Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100241**

ID профиля: **157372**

Вариант 17

№1

Дано:

$S = a_1 + a_2 \ldots + a_{10}$

$a_1 = a$

$a_2 = a + b$

$a_3 = a + 2b$

$a_{10} = a + 9b$

$a_{11} = a + 10b$

$a_{12} = a + 11b$

$a_6 \cdot a_{12} > S+1$

$(a+5b)(a+11b) > S+1$

$a_7 \cdot a_{11} < S+17$

$(a+6b)(a+10b) < S+17$

$\begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$b > 0$ ← т.к. ариф. прогрессия возрастающая

Решение:

$a^2 + 16ab + 55b^2 > S+1$

$a^2 + 16ab + 60b^2 < S+17$

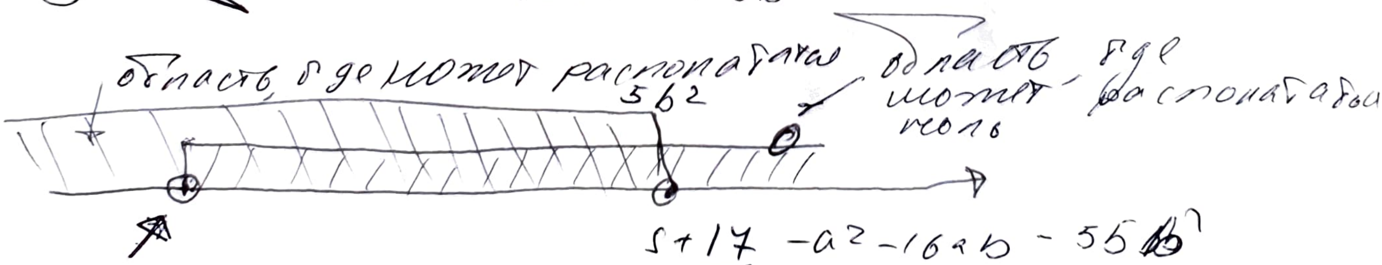
! $b^2 \geq 0$ [т.к. в 2 степени]

$55b^2 > S+1-a^2-16ab$

$60b^2 > S+17-a^2-16ab$

$0 > S+1-a^2-16ab-55b^2$

$5b^2 < S+1-a^2-16ab-55b^2$



$S+1-a^2-16ab-55b^2$

$5b^2 \geq 0 \Rightarrow$

$5b^2 \in$ области пересечения.

Область пересечения ≤ 16 $(17-1)$ $\Rightarrow$

$\begin{cases} 5b^2 \in (0;16) \\ b \in \mathbb{Z} \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow$ $b=1;\ 5b^2 = 5 \in [0;16)$ ← подходит

$b \geq 2\ \ 5b^2 \geq 20 \notin (0;16)$ ← НЕ подходит

№1 (продолжение) <u>Чистовик</u> стр 2 из 6

$\boxed{b=1}$

$$\begin{cases} 10a+45b=S & \Rightarrow S=10a+45 \\ a^2+16ab+55b^2 \geq S+1 & \Rightarrow a^2+16a+55 \geq S+1 \\ a^2+16ab+60b^2 \leq S+17 & \Rightarrow a^2+16a+60 \leq S+17 \end{cases}$$

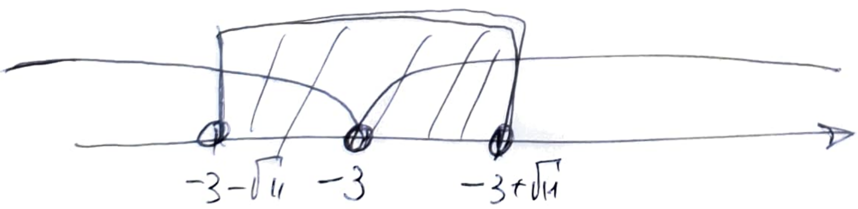
$$\begin{cases} a^2+16a+55 > 10a+45+1 \\ a^2+16a+60 < 10a+45+17 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+6a+9>0 \\ a^2+6a-2<0 \end{cases}$$

$$\frac{-6\pm\sqrt{36-36}}{2} \qquad \boxed{a=-3}$$

$$\frac{-6\pm\sqrt{36+8}}{2}$$

$$\frac{-6\pm2\sqrt{11}}{2} = -3\pm\sqrt{11}$$



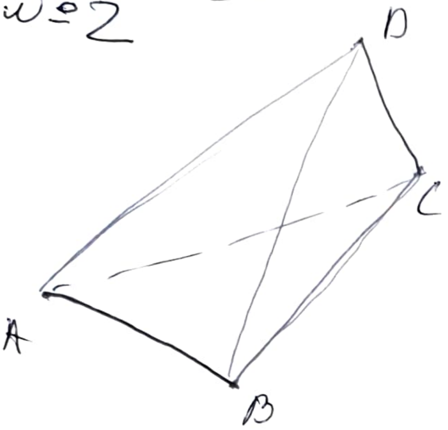
все целые в данном промежутке

$$\sqrt{11}\in(3;4) \Rightarrow \begin{cases} a=-3-3 \\ a=-3-2 \\ a=-3-1 \\ a=-3+1 \\ a=-3+2 \\ a=-3+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\in[-6;0]\,/\,\{-3\} \\ a\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $a=\{-6\};\{-5\};\{-4\};\{-2\};\{-1\};\{0\}$

№2 Чистовик

— тетраэдр



$AB = 2$

$AC = CB = 5$

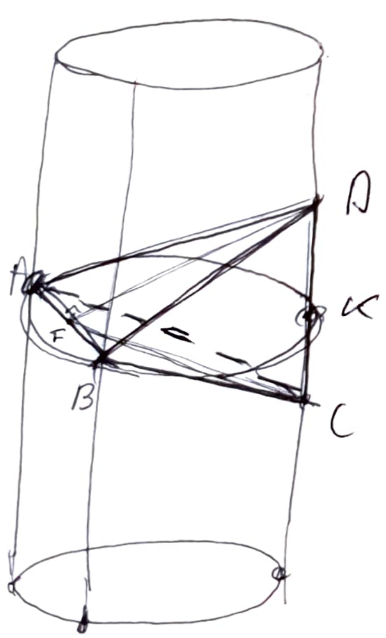
$AD = DB = 6$

$DC - ?$ ← найти.

вписан в цилиндр, все вершина касаются поверхности

$CD \parallel$ оси цилиндра.

1) Если $CD \parallel$ оси цилиндра, а C и $D \in$ боковой поверхности $\Rightarrow CD \in$ боковой поверхности целиком (т.к. ~~все~~ боковой поверхности $\parallel$ оси прямые)



2) ΔABD - р/б ($AD = BD = 6$ из условия)

ΔABC - р/б ($AC = BC = 5$ из условия)

3) $DF \perp AB$; $F \in AB$; т.к. ΔABD - р/б $AF = BF \Rightarrow$

$CF \perp AB$; т.к. ΔABC - р/б и $AF = BF$

$\Rightarrow (FDC)$ - плоскость, содержащая ΔDFC

$FDC \perp AB$ (т.к. $AB \perp FC$, $AB \perp FD$)

4) $(FDC) \parallel$ оси (цилиндра) или ось цилиндра $\in (FDC)$; $AB \perp$ всем прямым плоскости $FDC \Rightarrow$

$\begin{cases} AB \perp \text{оси цилиндра} \\ AB \perp DC \end{cases}$

№2, продолжение; Чистова стр 4 из 6

5) $K \in DC$,

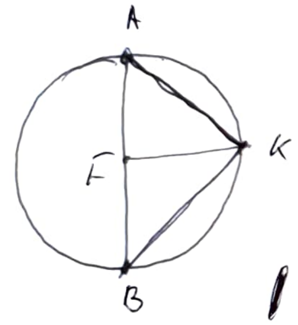
$K \in$ ~~сечению~~ сечению цилиндра плоскостью $\parallel$ основанию и содержащей AB $\Rightarrow$

$\triangle ABK$ вписан в окружность с радиусом цилиндра.

2 стороны равны, 1 общая $\Rightarrow$ $\boxed{\text{II признак}}$

$\triangle ADC = \triangle DBC \Rightarrow$

6.1)



$\boxed{AK = BK}$

$AK = BK = ?$

$AB = 2$ по условию

! радиус цилиндра наименьший из полученных $\Rightarrow$ AB - диаметр (~~наи~~ наибольший отрезок в окружности)

[если AB - не будет диаметром, т.с. $2 \cdot r$, то ~~найдется~~ диаметр $> AB \Rightarrow r > \frac{2}{1} = 1$]

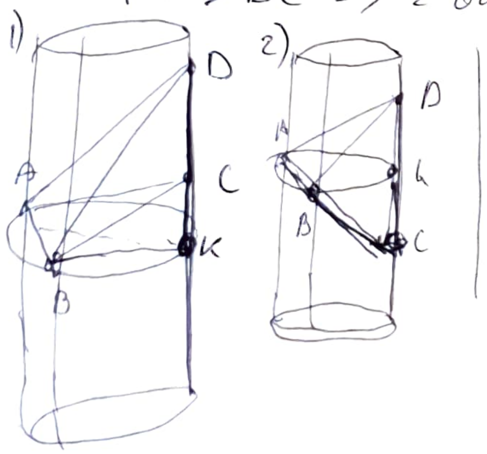
r окружности $= 1$

6.2) т.к. AB - диаметр $\Rightarrow \angle AKB = \frac{\pi}{2}$ ~~прямой~~

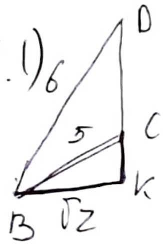
$AK = BK \Rightarrow \boxed{AK = BK = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}}$

$\boxed{KF = 1}$, как медиана, высота и биссектриса в прямоугольном треугольнике.

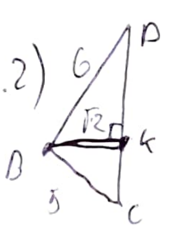
7) $DB > BC \Rightarrow 2$ варианта расположения K:



7.1)



7.2)



$DK \perp (ABK)$ т.к. $DK \parallel$ оси цил.

$ABK \parallel$ плоскости основания окружности

$DC = \sqrt{36-2} - \sqrt{25-2}$

$DC = \sqrt{34} - \sqrt{23}$

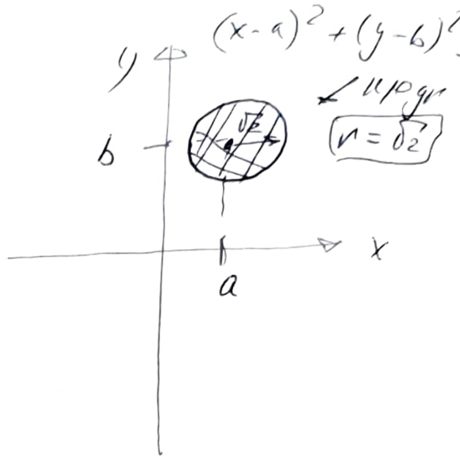
$DC = \sqrt{36-2} + \sqrt{25-2} = \sqrt{34} + \sqrt{23}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} DC = \sqrt{34} + \sqrt{23} \\ DC = \sqrt{34} - \sqrt{23} \end{array} \right.$

Чистовик стр 5 из 6

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 2\\ a^2+b^2\le \min\left(2(a+b);\ 2\right)\end{cases}$$



Перепишем второе условие (неравенство) в удобную форму

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a+b)\ge 1 & \text{I}\\ a^2+b^2\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}a+b<1 & \text{II}\\ a^2+b^2\le 2(a+b)\end{cases}\end{array}\right.$$

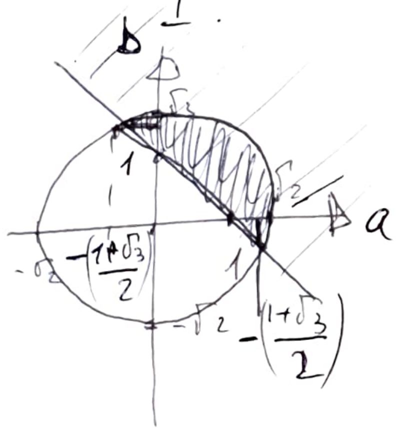
$\Rightarrow$ верхняя полуплоскость относительно прямой $a+b=1$

$\Rightarrow$ окружность

$\Rightarrow$ нижняя полуплоскость относительно прямой $a+b=1$

$\Rightarrow$ окружность

I:



$a=b-1$

$a^2+b^2=2$

$(b-1)^2+b^2=2$

$b^2-2b+1+b^2=2$

$2b^2-2b-1=0$

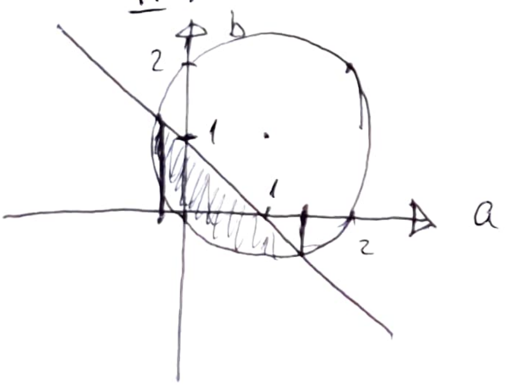
$b=\frac{2\pm\sqrt{4+8}}{4}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

$a=\frac{1+\sqrt{3}}{2}-1=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$\frac{1-\sqrt{3}}{2}-1=-\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$

$\boxed{r=\sqrt{2}}$

II:



$$\begin{cases}a=b-1\\ a^2+b^2=2(a+b)\end{cases}$$

$(b-1)^2+b^2=2(b-1+b)$

$\frac{\sqrt{2^2+2^2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

$\boxed{r=\sqrt{2}}$

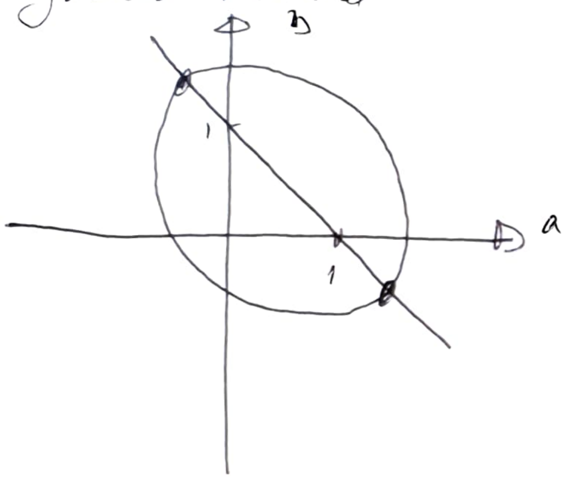
$b=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

$a=-\frac{1+\sqrt{3}}{2};\quad a=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

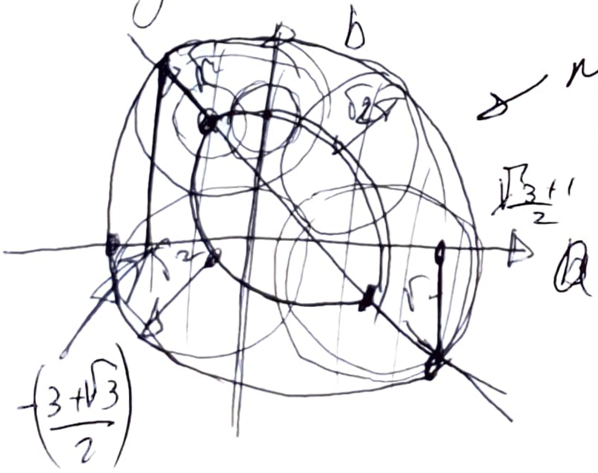
№3 продолжение

Чистовик стр 6 из 6

То есть мы можем заметить, что два получившихся "куска" - части одинаковых окружностей ($r = \sqrt{2}$) пересекающихся $a + b = 1$ в одной точке



г) Т.к. $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 2$ - это окружность с центром в $(a;b)$ и радиусом $\boxed{\sqrt{2}}$, то фигура M, это фактически "протасканная"(*) окружность с $r = \sqrt{2}$ по всем допустимым $(a;b)$ получившимся в предыдущем пункте

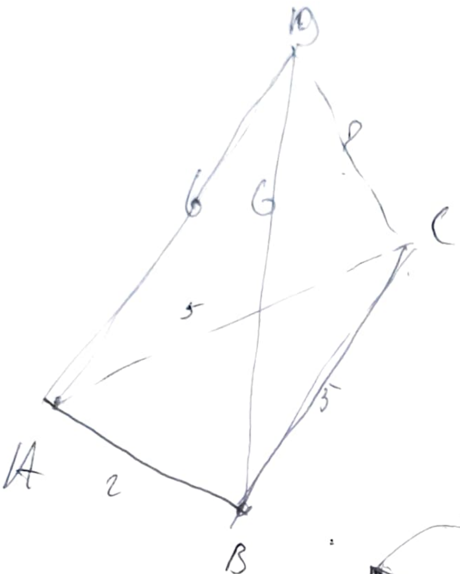


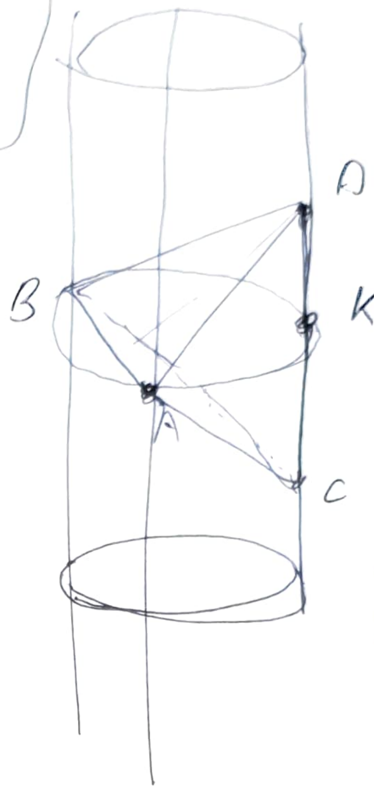
$$\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$$

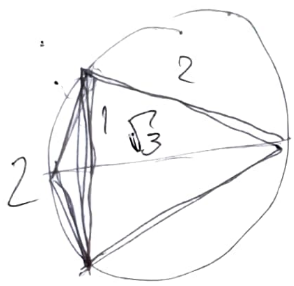
Черновик

№ 2



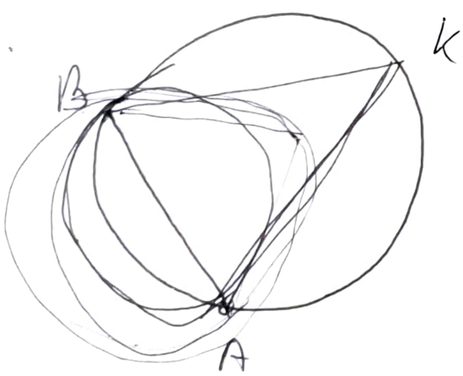


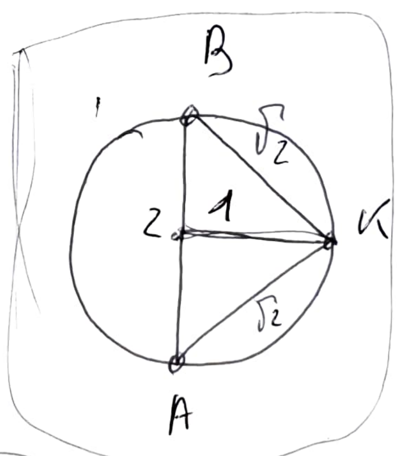
$$R = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2}}$$

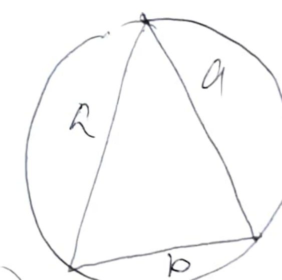


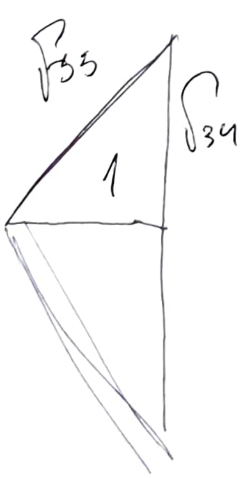
$$\frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$R = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$$

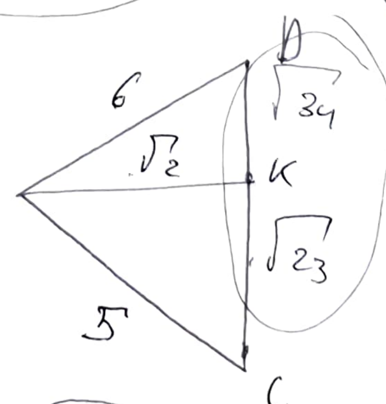






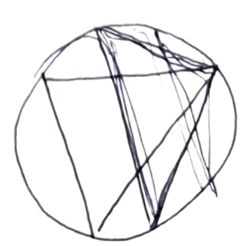


$$\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$$



36 - 2 = 34

25 - 2 =



Черновик

№1

$S = a_1 + a_2 \ldots + a_{10}$

$a_6 \cdot a_{12} > S + 1$

$a_7 \cdot a_{11} < S + 17$

$a_1 ; (a_1 + b) ; (a_1 + 2b)$

$10a_1 + \frac{10 \cdot 9}{2} b = S$

$\boxed{10a_1 + 45b = S}$

$(a_1 + 5b)(a_1 + 11b) > S + 1$

$\boxed{a_1^2 + 16a_1 b + 55b^2 > S + 1}$

$(a_1 + 6b)(a_1 + 10b) \gtrless S + 17$

$\boxed{a_1^2 + 16a_1 b + 60b^2 > S + 17}$

$a_1^2 + 16a_1 b + 55b^2 > 10a_1 + 45b + 1$

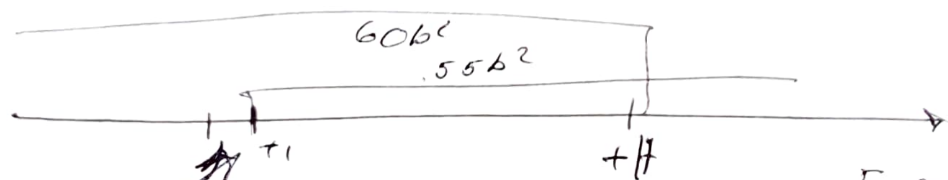
$55b^2 > S + 1 - a_1^2 + 16a_1 b$

$60b^2 \gtrless S + 17 - a^2 + 16ab$

$\cancel{55b^2} > S + 1 - a^2 -$

① $\begin{cases} 10a = S \\ a^2 > S + 1 \\ a^2 < S + 1 \end{cases}$

② $\begin{cases} 10a + 45 = 45 \\ a_1^2 + 71 > S + 1 \\ a_1^2 + 76 < S + 17 \end{cases}$



$S - a^2 + 16a_1 b$

$5b^2 \in [0; 16]$

$\boxed{\begin{matrix} b = 0 \\ b = 1 \end{matrix}}$

$5 \cdot 0$

$5 \cdot 1$

$5 \cdot 4$

$10 \cdot a + 0 = S$

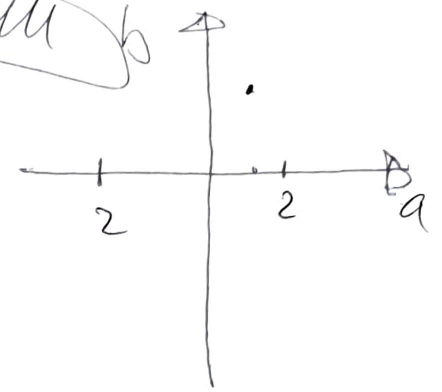
$a^2 > S + 1$

$a^2 < S + 17$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 2$

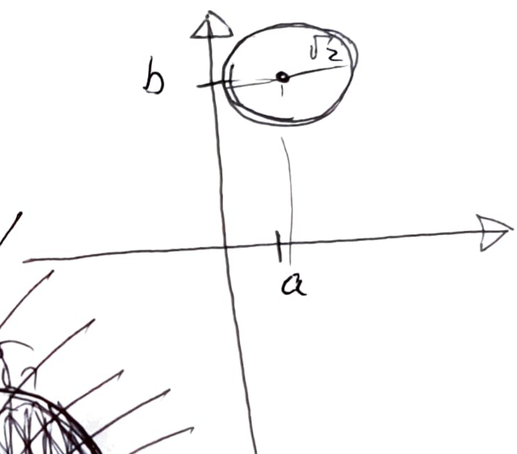
Черновик

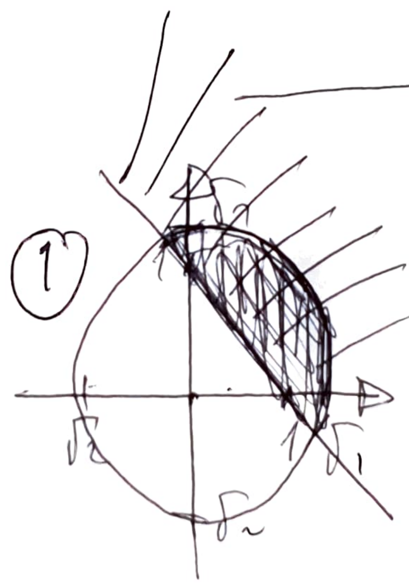
$a^2+b^2 \leq \min(2(a+b); 2)$



$x-$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b \geq 1 \\ a^2+b^2 \leq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b \leq 1 \\ a^2+b^2 \leq 2(a+b) \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$





$(a+b) \geq 1$

$(a+b)^2 - 2ab \leq 2$

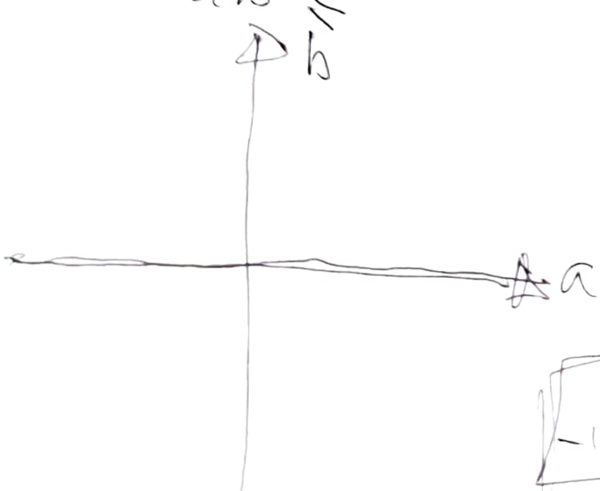
$1 \leq (a+b)^2 \leq (2(1-ab))$

$1 \leq 2(1-ab)$

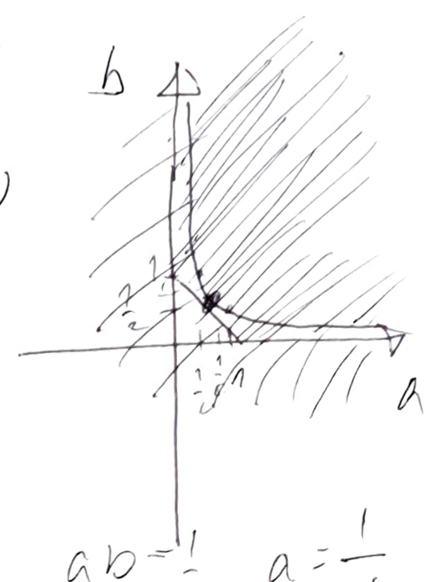
$1-ab \geq \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \leq 1-ab$

$ab \leq$



$$\begin{cases} \boxed{ab \leq \frac{1}{2}} \\ a+b \geq 1 \end{cases}$$



$ab = \frac{1}{2}$ $\quad a = \frac{1}{2b}$

$b \geq 1-a$

$a+b=1$

$\boxed{-1 \pm \sqrt{1-2}}$

$b+\frac{1}{2b}=1$

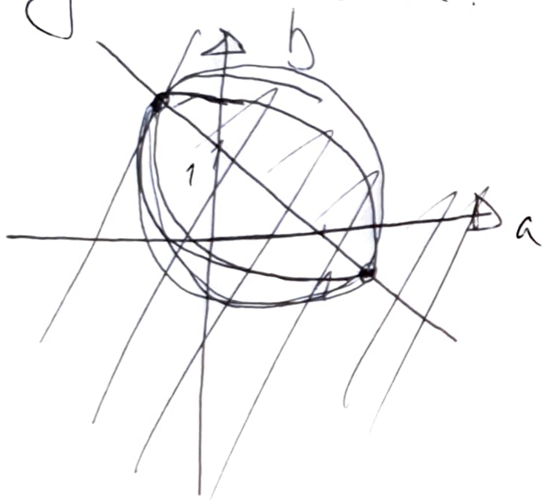
$b^2+b+\frac{1}{2} \geq 0$

Б-3 представление чертежа:

~~Чистовик~~

Черновик

Т.е. как мы видим это две части одинаковых окружностей касающихся в одной точке:



$$S=\frac{R^2}{2}\left(\pi-\frac{\alpha^\circ}{180^\circ}-\sin(\alpha^\circ)\right)$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100241**

ID профиля: **157372**

Вариант 17

№4 Чистовик ~~№9~~ стр 1 из 5

Если НОД $(a,b,c)=6$, то ~~каждое~~ число содержит среди множителей $\underbrace{2\cdot3}=6$

Если НОК $(a,b,c)=2^{15}\cdot3^{16}$, то

1) множители a,b,c - это только $2^i;\ i\in[0;15]$
$3^j;\ j\in[0;16]$

2) ~~Наи~~ наибольшая степень множителя одного из чисел (a,b,c) равна 15 для 2 или 16 для 3.

Т.е. хотя бы одно число можно представить как $\alpha\cdot2^{15}$, и хотя бы одно как ~~$2\cdot$~~ $\beta\cdot3^{16}$

$\Rightarrow$ Представим числа a,b,c как три коробки с множителями.

1) В каждой коробке обязательно должно лежать 6.

Распределим остальные множители

a: $\boxed{6\cdot\alpha}$ b: $\boxed{\beta\cdot6}$ c: $\boxed{6\cdot\gamma}$

в одну из 3х коробок пойдет $2^{15-1}=2^{14}$ (т.к. в 6 содержится двойка)

в остальные две коробки может пойти двойка в любой степени от 0 до 14.

Рассмотрим от 0 до 13 (т.к. в 14 степени будут дубли)

Чистовик стр 2 из 5

$\sigma = 4$

от 0 до 13 — варианты, когда из 3х чисел, у двоих 2^{14}

$3 \cdot 14 \cdot 14 + \underset{b}{3} + 1$ — когда во всех трёх числах степени

Аналогично для троек!

от 0 до 14 b

$3 \cdot 15 \cdot 15 + 3 + 1 = BWR$

$\Sigma = 401968 = (3 \cdot 14^2 + 4)(3 \cdot 15^2 + 4)$

Ответ

№5 Дано

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$

$\log_{(4x+1)}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$;

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

Замена

$5x-1=a$

$4x+1=b$

$\frac{x}{2}+2=c$

$\Rightarrow$

$2\log_a b$; $2\log_b c$; $\log_c a$

I вариант

$2\log_a b = 2\log_b c \Rightarrow \underline{\log_a b = \log_b c}$

$2\log_a b = \log_c a + 1$

$2\log_a b = \log_c a + 1 \Leftrightarrow$

$2\log_a b = \frac{\log_b a}{\log_b c} + 1 \Leftrightarrow$

$\boxed{\log_a b = \alpha}$

$2\log_a b = \frac{(\log_a b)^{-1}}{\log_a b} + 1$

$2\alpha = \frac{1}{\alpha^2} + 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$

$\log_a b = 1 = \log_b c \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} 2\log_a b = 2\log_b c \\ 2\cdot 1 = 2\cdot 1 \end{array}\right.$

$\left(\begin{array}{l} 2\cdot 1 = 1+1 \\ 2\log_a b = \log_c a + 1 \end{array}\right.$

$\boxed{a = b = c}$

$a = b$

$4x+1 = 5x-1$

$x = 2$

$a = c \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\boxed{\text{НЕ подходят}}$

№ $\overline{5}$ продолжение

Чистовик стр 4 из 5

II вариант

$2\log_a b = \log_c a$ | $\log_a c = \log_c a^{-1} = (2\log_a b)^{-1}$

$2\log_a b = 2\log_b c + 1 \Rightarrow$

$2\log_a b = 2\left(\frac{\log_a c}{\log_a b}\right) + 1$

$2\log_a b = 2\left(\frac{(2\log_a b)^{-1}}{\log_a b}\right) + 1$

$2\log_a b = \frac{1}{\log_a^2 b} + 1 \Rightarrow \log_a b = 1$

$a = b$

$2 = \log_c a \Rightarrow b = a = c^2$

$1 + 4x = 5x - 1 \Rightarrow x = 2$ ← подходит

$(5x-1) = \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 10 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{x = 2}$

III вариант

$2\log_b c = \log_c a$

$2\log_b c = 2\log_a b + 1 \Rightarrow$

$2\log_b c = 2\left(\frac{\log_c b}{\log_c a}\right) + 1$

$2\log_b c = 2\left(\frac{1}{2\log_b^2 c}\right) + 1$

$2\log_b c = \frac{1}{\log_b^2 c} + 1 \Rightarrow \log_b c = 1$ ← не подходит $\Rightarrow$

$b = c \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{7}}$

$a = c^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 10 \end{array}\right. \Rightarrow$

Ответ:

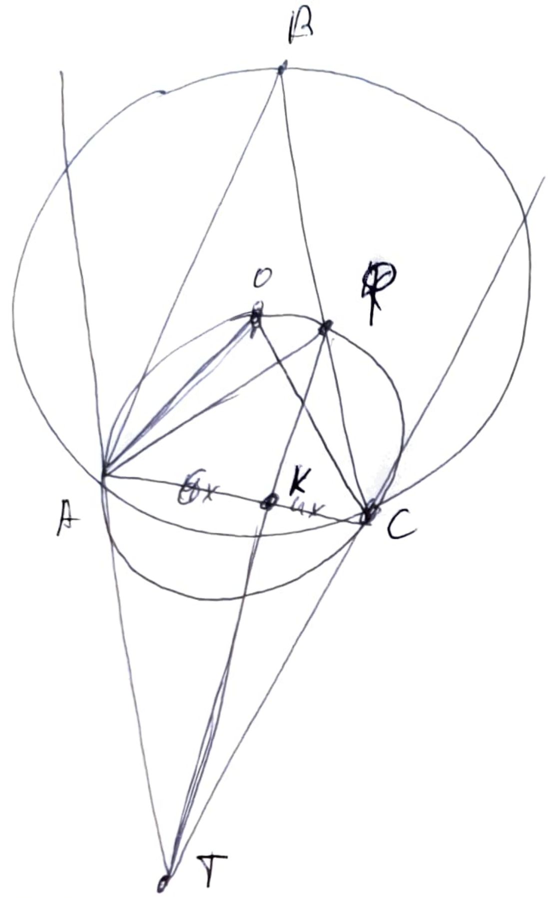
$X = 2$

№6 Чистовик стр 5 из 5

$\triangle ABC$

$S_{\triangle APK} = 6$

$S_{\triangle KPC} = 4$



а)

1) т.к. $\triangle APK$ и $\triangle KPC$ имеют одинаковую высоту и лежат основания $\Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

2) Пусть $\angle AOC = \alpha \Rightarrow \angle APC = \alpha$, т.к. опирается на ту же дугу

$\angle ABC = \frac{\alpha}{2}$, т.к. опирается на туже дугу, но O - центр, а B - на окружности

RK - бисс $\Rightarrow \angle CRK = \frac{\alpha}{2} = CBA$

3) $RK \parallel AB$, $\angle C$ - общий;

$CK \in CA$
$CP \in CB$ $\Rightarrow$ коэфф подобия: $\left(\frac{4}{10}\right)^2 = \frac{16}{100} \Rightarrow$

$S_{\triangle CRK} = 4 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{100}{16} \cdot 4 = 25$

Ответ(а): 25

№6

Черновик

Дано:

$\triangle ABC$

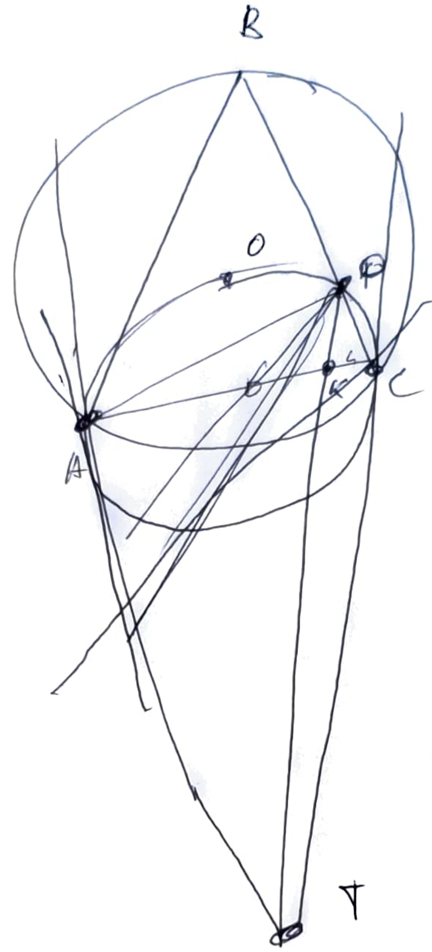
вписан в W

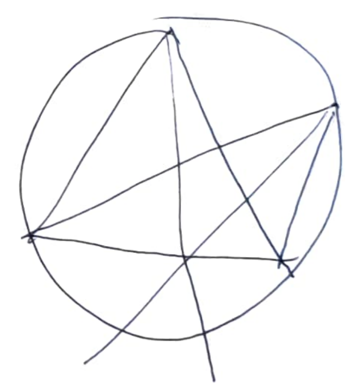
$P \in BC$

$K \in TP \cap AC$

$S_{\triangle APK} = 6$

$S_{\triangle CPK} = 4$





НОД $(a,b,c)=6$

Чиртовчик.

НОК $(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16}$

НОК $(6\cdot\alpha + 6\cdot\beta + 6\gamma) = 6\cdot$

$3\cdot 2^{15};\ 3\cdot 2^{14};\ 2\cdot 3^{16}$

$2^{14};\ 3^{15}$

6 6 6

в один из трех $:2^{14}$

$2^{0}\ldots 2^{15}$

$$\frac{3\cdot(15)^2\cdot 3\,(16)^2}{3}$$

$\log_{\sqrt{5x+1}}(4x+1)$ $\log_{(\frac{x}{2}+2)}(5x-1)$

$\log_{(4x+1)}(\frac{x}{2}+2)^2$

$a=5x-1$

$b=\frac{x}{2}+2$

$c=4x+1$

$\log_{\sqrt{a}} c$

$\log_b(a)^2$

$\log_c(b)^2$

$2\log_a c$

$2\log_b a$

$2\log_c b$

$\frac{\log_a a}{\log_a b}$

$2\log_a c = \log_b a$

$2\log_a c\cdot\log_a b = 1$

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{(\frac{x}{2}+2)}(5x-1)$ $\quad 2\log_a b$

$2\log_{(5x-1)}(4x+1) = \log_{(\frac{x}{2}+2)}(5x-1)$ $\quad 2\log_b c$

$\log_c a$

$2\log_{(5x-1)}(4x+1) = \dfrac{\log_{(5x-1)}(5x-1)}{\log_{(5x-1)}(\frac{x}{2}+2)}$

Черновик

$\boxed{2\log_{(5x-1)}(4x+1)\cdot\log_{(5x-1)}(\frac{x}{2}+2)} = 1$

$\log_2 16 = 4$

$\log_2 8 = 3$

$\log_2 16 \cdot \log_2 8 = 12$

$\log_2 16\cdot 8 = 12$

$\log_{5(x_1)}(4x$

$2\log_{(5x-1)}(4x+1) - \log_{(\frac{x}{2}+4)}(5x-1) = 0$

$5x-1 = 4x+1 = x=2$

$4x+1 = \frac{x}{2}+2$

$8x+2 = x+4$

$2\log_a b = 2\log_b c$

$2\log_a b = \log_c a + 1$

$2\log_a b = \log_c a + \log_c c$

$2\log_a b = \log_c ac$

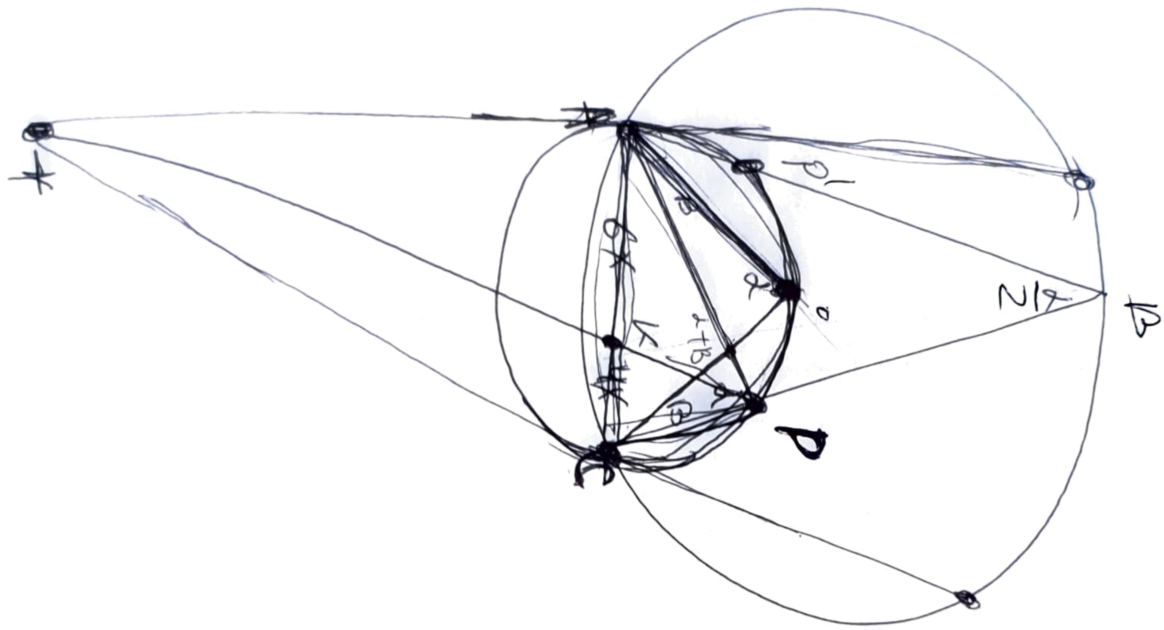
$2\log$

$2\log_a \frac{b}{a} = \log_c a$

$2\log_a \frac{b}{a} - \log_c a = 0$

$2\log_a \frac{b}{c} - \dfrac{\log_a a}{\log_a c} = 0$

Черновик



$$\frac{1}{2}(\alpha - \beta\varphi) = \frac{\alpha}{2}$$