Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100228**

ID профиля: **201333**

Вариант 17

Чистовик

Вариант 17. Часть 1.

№1

Пусть a – первый член арифметической прогрессии, d – разность арифметической прогрессии, тогда

$$S = a_1 + \ldots + a_{10} = 10a + d(1+\ldots+9) = 10a + \frac{9\cdot 10}{2}d = 10a + 45d$$

Тогда условия принимают вид:

$$\begin{cases} (a+5d)(a+11d) > 10a+45d+1 \\ (a+6d)(a+10d) < 10a+45d+17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+16ad+55d^2 > 10a+45d+1 \\ a^2+16ad+60d^2 < 10a+45d+17 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+16ad+55d^2 > 10a+45d+1 \\ a^2+16ad+55d^2 < 10a+45d+17-5d^2 \end{cases} \Rightarrow \cancel{10a}+\cancel{45d}+1 < \cancel{10a}+\cancel{45d}+17-5d^2$$

$$\Leftrightarrow 5d^2 < 16 \Leftrightarrow d^2 < \frac{16}{5} \Leftrightarrow -\frac{4}{\sqrt{5}} < d < \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$\frac{4}{\sqrt{5}} \vee 2$

$4 \vee 2\sqrt{5}$

$16 \vee 20$

$16 < 20 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{5}} < 2$, а значит $-2 < d < 2$

Поймем, что т.к прогрессия состоит из целых чисел, то $a \in \mathbb{Z}$, т.к $a = a_1$, а значит и $d \in \mathbb{Z}$, т.к $(a+d) \in \mathbb{Z}$, и $a \in \mathbb{Z}$.

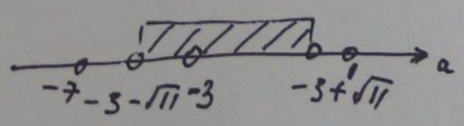
Т.к прогрессия возрастающая, то $d > 0$, а значит из ограничений $-2 < d < 2$, d определяется однозначно и $d = 1$.

Тогда запишем систему неравенств при $d = 1$:

$$\begin{cases} a^2+16a+55 > 10a+45+1 \\ a^2+16a+55 < 10a+45+17-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+6a+9 > 0 \\ a^2+6a-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+3)^2 > 0 \\ a^2+6a-2 < 0 \end{cases}$$

$D/4 = 3^2 + 2 = 11$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -3 \\ (a-(-3+\sqrt{11}))(a-(-3-\sqrt{11})) < 0 \end{cases}$$



$-3+\sqrt{11} \vee 0$

$\sqrt{11} \vee 3$

$11 \vee 9$

$11 > 9$

значит $-3+\sqrt{11} > 0$

$-3+\sqrt{11} \vee 1$

$\sqrt{11} \vee 4$

$11 \vee 16$

$11 < 16$

значит $-3+\sqrt{11} < 1$

$-3-\sqrt{11} \vee -6$

$3 \vee \sqrt{11}$

$9 < 11$

значит $-3-\sqrt{11} < -6$

$-3-\sqrt{11} \vee -7$

$4 \vee \sqrt{11}$

$16 > 11$

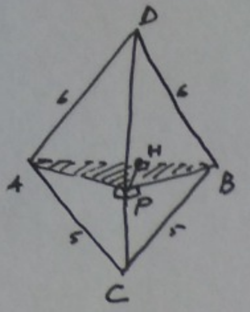
значит $-3-\sqrt{11} > -7$

Получается условию удовл. все целые числа подходящие промежутку кроме $a = -3$. Получается $a \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

Ответ: $a_1 \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$

Чистовик

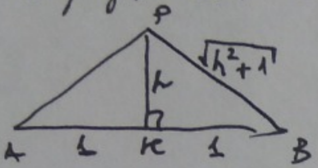
№2.



Заметим, что $\Delta CAD = \Delta CBD$ по трем сторонам, тогда если мы опустим в этих треугольниках высоты на CD, то они упадут в одну точку и будут равны, пусть это точка P.

Значит $\left.\begin{array}{l} CD \perp PB \\ CD \perp PA \end{array}\right| \Rightarrow CD \perp$ плоскости APB

Т.к $CD \parallel$ оси цилиндра, то и ось цилиндра $\perp$ плоскости APB, причем $A, P, B \in$ боковой поверхности цилиндра $\Rightarrow \Delta APB$ вписан в окружность равную окружности основания цилиндра.



Получается мы свели задачу к минимизации радиуса описанной окр. ΔAPB. Он равнобедренный, проведем его высоту и медиану PH. Пусть $PH = h$, тогда $PB = \sqrt{h^2+1}$

И $R = \frac{abc}{4S} = \frac{(\sqrt{h^2+1})^2 \cdot 2}{4 \cdot 2h \cdot \frac{1}{2}} = \frac{h^2+1}{2h}$

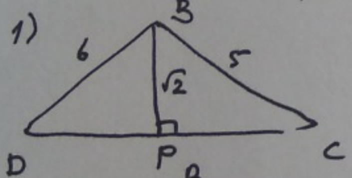
Найдем минимум $R(h) = \frac{h^2+1}{2h}$

$\cancel{R'(h) = \left(\frac{h^2+1}{2h}\right)' = \left(\frac{h}{2} + \frac{1}{2h}\right)' = \frac{1}{2}\left(h + \frac{1}{h}\right)}$

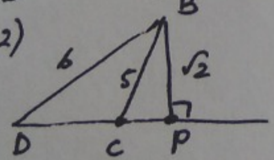
Поймем, что $\frac{h^2+1}{2h} = \frac{1}{2}\left(h + \frac{1}{h}\right)$ а по неравенству Коши для $h > 0$ (как высота Δ) $h + \frac{1}{h} \geq 2$, причем равенство достигается при $h = \frac{1}{h}$, т.е $h = 1$

Значит $h = 1$, $PB = \sqrt{2}$.

1)



2)



Тогда из ΔDBC найдем длину CD, учтем два возможных расположения точки P на CD. В первом случае высота ΔDBC падает внутрь, а во втором наружу.

1) $DP = \sqrt{DB^2 - BP^2} = \sqrt{36-2} = \sqrt{34}$

$PC = \sqrt{BC^2 - BP^2} = \sqrt{25-2} = \sqrt{23}$

$\Rightarrow DC = \cancel{\sqrt{34}+\sqrt{23}}\ DP + PC = \sqrt{34} + \sqrt{23}$

2) $DP = \sqrt{DB^2 - BP^2} = \sqrt{36-2} = \sqrt{34}$

$PC = \sqrt{BC^2 - BP^2} = \sqrt{25-2} = \sqrt{23}$

$\Rightarrow DC = DP - PC = \sqrt{34} - \sqrt{23}$

Ответ: $DC = \sqrt{34} - \sqrt{23}$

$DC = \sqrt{34} + \sqrt{23}$

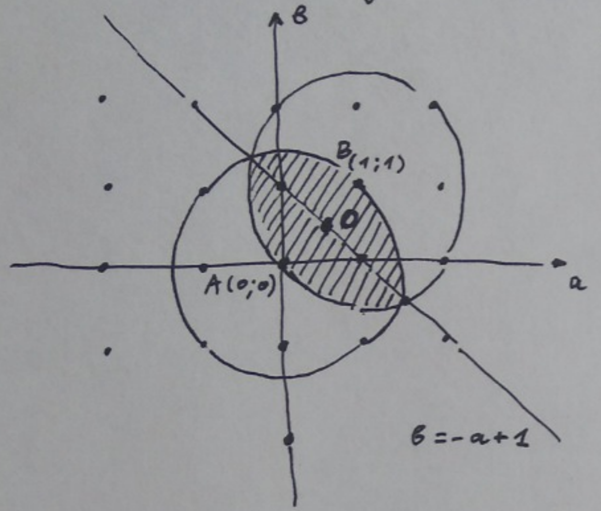
Чистовик

№3

Найдем все точки $(a;b)$ плоскости, удовлетворяющие второй строчке системы, т.е $a^2+b^2 \le \min(2a+2b;2)$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2a+2b<2\\a^2+b^2\le 2a+2b\end{cases}\\ \begin{cases}2a+2b\ge 2\\a^2+b^2\le 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b<-a+1\\(a-1)^2+(b-1)^2\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}b\ge -a+1\\a^2+b^2\le 2\end{cases}\end{array}\right.$$

Решим систему графически в пл. aOb.



Поймем, что второе нер-во каждой из систем это уравнение круга с центрами в т. $(1;1)$, $(0;0)$ соответственно, с радиусом $\sqrt{2}$.

В круге с центром $(1;1)$ нам подходит часть, находящаяся ниже прямой $b=-a+1$

А в круге с центром $(0;0)$ часть, находящаяся выше прямой $b=-a+1$.

Поймем, что окружности этих кругов пересекаются на прямой $b=-a+1$, т.к точки $(0;0)$ и $(1;1)$ симметричны относительно прямой $b=-a+1$.

Таким образом мы построили мн-во всех точек $(a;b)$ плоскости

Первая строка системы $(x-a)^2+(y-b)^2\le 2$ означает что для точки $(x;y)$ $\exists (a;b)$ такая точка, что $(x;y)$ лежит в круге радиуса $\sqrt{2}$ с центром $(a;b)$.

Получается, что мн-во M – мн-во точек, удаленных от $(a;b)$ на расстояние $\sqrt{2}$

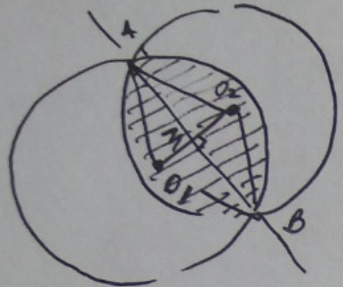
Отметим т. O – центр фигуры (пересечение отрезка AB и прямой $b=-a+1$) и на каждом луче, соединяющем O и точку границы фигуры отложим точку, удаленную от границы на $\sqrt{2}$. Получится мн-во точек M, являющееся гомотетией исходного мн-ва с центром в $O \Rightarrow$

M – пересечение кругов с центром в $(0;0)$, $(1;1)$ и радиусами $2\sqrt{2}$.

Чистовик

№3 (продолжение)

Найдем площадь фигуры М.



Площадь получившейся фигуры равна сумме площадей двух сегментов круга $R = 2\sqrt{2}$

Т.к O_1 и O_2 симметричны относительно хорды, по которой пересекаются окружности, то: $O_1O_2 \perp AB$, $O_1O_2 = \sqrt{2}$

Найдем AB по Th Пифагора:

$AB = 2\sqrt{(O_2B)^2 - O_2M^2} = 2\sqrt{8 - \frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{15}{2}}$

$R = 2\sqrt{2}$

$a = 2\sqrt{\frac{15}{2}}$

$h = O_2M = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Значит $S_{иск} = S_{сектора} - S_{\Delta}$

$S_{сектора} = \frac{2\alpha}{2\pi} S_{круга} = \frac{\alpha}{\pi} \pi R^2 = \alpha R^2 = 8\alpha$

$\alpha = \arcsin\left(\sqrt{\frac{15}{2}} \Big/ 2\sqrt{2}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$

Значит $S_{сектора} = 8\arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$

$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a h = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\sqrt{\frac{15}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{15} \cdot \cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}} \cdot 2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$

$S_{иск} = S_{сектора} - S_{\Delta} = 8\arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right) - \frac{\sqrt{15}}{2}$

Тогда $S_M = 2S_{иск} = 16\arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right) - \sqrt{15}$

Ответ: $S_M = 16\arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right) - \sqrt{15}$

Черновик

$S = a_1 + \dots + a_{10} = 10a + \frac{10\cdot 11}{2}d = 10a + 55d$

$a_6 a_{12} > S+1$

$a_7 a_{11} < S+17$

$10a + \frac{9\cdot10}{2}d = 10a + 45d$

$(a+5d)(a+11d) > 10a+45d+1$

$(a+7d)(a+10d) < 10a+45d+17$

$\frac{4}{\sqrt5} \vee 1$

$4 \vee \sqrt5$

$16 \vee 5$

$\frac{4}{\sqrt5} \vee 2$

$4 \vee 2\sqrt5$

$16 \vee 4\cdot 5$

10

15 10

−7 5 7

$D/4 = 3^2 + 2 = 11$

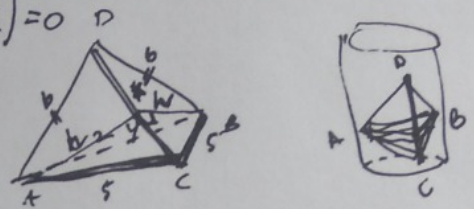
$-3+\sqrt{11} \vee 3$

$\sqrt{11} \vee 9$

$\frac12\left(h+\frac1h\right)' = \frac12\left(1-\frac{1}{h^2}\right) = 0$

$1 = \frac{1}{h^2}$

$h^2 = 1$



$-3+\sqrt{11} \vee 1$

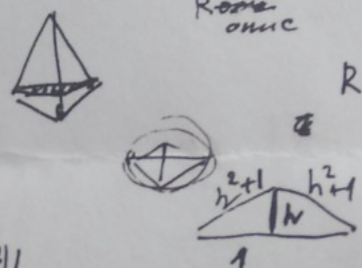
$\sqrt{11} \vee 4$

$\sqrt{11}\ 1$

$-3+\sqrt{11} \vee 0$

$\sqrt{11} \vee 3$

$11 \vee 9$



R опис

$R = \frac{h^2\cdot 2}{S}$

$R = \left(\frac{(h^2+1)^2\cdot 2}{h}\right)$

Min

$\left(\frac{2(h^2+1)^2}{h}\right)' =$

$= 2\left(\frac{h^4}{h} + \frac{2h^2}{h} + \frac{1}{h}\right) =$

$= 2\left(h^3 + 2h + \frac1h\right) = 2\left(3h^2 + 2 - \frac{1}{h^2}\right) = 0$

$3h^2 - \frac{1}{h^2} + 2 = 0$

$3h^4 - 1 + 2h^2 = 0$

$3h^4 + 2h^2 - 1 = 0$

$3h^4 + 3h^2 - h^2 - 1 = 0$

$(h^2+1)(3h^2-1) = 0$

$h^2 = \frac13$

$h = \sqrt{\frac13}$

$-3-\sqrt{11} \vee -5$

$4 \vee \sqrt{11}$

3 −7

$1 + \frac14$

21100228 (U201333 M1296703)

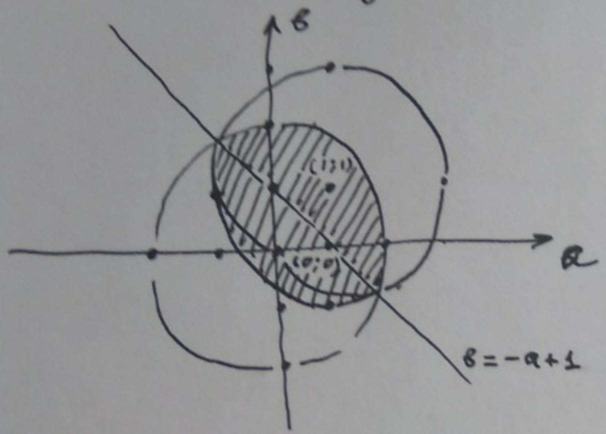
~~Чистовик~~ Черновик

№3

Найдем все точки $(a;b)$ плоскости, удовлетворяющие второй строчке системы, т.е $a^2+b^2 \le \min(2a+2b;2)$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2a+2b<2\\ a^2+b^2 \le 2a+2b\end{cases}\\ \begin{cases}2a+2b \geqslant 2\\ a^2+b^2 \le 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b<-a+1\\ (a-1)^2+(b-1)^2 \le 2\end{cases}\\ \begin{cases}b \geqslant -a+1\\ a^2+b^2 \le 2\end{cases}\end{array}\right.$$

Решим систему графически в пл. aOb.



Поймем, что второе нер-во каждой из систем это уравнение круга с центром в т. $(1;1)$, $(0;0)$ соответственно и радиусом 2

В круге с центром в $(1;1)$ нам подходит часть находящаяся ниже прямой $b=-a+1$

А в круге с центром $(0;0)$ часть, находящаяся выше прямой $b=-a+1$.

Поймем, что ~~[illegible]~~ окружности этих кругов пересекаются на прямой $b=-a+1$, т.к точки $(0;0)$ и $(1;1)$ симметричны относительно указанной прямой.

Таким образом мы построили мн-во всех точек $(a;b)$ плоскости.

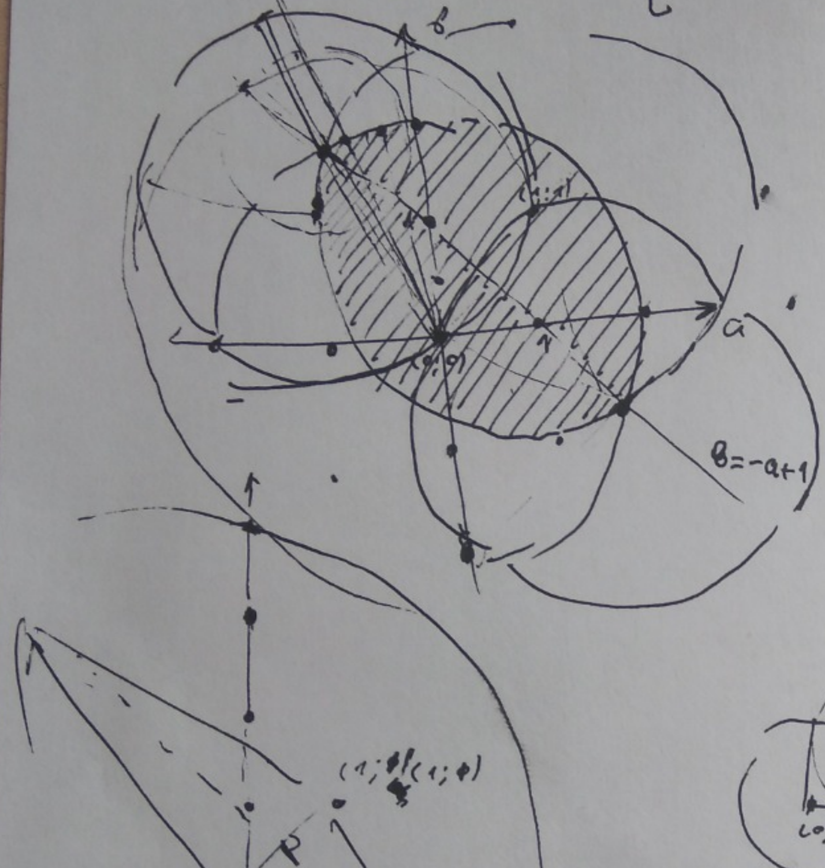
Первая строчка системы $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2$

21100228 (U201333 M1296703)

Черновик

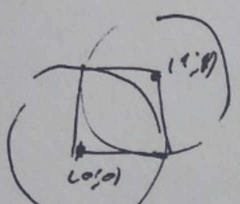
$$a^2+b^2 \le \min(2a+2b;2)$$

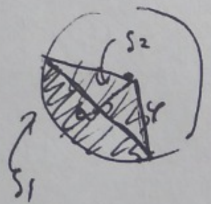
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2a+2b<2\\ a^2+b^2\le 2a+2b\end{cases}\\ \begin{cases}2a+2b\ge 2\\ a^2+b^2\le 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+b<1\\ (a-1)^2+(b-1)^2\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}a+b\ge 1\\ a^2+b^2\le 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b<-a+1\\ (a-1)^2+(b-1)^2\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}b\ge -a+1\\ a^2+b^2\le 2\end{cases}\end{array}\right.$$

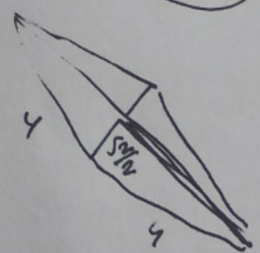


$$(x-a)^2+(y-b)^2\le 2$$

(0;0)







$$4^2=\frac{1}{2}+x^2 \Rightarrow x^2=15\frac{1}{2}=\frac{51}{2}$$

$$x=\sqrt{\frac{51}{2}}$$

$$a=2\sqrt{\frac{51}{2}}$$

$$\alpha=2\arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{51}{2}}$$

$$\frac{2\arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{51}{2}}}{2\pi}\cdot\pi 4^2=$$

$$=16\arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{51}{2}}.$$

$$32\arcsin\sqrt{\frac{51}{8}}-\sqrt{51}$$

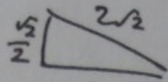
$$S=S_1-S_2$$

$$S_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\frac{51}{2}}=\frac{\sqrt{51}}{2}$$

$$S_1=16\arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{51}{2}}$$

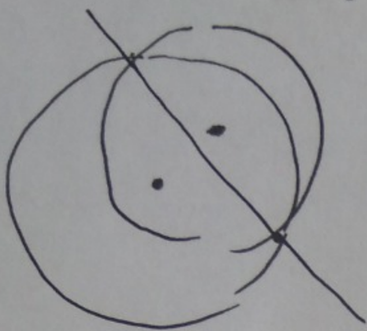
$$S=\left(16\arcsin\sqrt{\frac{51}{8}}-\frac{\sqrt{51}}{2}\right)\cdot 2$$

~~Чистовик~~ Черновик



№3 (продолжение)

Найдем площадь фигуры М.



21100228 (U201333 M1296703)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100228**

ID профиля: **201333**

Вариант 17

Чистовик

Вариант 17. Часть 2.

№4.

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=6 \\ \text{НОК}(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

Поймем, что каждое из чисел a, b, c имеет вид $2^x 3^y$, т.к если бы у этого числа были простые делители помимо 2 и 3, то НОК был бы кратен этому простому делителю

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2^{\alpha_1} 3^{\beta_1} \\ b = 2^{\alpha_2} 3^{\beta_2} \\ c = 2^{\alpha_3} 3^{\beta_3} \end{cases}$$

Поймем, что $\text{НОД}(a;b;c) = \text{НОД}(2^{\alpha_1}3^{\beta_1}; 2^{\alpha_2}3^{\beta_2}; 2^{\alpha_3}3^{\beta_3}) = 2^{\min(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}\cdot 3^{\min(\beta_i)}$

$\text{НОК} = (2^{\alpha_1}3^{\beta_1}; 2^{\alpha_2}3^{\beta_2}; 2^{\alpha_3}3^{\beta_3}) = 2^{\max(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}\, 3^{\max(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}$

Значит $\min(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=1$ $\quad \min(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=1$

$\max(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=15$ $\quad \max(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=16$

Получается из набора α_i одно из чисел равно 1, еще одно равно 15, а оставшееся $\in [1;15]$

~~Посчитаем к-во таких набо~~

А из набора β_i одно из чисел равно 1, еще одно 16, а оставшееся $\in [1;16]$

~~Посчитаем количество наборов если числа в них не повторяются:~~

~~Итк~~ Поймем, что количество троек $(a;b;c)$ равно количеству занумерованных наборов α_i умноженному на количество занумерованных наборов β_i (α_i и β_i которые попали на i место будут степенями двойки и тройки в i-ом числе):

α_i : $\underbrace{\overset{\text{выбрать третье число}}{14}\cdot \overset{\text{занумеровать числа}}{3\cdot 2}}_{\text{количество наборов с различными } \alpha_i} + \underbrace{3 + 3}_{} = 84+6=90$

Если третье число совпало с min и если с max

β_i : $15\cdot 3\cdot 2 + 3 + 3 = 90 + 6 = 96$

Значит всего троек $90\cdot 96 = 8640$

Ответ: 8640 троек чисел.

Чистовик

№5

Даны числа $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$; $\log_{4x+1}(\frac{x}{2}+2)^2$; $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

Пусть $a=\sqrt{5x-1}$
$b=4x+1$
$c=\frac{x}{2}+2$

Тогда данные числа имеют вид
$\log_a b$; $\log_b c^2$; $\log_c a^2$

$\log_b c^2 = 2\log_b c = 2\frac{\ln c}{\ln b}$
(т.к $c>0$ из $\log_c a^2$)

$\log_c a^2 = 2\log_c a = 2\frac{\ln a}{\ln c}$
(т.к $a>0$ из $\log_a b$)

$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$

Т.к два из этих чисел равны (пусть они равны y), а третье меньше их на 1, то произведение этих чисел имеет вид $y^2(y-1)$, т.е

$y^2(y-1) = 2\frac{\cancel{\ln c}}{\cancel{\ln b}}\cdot 2\frac{\cancel{\ln a}}{\cancel{\ln c}}\cdot\frac{\cancel{\ln b}}{\cancel{\ln a}} \Leftrightarrow y^2(y-1)=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^3-y^2-4=0 \Leftrightarrow y^3-2y^2+y^2-2y+2y-4=0 \Leftrightarrow (y-2)(y^2+2y+2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ (y+1)^2=-1 \text{ нет корней} \end{array}\right. \Leftrightarrow y=2$

Значит эти числа равны 2, 2 и 1.

1) Если $\begin{cases} 2\frac{\ln c}{\ln b}=2 \\ 2\frac{\ln a}{\ln c}=2 \\ \frac{\ln b}{\ln a}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln c=\ln b \\ \ln a=\ln c \\ \ln b=\ln a \end{cases} \overset{\text{т.к } \ln t\uparrow}{\Leftrightarrow} \begin{cases} b=c \\ a=c \\ b=a \end{cases}$

т.е $\begin{cases} \sqrt{5x-1}=4x+1 \\ 4x+1=\frac{x}{2}+2 \\ \frac{x}{2}+2=\sqrt{5x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{10}{7}-1}\neq\frac{8}{7}+1 \\ x=\frac{2}{7} \\ \frac{1}{7}+2\neq\sqrt{\frac{10}{7}-1} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$

2) Если $\begin{cases} 2\frac{\ln c}{\ln b}=1 \\ 2\frac{\ln a}{\ln c}=2 \\ \frac{\ln b}{\ln a}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln c^2=\ln b \\ \ln a=\ln c \\ \ln b=\ln a^2 \end{cases} \overset{\text{т.к } \ln t\uparrow}{\Leftrightarrow} \begin{cases} c^2=b \\ a=c \\ b=a^2 \end{cases}$

т.е $\begin{cases} (\frac{x}{2}+2)^2=4x+1 \\ \sqrt{5x-1}=\frac{x}{2}+2 \\ 4x+1=5x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+2)^2=2\cdot4+1 \\ \sqrt{9}=1+2 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

Значит $x=2$ удовлетворяет условию.

Чистовик

№5 (продолжение)

3) Если $\begin{cases} 2\frac{\ln c}{\ln b}=2 \\ 2\frac{\ln a}{\ln c}=1 \\ \frac{\ln b}{\ln a}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln c=\ln b \\ \ln a^2=\ln c \\ \ln b=\ln a^2 \end{cases} \overset{\text{т.к. } \ln t \nearrow}{\Leftrightarrow} \begin{cases} c=b \\ a^2=c \\ b=a^2 \end{cases}$

Т.е $\begin{cases} \frac{x}{2}+2=4x+1 \\ 5x-1=\frac{x}{2}+2 \\ 4x+1=5x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{7} \\ x=\frac{6}{9} \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$

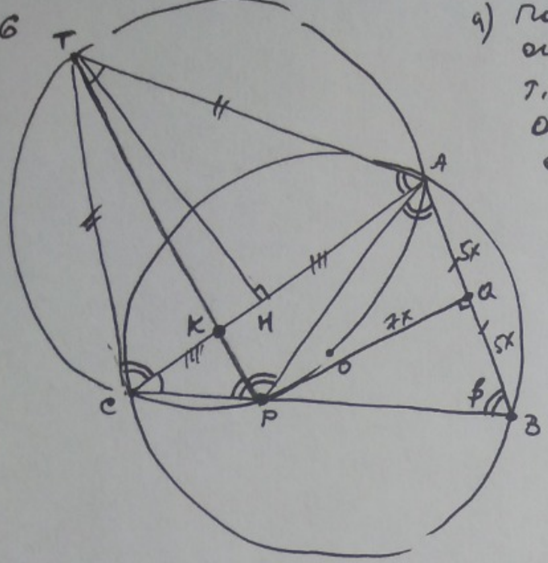
Значит два из этих чисел могут быть равны, а третье на 1 меньше только при $x=2$.

Проверим, что ~~все~~ $x=2$ удовлетворяет ОДЗ логарифмов $\log_3 9$; $\log_9 (3)^2$; $\log_3 (9)$.

Ответ: при $x=2$.

Чистовик

№6



а) Поймем, что T лежит на окружности, описанной около $\triangle APC$

Т.к CT, AT — касательные к ω, то $OC \perp CT$, $OA \perp AT \Rightarrow \angle OCT = \angle OAT = 90^\circ$ опираются на отрезок $OT \Rightarrow$ $OATC$ — вписанный, значит T лежит на этой окружности.

$$\frac{S_{CKP}}{S_{APK}} = \frac{CK \cdot h \cdot \frac{1}{2}}{KA \cdot h \cdot \frac{1}{2}} = \frac{CK}{KA} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

~~$\triangle CKP \sim \triangle TKA$ ($\angle ACP = \angle PTA$, $\angle TAC = \angle TPC$ из 3 вписанных) $\Rightarrow \frac{CK}{KA} = KP$~~

~~Доска~~

$\angle CBA = \angle TAC = \angle TCA = \beta$
(как углы м-ду касательной и хордой)

$\angle PAB = \beta$, т.к $\angle CPA = 2\beta$ по Th о внешнем $\angle$ $\triangle$.

$\angle TPA = \angle TCA = \beta$
$\angle TPC = \angle TAC = \beta$ (как опирающиеся на одну дугу)

$\triangle CKT \sim \triangle PKA$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{S_{CKT}}{S_{PKA}} = \frac{CT^2}{PA^2} \Rightarrow S_{CKT} = \frac{CT^2}{PA^2} S_{APK} = 6\frac{CT^2}{PA^2}$

$\triangle CKP \sim \triangle TKA$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{S_{CKP}}{S_{TKA}} = \frac{CP^2}{TA^2} \Rightarrow S_{TKA} = \frac{TA^2}{CP^2} S_{CKP} = 4\frac{TA^2}{CP^2}$

По Th об отношении S $\triangle$ с равным углом:

$$\frac{S_{CKP}}{S_{APK}} = \frac{CP \cdot KP}{KP \cdot PA} = \frac{CP}{PA} \Rightarrow PA^2 = \frac{9}{4}CP^2 \Rightarrow CP^2 = \frac{4}{9}PA^2$$

$TC = TA \Rightarrow$ как касательные к ω, тогда

$$S_{CKT} = 6\frac{x^2}{PA^2}$$
$$S_{TKA} = 4\frac{x^2}{\frac{4}{9}PA^2} = 9\frac{x^2}{PA^2} \Rightarrow S_{CTA} = 15\frac{x^2}{PA^2}$$

$$\triangle CTA \sim \triangle BPA \Rightarrow \frac{S_{CTA}}{S_{BPA}} = \frac{TA^2}{PA^2} = \frac{x^2}{PA^2}$$

значит $S_{BPA} = S_{CTA} \cdot \frac{PA^2}{x^2} = 15 \cdot \frac{x^2}{PA^2} \cdot \frac{PA^2}{x^2} = 15$

значит $S_{ABC} = S_{CKP} + S_{APK} + S_{BPA} = 6 + 4 + 15 = 25$

Ответ: $S_{ABC} = 25$

Чистовик

№6 (продолжение)

б) Проведем высоты в $\triangle CTA$ и $\triangle PAB$, TK и PQ соотв.

т.к $\beta = arctg\frac{7}{5}$, то $tg\angle TAK = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{TK}{KA} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{TK}{\frac{1}{2}AC} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{TK}{AC} = \frac{7}{10}$ (т.к высота в р/б)

$tg\angle PBQ = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{PQ}{QB} = \frac{7}{5} \Rightarrow \begin{matrix} PQ = 7x \\ QB = 5x \end{matrix}$, $QB = AQ$ т.к PQ – высота в р/б $\triangle PAB$

$\Rightarrow S_{PAB} = PQ \cdot AB \cdot \frac{1}{2} = 7x \cdot 10x \cdot \frac{1}{2} = 35x^2 = 15$

$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{7}}$

$TA = \sqrt{TK^2 + KA^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{10}AC\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AC\right)^2}$

$\frac{TA}{PA} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{\left(\frac{7}{10}AC\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AC\right)^2}}{\sqrt{(7x)^2 + (5x)^2}} = \frac{AC}{10x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{\frac{49}{100}AC^2 + \frac{25}{100}AC^2}}{\sqrt{74x^2}} = \frac{AC}{10x} \Rightarrow \frac{\sqrt{\frac{74}{100}}AC}{\sqrt{74}\,x} = \frac{AC}{10x} \Rightarrow$

$\Rightarrow$

5

Черновик

$10x-2=x+4$

$9x=6$

$x+4=8x+2$

$7x=2$

$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$

$a=6\cdot a_1$

$b=6\cdot b_1$

$c=6c_1$

$(a_1;b_1;c_1)=1$

$6\cdot\ldots$

$2^{14}\cdot 3^{15}$

$a=2^{\alpha_1}3^{\beta_1}$

$b=2^{\alpha_2}3^{\beta_2}$

$c=2^{\alpha_3}3^{\beta_3}$

НОД = 6

хотя бы одно из $\beta_i=1$

$\alpha_i=1$

хотя бы одно $\alpha_i=15$

$\beta_i=16$

α_i

$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$

$1\leq^{15}\leq 15$

$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$

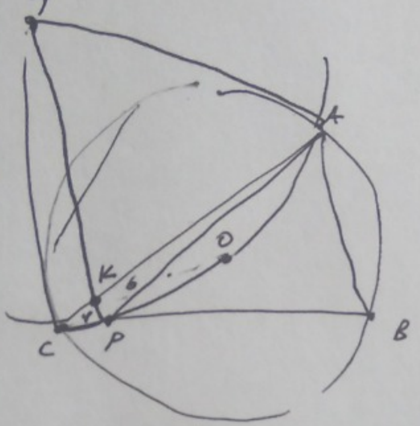
$1\leq\ \leq 16$

16

$1,$ ~~2, 2, 15~~

14 $3\cdot 2+3+3$

15 $3\cdot 2+3\cdot 3.$



$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$\sqrt{5x-1}=a$

$4x+1=b$

$\frac{x}{2}+2=c$

$\log_a b \quad \log_b c^2 \quad \log_c a^2$

$\log_a b \quad 2\log_b c \quad 2\log_c a$

Если $2\log_b c=2\log_c a$

$\log_b c=\log_c a$

$8x+2=x+4$

$x=\frac{2}{7}$

$y=2$

$\frac{\ln b}{\ln a} \quad 2\frac{\ln c}{\ln b} \quad 2\frac{\ln a}{\ln c}$

Три корня

$\frac{\ln b}{\ln a}\cdot 2\frac{\ln c}{\ln b}\cdot 2\frac{\ln a}{\ln c}=4=y^2(y-1)$

$2\frac{\ln c}{\ln b}=2\frac{\ln a}{\ln c}$

$\ln^2 c=\ln a\cdot\ln b$

$y^3-y^2=4$

$y^3-y^2-4=0$

$y^3-2y^2+y^2+2y$

$+2y-4=0$

$(y-2)(y^2+y+2)=0$

$\frac{\ln b}{\ln a}=$

$\frac{\ln b}{\ln a}+1=2\frac{\ln a}{\ln c}\ \Big|\cdot\ln a\ln c$

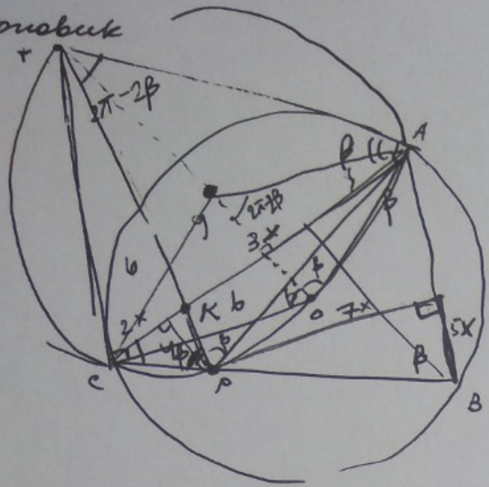
$\ln b\ln c+\ln a\ln c=2\ln^2 a$

$y=2$

$\ln c(\ln a+\ln b)=2\ln^2 a$

21100228 (U201333 M1296704)

Черновик



$S_{APK} = 6 \quad S_{CPK} = 4$

1) $\frac{S_{CKP}}{S_{APK}} = \frac{CK \cdot h \cdot \frac{1}{2}}{KA \cdot h \cdot \frac{1}{2}} = \frac{CK}{KA} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$2\pi - 2\pi + 2\beta - \pi$
$2\beta - \pi$

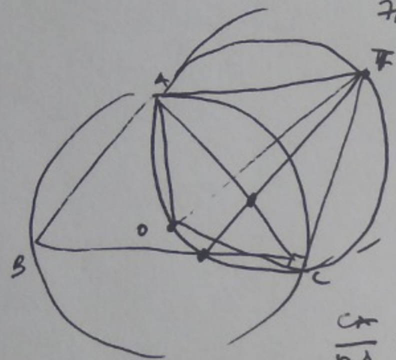
2) $\frac{CK}{KA} = \frac{KP}{KT} = \frac{2}{3}$

3) $\frac{S_{KTA}}{S_{KPA}} = \frac{TK}{KP} = \frac{3}{2}$

$7x \cdot 10x \cdot \frac{1}{2} = 15$

$x^2 = \frac{15}{(5 \cdot 7)} = \frac{3}{7}$

$S_{KTA} = \frac{3}{2} S_{APK} = 9$



$\frac{S_{CKT}}{S_{CPK}} = \frac{KT}{KP} = \frac{3}{2}$

$S_{CKT} = \frac{3}{2} S_{CPK} = 6$

$\frac{CA}{BA} = \frac{x}{PA}$

~~$\frac{TK}{4} = \frac{KP}{} = CK \cdot KA$~~

~~$\frac{TK}{KK} = \frac{CK}{KP}$~~

$S_{CTA} = S_{CKT} + S_{KTA} = 15$

5) $\Delta CTA \sim \Delta APB$ по двум углам $\Rightarrow \frac{S_{CTA}}{S_{BPA}} = \frac{15}{x} = \left(\frac{CT}{AP}\right)^2 = \frac{CT^2}{AP^2} = 1$

$x = 15$

$\Delta CTK \sim \Delta PAK$ по двум $\angle$ $\Rightarrow \frac{CT}{PA} = \frac{S_{CTK}^2}{S_{PKA}^2} = 1$

$\Delta CKT \sim \Delta PCT \Rightarrow \frac{CT}{PT} =$

45
25

$6x^2$

$\frac{S_{PAB}}{S_{CTA}} = \frac{PA^2}{x^2}$

$\Delta CKT \sim \Delta PKA \Rightarrow \frac{S_{CKT}}{S_{PKA}} = \frac{CT^2}{PA^2}$

$\Delta CKP \sim \Delta TKA \Rightarrow \frac{S_{CKP}}{S_{TKA}} = \frac{CP^2}{TA^2}$

$S_{CKT} = \frac{CT^2}{PA^2} S_{PKA} = \frac{CT^2}{PA^2} \cdot 6 \quad \frac{x^2}{PA^2} \cdot 6$

$S_{TKA} = \frac{TA^2}{CP^2} S_{CKP} = \frac{TA^2}{CP^2} \cdot 4 \quad \frac{x^2}{CP^2} \cdot 6$

$\frac{x^2}{\frac{9}{4} CP^2} \cdot 6 = \frac{4x^2}{9CP^2} \cdot 6 = \frac{x^2}{CP^2} \cdot \frac{8}{3}$

$\frac{x^2}{CP^2}\left(6 + \frac{8}{3}\right) = \frac{x^2}{CP^2} \cdot \frac{26}{3}$

$\frac{4}{6} \quad \left|\frac{2}{3}\right|^2 \quad \frac{4}{9}$

$\frac{PA}{} = \frac{PA \cdot TP}{} \quad \frac{PK \cdot PA}{PK \cdot CP} = \frac{6}{4} \Rightarrow \frac{PA^2}{CP^2} = \frac{9}{4}$