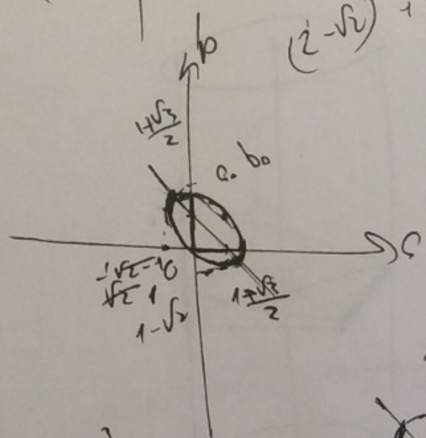
$\sqrt{2}+$ $\quad \sqrt{2}+x<$

$2\sqrt{2}-\sqrt{2}$

$(\sqrt{2})^2$

$(2-\sqrt{2})^2+y(0-0)^2$

$x(a-1)^2+\cancel{(b+1)^2}$



$a^2+b^2\le 2a+2b$

$a^2+b^2=2a+2b$

$a^2+b^2=2$

$2a+2b=2$

$a+b=1$

$a=1-b$

$1-2b+2b^2=2$

$2b^2-2b-1=0$

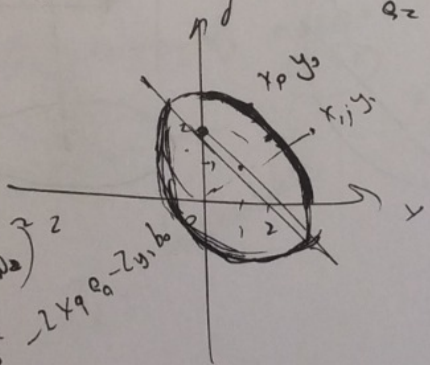
$D=4+8=12$

$b=\frac{2\pm 2\sqrt{3}}{4}$

$b=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

$a=\frac{2\mp\sqrt{3}}{2}$

$1\mp\frac{\sqrt{3}}{2}$



$(x_0-a_0)^2+1$

$(2a_0-a_0)$

$(y_1-a_0)^2+(y_1-b_0)^2=2$

$(x_1-a_0)^2+y_1^2+b_0^2-2x_1a_0-2y_1b_0$

$x_1^2+a_0^2+y_1^2=\sqrt{2}$

$2\sqrt{2}$

$2\sqrt{2}$

$b\sqrt{2}$

$2\cdot\sqrt{2}$

$2\sqrt{2}-\sqrt{2}$

$\sqrt{2}(2-1)$

$\frac{2-1\pm\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

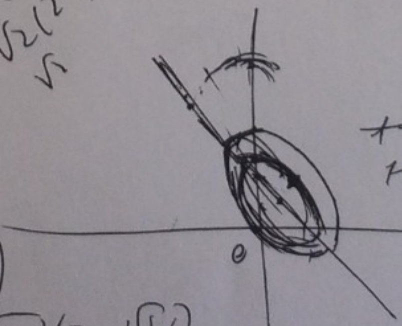
$\frac{2-1\mp 1\pm\sqrt{3}}{2}$

$x^2+y^2=8$

$y=1-x$

$1+x^2$

$\frac{14}{16}$



$-7+2x^2-2x=0$

$D=4+56=60$

$x=\frac{2+\sqrt{60}}{4}$

$\frac{2+\sqrt{60}}{4}\left(1-\frac{2+\sqrt{60}}{4}\right)$

$\frac{2+\sqrt{60}}{4}$

$\frac{(2+\sqrt{60})(2-\sqrt{60})}{16}$

$\frac{4-60}{16}=\frac{56}{16}=-\frac{14}{4}=-\frac{7}{2}$

21100262 (U244896 M1300503)

Черновик 4

$2\sqrt{2}$

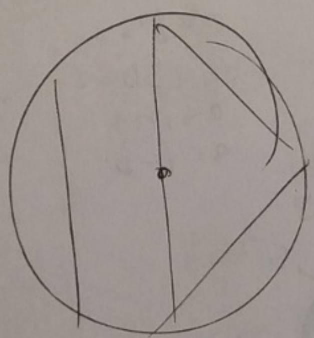
$x^2+y^2 < 8$

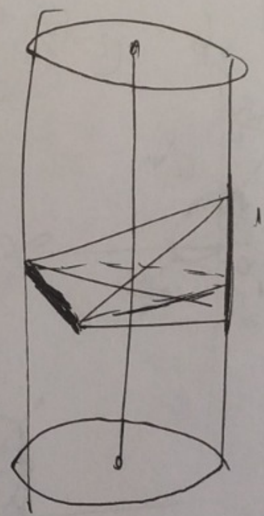
$y = 1-x$

$(2\sqrt{15})^2 + (2\sqrt{15})^2 =$

$60 + 60$

$\sqrt{1}$





$\frac{2}{25}$

17

~~Чиновик~~ Черновик 5

по Т косинусов

$30 \cancel{120} = 8 + 8 - 2 \cdot 8 \cdot \cos\angle AOB$

$\cos\angle AOB = \frac{-14}{16} = -\frac{7}{8}$

$\pi(2\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\arccos(-\frac{7}{8})}{2\pi} =$

~~S~~ $S_{половины фигуры} =$

$= 4(\pi - \arccos\frac{7}{8}) = 4\pi - 4\arccos\frac{7}{8}$

т.к. части фигуры симметрично отн $y = 1 - x$

$S_ф = 8\pi - 8\arccos\frac{7}{8}$

$y^2 = 8 - x^2$

8 −

8
32
44
136

$\sqrt{13}$

$4 \cdot 34$

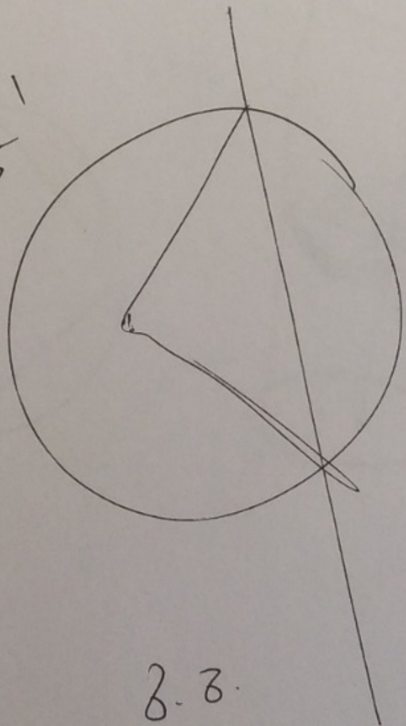
$34 + 23 - 2\sqrt{34 \cdot 23} \vee 1$

$55 - 2\sqrt{\ }$

$\sqrt{34}\ \cancel{\vee}\sqrt{23} \times 1$

$< 5 < 6 < 5$

$57 - 2\sqrt{\ }$



$34 \cdot 23$

34
23
102
68
782

8.8.

8m

$\sqrt{1 - \frac{49}{64}}$

64
49
15

$\frac{\sqrt{15}}{8}$

$\frac{8 \cdot \sqrt{15}}{\frac{8}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$

382

28
28
144
56
704

34
32
339
29
29
261
58

22
78
144
56

21100262 (U244896 M1300503)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100262**

ID профиля: **244896**

Вариант 17

чистовик вар 17

№4

$$\begin{cases} НОД(a, b, c) = 6 \\ НОК(a, b, c) = 2^{15} \cdot 3^{16} \end{cases}$$

пусть $a = 2^m \cdot 3^n$

$b = 2^k \cdot 3^p$ — других простых множителей нет, иначе

$c = 2^e \cdot 3^t$ — они были бы в разложении НОК на простые множители.

I. одно из чисел равно 6, ~~часть без огран~~ два других больше или равны 6

1) рассмотрим случай, когда два числа равны 6. Выбрать два таких числа можно $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ вариантами, последнее число из НОК задается однозначно, оно равно $2^{15} \cdot 3^{16}$

2) рассмотрим случай когда одно число равно 6. без ограничения общности выберем $a = 6$, тогда $b, c \neq 6$, $b, c > 6$ (иначе $НОД \neq 6$) или $a = 6$, то $\begin{cases} k + e = 14 \\ p + t = 15 \end{cases}$

$k = 1 \ldots 13$, $p = 1 \ldots 14 \Rightarrow 13 \cdot 14$ способов выбрать k, e, p, t (e, t задаются однозначно по k, p соотв.)

два способа из $13 \cdot 14$ дают вторую 6 ($k = 1$ $p = 1$, $k = 13$, $p = 14$), поэтому их надо вычесть.

Из трех чисел выбрать a можно тремя способами, т.е. всего способов в данном пункте — $13 \cdot 14 \cdot 3 - 6$

3) $a = b = c = 6$ не может быть, тогда не соблюдается условие по НОК

т.е. в (I) $6 + 13 \cdot 14 \cdot 3 - 6 = 13 \cdot 14 \cdot 3$ способов

II. одно из чисел имеет степень ~~2~~ $\neq 1$, двойки 1, а другое степень тройки 1, а число не равно 6.

1) пусть $a = 2 \cdot 3^n$ — $n, k \neq 1$

$b = 3 \cdot 2^k$ — $n, k > 1$. Способов выбрать a, b — $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

$c = 2^e \cdot 3^t$ — ~~ab~~ $e, t > 1$

$e + k = 14$ $n + t = 15$

~~[illegible] 13 · 14 способов~~ — $11 \cdot 12$

$n = 2 \ldots$ ~~1513~~ 13 $k = 2 \ldots$ ~~13~~ 12, т.е. ~~12 · 13~~ способов

итого, $11 \cdot 12 \cdot 6$ способов

1

Черновик вар 17

2) пусть два числа имеют 2 в степени 1, одно — 3 в степени 1

$C_3^1 = 3$ — способа выбрать такой набор

тогда пусть $a = 2\cdot 3^n$

$b = 2\cdot 3^k$

$c = 3\cdot 2^l$

$$\begin{cases} n+k=15 \\ l=13 \end{cases} \quad l=13 \text{ — 1 способ}$$

$n = 2 \ldots 13$ (т.к. $n, k > 1$)

итого, $\cancel{3\cdot 13}$ $3\cdot 12$ способов

3) пусть два числа имеют 3 в степени 1, одно — 2 в степени 1

тогда также 3 варианта для набора

пусть $a = 2\cdot 3^n$

$b = 3\cdot 2^p$

$c = 3\cdot 2^l$

$n = 14$ — 1 способ

$p + l = 14$

$p = 2 \ldots 12$ (т.к. $p, l > 1$)

итого, $3\cdot 11$ способов

В II суммарно: $3\cdot 11 + 3\cdot 12 + 11\cdot 12\cdot 6$

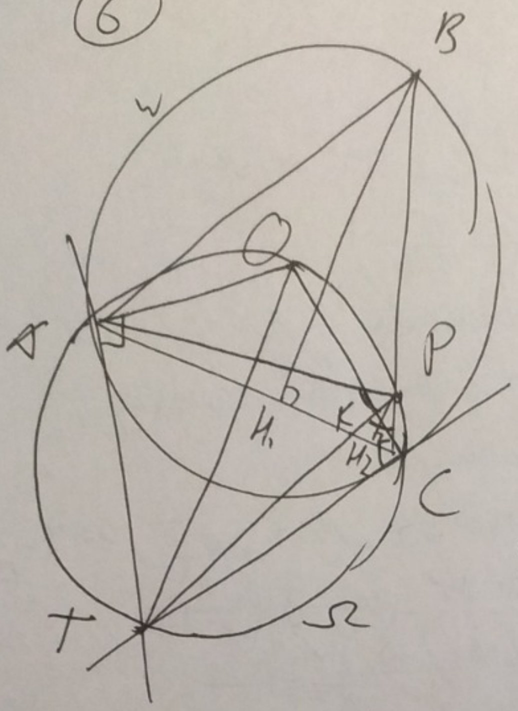
Итого, всего способов: $13\cdot 14\cdot 3 + 3\cdot 11 + 3\cdot 12 + 11\cdot 12\cdot 6 =$

$= 3(13\cdot 14 + 11 + 12 + 11\cdot 24)$

Ответ: $13\cdot 14\cdot 3 + 23\cdot 3 + 11\cdot 12\cdot 6$

чистовик вар 17

6



1) заметим, что $OATC$ — дельтоид, т.к. OA, OC — радиусы, AT, TC — касательные ⇒

⇒ четырехугольник вписан, $O, A, C \in \Omega \Rightarrow T \in \Omega$

где Ω — вторая данная окружность

2) $\triangle AOT = \triangle COT$ (гипотенуза общая ⇒ $OA = OC = R$, где R — радиус w) ⇒

⇒ $AT = TC$.

3) по т синусов:

$\frac{AT}{\sin\angle APT} = 2r$, $\frac{TC}{\sin\angle TPC} = 2r$, где r — радиус Ω,

$AT = TC$, r = общее ⇒ $\sin\angle APT = \sin\angle TPC$ ⇒

⇒ $\angle APT = \angle TPC$ (т.к. $\angle APC < 180°$)

4) $S_{\triangle APK} = \frac{AP \cdot PK \sin\angle APK}{2}$

$S_{\triangle KPC} = \frac{PC \cdot PK \cdot \sin\angle KPC}{2}$

$\frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle KPC}} = \frac{6}{4} = \frac{AP \cdot PK \cdot \sin\angle APK}{PC \cdot PK \cdot \sin\angle KPC}$ ⇒ $AP : PC = 3 : 2$ ⇒

⇒ $BC : PC = 5 : 2$

5) $S_{\triangle ABC} = \frac{BH_1 \cdot AC}{2}$, $S_{APC} = \frac{PH_2 \cdot AC}{2}$, где

H_1, H_2 — проекции B, P на AC соотв.

но $\triangle BH_1C \sim \triangle PH_2C$ ⇒ $\frac{BH_1}{PH_2} = \frac{BC}{PC} = \frac{5}{2}$ ⇒ $S_{ABC} = 5 \cdot S_{APC} =$

$= 50$

6) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{7}{5}$ ⇒ $\operatorname{tg}\angle ABC = \frac{7}{5}$ ⇒ $\frac{\sin\angle ABC}{\cos\angle ABC} = \frac{7}{5}$

$\sin^2\angle ABC + \cos^2\angle ABC = 1$

$\frac{\sin\angle ABC}{\sqrt{1 - \sin^2\angle ABC}} = \frac{7}{5}$

21100262 (U244896 M1300504)

черновик

Вар 17

$25\sin^2\angle ABC = 49 - 49\sin^2\angle ABC$

$\sin^2\angle ABC = \frac{49}{74}$

$\sin\angle ABC = \frac{7}{\sqrt{74}}$ (т.к. $\angle ABC < 90°$ по усл.

$\cos\angle ABC = \frac{5}{\sqrt{74}}$)

7) по св-ву вписанной окружности $\angle AOC = 2\angle ABC =$
$= 2\arcsin\frac{7}{\sqrt{74}} \Rightarrow \angle ATC = 180° - \angle AOC = \pi - 2\arcsin\frac{7}{\sqrt{74}}$
(по св-ву вписанного четырехугольника)

8) т.к. $\triangle AOT = \triangle COT$ $\angle ATO = \angle CTO \Rightarrow \angle ATO = 90 \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{7}{\sqrt{74}}$

~~9) $\angle TAK = \angle TOC$ т.к. опираются на одну дугу) $\Rightarrow$~~
~~$\Rightarrow \triangle TAK \sim \triangle CPK$ (по 2-м углам) $\Rightarrow \frac{PC}{AT} =$~~

9) $\angle AOC = \angle APC = \pi - 2\arcsin\frac{7}{\sqrt{74}}$ (т.к. опираются на одну дугу) $\sin\angle AOC = \sin(2\arcsin\frac{7}{\sqrt{74}}) = 2\frac{7}{\sqrt{74}}\cdot\frac{5}{\sqrt{74}}$

10) $S_{\triangle APC} = \frac{AP\cdot PC\cdot\sin\angle AOC}{2} = 10 = \frac{PC^2\cdot\frac{3}{2}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{7}{\sqrt{74}}\cdot\frac{5}{\sqrt{74}}}{2} =$

$= \frac{PC^2\cdot 3\cdot 7\cdot 5}{2\cdot 74} = 10$

$PC^2 = \frac{10\cdot 2\cdot 74}{3\cdot 7\cdot 5}$

$PC = 2\sqrt{\frac{74}{21}}$

$AP = 3\sqrt{\frac{74}{21}}$

11) по т косинусов:

$AC^2 = PC^2 + AP^2 - 2PC\cdot AP\cdot\cos\angle APC$

$AC^2 = \frac{4\cdot 74}{21} + \frac{9\cdot 74}{21} + \frac{2\cdot 6\cdot 74}{21}\cdot\cos(2\arccos\frac{5}{\sqrt{74}})$

$AC^2 = \frac{74}{21}(4 + 9 + 12\cos^2(\arccos\frac{5}{\sqrt{74}}) - 12\sin^2(\arcsin\frac{7}{\sqrt{74}}))$

$AC^2 = \frac{74}{21}(13 + \frac{12\cdot 25}{74} - \frac{12\cdot 49}{74})$

$AC^2 = \frac{74}{21}(\frac{13\cdot 74 - 12\cdot 24}{74}) = \frac{13\cdot 74 - 12\cdot 24}{21} = \frac{674}{21}$

Ответ: $AC = \sqrt{\frac{674}{21}}$; $S_{ABC} = 50$

4

21100262 (U244896 M1300504)

черновик вар 17

N5 $\log_{5x-1}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$; $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

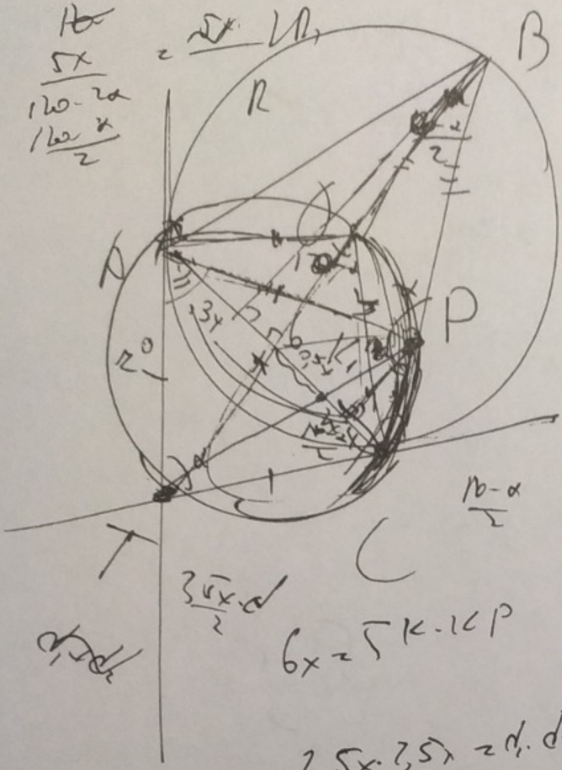
ООЗ. $\begin{cases} 5x-1>0 \\ 5x-1\neq 0 \\ 4x+1>0 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ 4x+1\neq 0 \\ \frac{x}{2}+2\neq 0 \end{cases}$ $\begin{matrix} x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{5} \\ x>-\frac{1}{4} \\ x>-4 \\ x\neq 0 \\ x\neq -2 \end{matrix}$

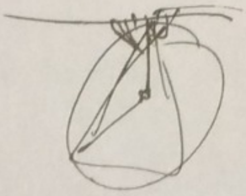
$\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{2}{5};\infty\right)$

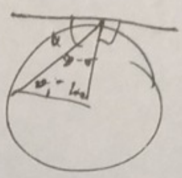
5

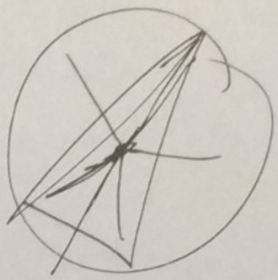
черновик 1,

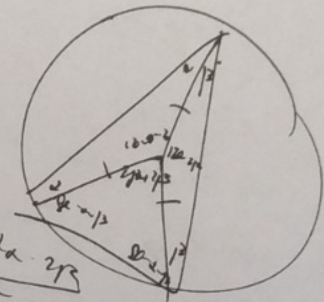
$\frac{AC}{\sin\frac{180-\alpha}{2}} = \frac{5x}{\sin(180-2\alpha)} = 2R_1$











$\frac{180-\alpha}{2}$

$\frac{3{,}5x\cdot d}{2}$

$d_1 \cdot d_2$

$6x = 5K \cdot KP$

$1{,}5x \cdot 3{,}5x = d_1 \cdot d_2$

$5{,}25x^2 = d_1 \cdot d_2$

$\frac{180-2\alpha-2\beta}{2}$

$(90-\alpha) = 2\alpha$

$90 = 3\alpha$

$\alpha = 30$

$\frac{AC}{\sin\beta} = 2R$

$h = 3{,}5$

НОД$(a,b,c) = 6$

НОК$(a,b,c) = 2^{15} \cdot 3^{16}$

$a = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}$

$b = 2^{\gamma} \cdot 3^{\varphi}$

$c = 2^{\delta} \cdot 3^{\varepsilon}$

(1) $a = 2^m + 3^n$

$b = 2^k + 3^p$

$c = 2^l + 3^t$

$\begin{cases} a = 6 \\ k + l = 14 \\ p + t = 15 \end{cases}$

$\frac{13 \cdot 14}{2}$

(2) $a = 2 \cdot 3^n$

$b = \cancel{2 \cdot 3^p}\ 2^k \cdot 3$

$c = 2^l + 3^t$

21100262 (U244896 M1300504)

черновик 2

$\log_{5x-1}(4x+1)$ $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

ОДЗ. $5x-1>0$ $x>\frac{1}{5}$

$5x-1\neq 1$ $x\neq\frac{2}{5}$

$4x+1>0$ $x>-\frac{1}{4}$

$4x+1\neq 1$

$x\neq 0$

$\frac{x}{2}+2>0$ $x>-4$

$\frac{x}{2}+2\neq 1$

$\frac{x}{2}\neq -1$

$x\neq -2$

$\left(\frac{1}{5};\infty\right) \setminus \left\{\frac{2}{5}\right\}$

I. $\log_{5x-1}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\log_{5x-1}(4x+1) = \log_{4x+1}\left|\frac{x}{2}+2\right|$

$\frac{1}{\log_{4x+1}(5x-1)} = \log_{4x+1}\left|\frac{x}{2}+2\right|$

$\log_{4x+1}\left|\frac{x}{2}+2\right| \log_{4x+1}(5x-1) = 1$

~~5x+1≠1~~

678 $\frac{74}{21}\left(13-\frac{12}{74}(25-48)\right)$

$\frac{74}{21}\left(13-\frac{12\cdot 24}{74}\right)$

$\frac{13\cdot 74}{21}-\frac{12\cdot 24}{21}$

$13\cdot 74-12\cdot$

$674=2\cdot 337$

12 × 24 = 48, 24, 288

13 × 74 = 52, 91, 962

962 − 288 = 674

13 × 74 = 128 (crossed), 13 × 74: 52, 91, 962

Решение 3.

$$\frac{5x}{\sin\alpha} = 2r$$

$$\frac{5x}{\sin\left(\frac{180-\alpha}{2}\right)} = 2R$$

$$\frac{5x}{\sin\alpha} = 2r$$

$$\frac{5x}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2R$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{R}{r}$$

$$\sin \quad 2\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{r}$$

AC

$$\frac{AO}{OC} = k$$

$$\frac{AK}{KC} = k$$

$$\frac{S_x - AK}{KC} = \quad \frac{AK}{KC}$$

$$\frac{5x}{KC} - k$$

$$8 \quad \frac{6}{S} = k^2$$

$$S = \frac{6}{k^2}$$

$$\frac{AK}{KP} = t$$

$$8 \quad S =$$

$$4t^2 = \frac{6}{k^2}$$

$$AK\left(\frac{1}{KC} + \frac{1}{KP}\right) = k + t$$

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos\beta = x^2 + t^2 - 2xt\cos\beta$$

$$y^2 - t^2 = 2\cos\beta x(y - t)$$

$$y + t = 2x\cos\beta$$

черновик 4.

$\log_{5x-1}(4x+1) = \log_{4x+1}\left|\frac{x}{2}+2\right|$

на ОДЗ $x > \frac{1}{5}$ $x \neq \frac{2}{5}$

$x > 2$ < 1 $x = \frac{2}{7}$

$\log_{4x+1}(5x-1)\log_{4x+1}\left|\frac{x}{2}+2\right| = 1$

$2\log_a b = 2\log_b |c|$ $\log_c a$

$\log_{4x+1}$ $4x+1 \vee 5x-1$

$2-x \vee 0$

$\log_a b = \log_b |c|$

$4x+1 \vee \frac{x}{2}+2$ $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{7}$

$\cancel{\log_a b}$

$3{,}5x-1 \vee 0$

$x = \frac{2}{7}$

$\frac{1}{5}$ $\frac{2}{7}$ 2

$\log_a b \cdot \log_b |c| = 1$ $2\log_a b - \log_c a$

$\cancel{2\log_a b - 1 = \log_c a}$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = 2\log_{5x-1}(4x+1)$

10 $y = 2\sin x$

$\frac{4y}{\sin\alpha} = \frac{5x}{\sin 2\alpha} = 2R$ $180 - 2\alpha$

$\frac{a\, b\, 5x}{2\sqrt{3{,}25}\,R} = R^2$

$\frac{5x \cdot 3y}{\sqrt{3{,}25}} = R^2$

$a\,b\,x = 4\sqrt{3{,}25}\,R$

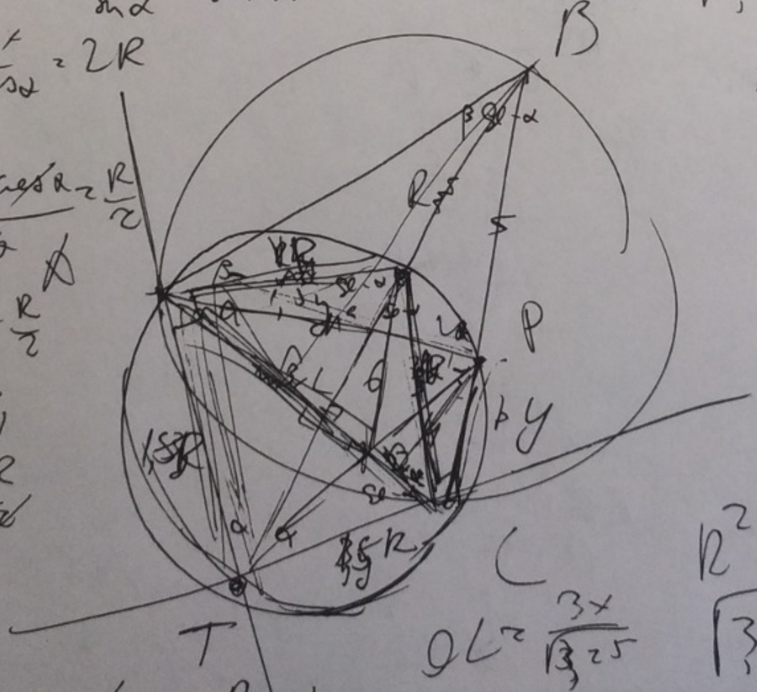
$\frac{5x}{\cos\alpha} = 2R$

$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{R}{2}$

$2\sin\alpha = \frac{R}{2}$

$\frac{2y}{2x} = \frac{R}{2}$

$\frac{2y}{x} = \frac{R}{x}$



$\frac{R^2 \sin 2\alpha}{7} = \left(\frac{R + 3{,}5x}{7}\right)\frac{\sqrt{3{,}25}\,R}{7}$

$R\sin 2\alpha = \sqrt{3{,}25}\,R + 7{,}5x \cdot \sqrt{3{,}25}$

$2\,\frac{a \cdot 4x \cdot R}{x} = \frac{3b \cdot 4x \cdot R}{x}$

$R^2 + 7{,}25\,R^2 =$

$\sqrt{3{,}25}\,R$

$OL = \frac{3x}{\sqrt{3{,}25}}$

$\frac{OL}{LA} = \frac{R}{2} \frac{1}{\sqrt{3{,}25}}$

$\sqrt{3{,}25}\,R = d$ $r = \frac{\sqrt{3{,}25}\,R}{2}$

$6x = \sqrt{3{,}25}\,R\,a - a^2$

$6x = a\,b$ $a + b = \sqrt{3{,}25}\,R$

$6x = a(\sqrt{3{,}25}\,R - a)$

21100262 (U244896 M1300504)