Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100225**

ID профиля: **800649**

Вариант 17

№1. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Черновик 1

$a_6 a_{12} > S+1$

$a_7 a_{11} < S+17$

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$\begin{cases}(a_1+5d)(a_1+11d) > S+1\\(a_1+6d)(a_1+10d) < S+17\end{cases}$

$S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 5(a_1 + a_1 + 9d) = 10a_1 + 45d$

$\begin{cases}a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1\\a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17\end{cases}$

$d \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases}a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1\\10a_1 + 45d + 17 > a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2\end{cases}$

$105 - 17 = 88$

$16 > 5d^2$

$d^2 < \frac{16}{5}$

$d^2 < 3, \ldots$

$d = 1$

$d = -1$

1) $d = 1$

$\begin{cases}a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 46\\a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 62\end{cases}$

$\begin{cases}a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0\\a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0\end{cases}$ $(a_1+3)^2 > 0$

$a_1 = -3 \pm \sqrt{11}$

2) $\begin{cases}a_1^2 - 16a_1 + 55 > 10a_1 - 45 + 1\\a_1^2 - 16a_1 + 60 < 10a_1 - 45 + 17\end{cases}$

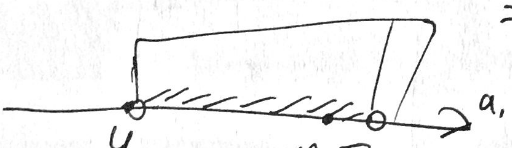
$12 + 69 = 81$

$\begin{cases}a_1^2 - 26a_1 + 99 > 0\\a_1^2 - 26a_1 + 88 < 0\end{cases}$

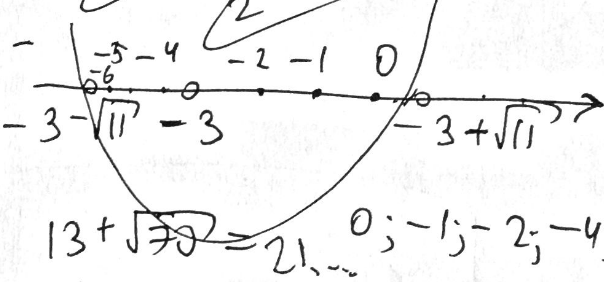
≈ 8

1) $a_1 = 13 \pm \sqrt{169 - 99} = 13 \pm \sqrt{70} =$

2) $a_1 = 13 \pm \sqrt{169 - 88} = 13 \pm 9 = \left[\begin{matrix}4\\22\end{matrix}\right.$



$\varnothing$



$13 + \sqrt{70} = 21, \ldots$ 0; −1; −2; −4; −5; −6.

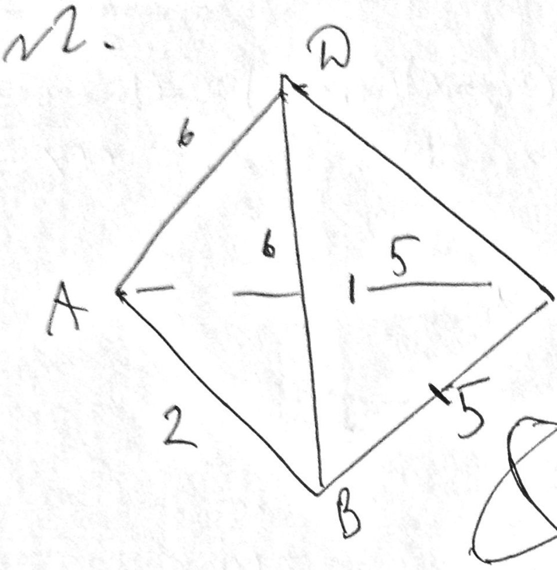
$= \ldots =$

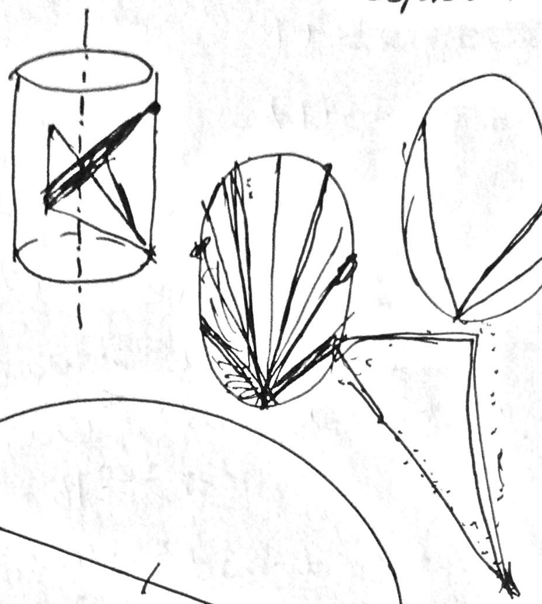
$13 - \sqrt{70} = 4, \ldots$

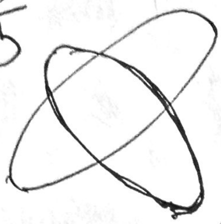
Вариант 17

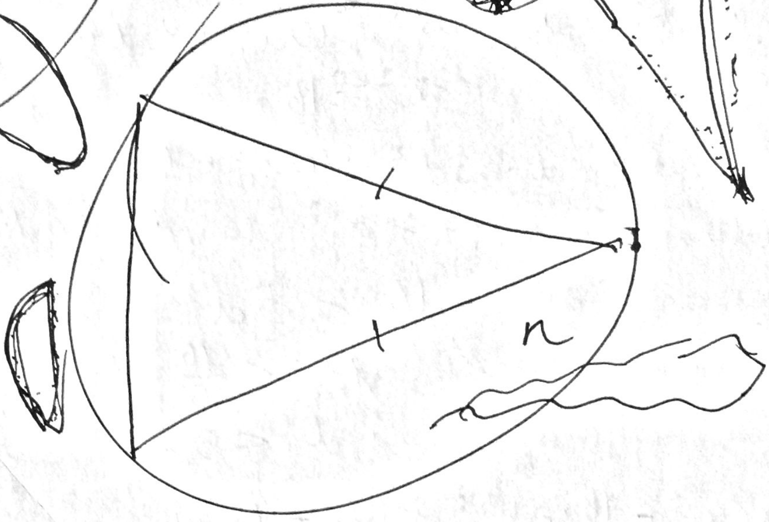
~~Черновик 1~~
Черновик 2

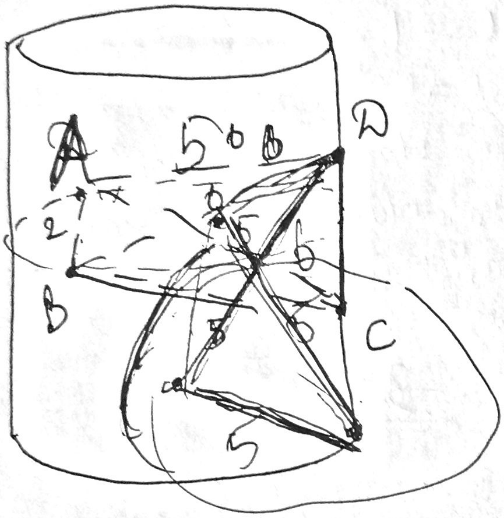
№2.

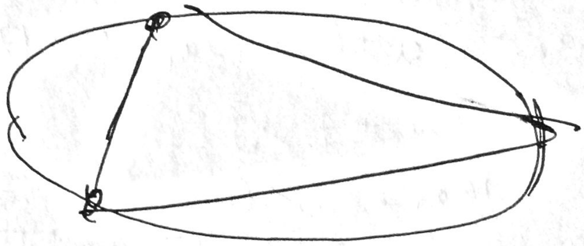


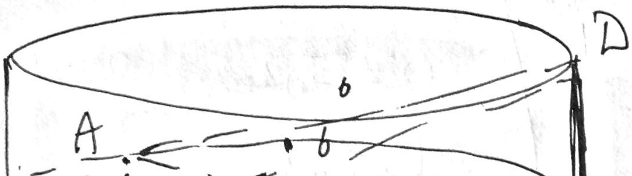












$\sqrt{36-4}=\sqrt{32}=\sqrt{8\cdot 4}=2\sqrt{2}+\sqrt{21}$

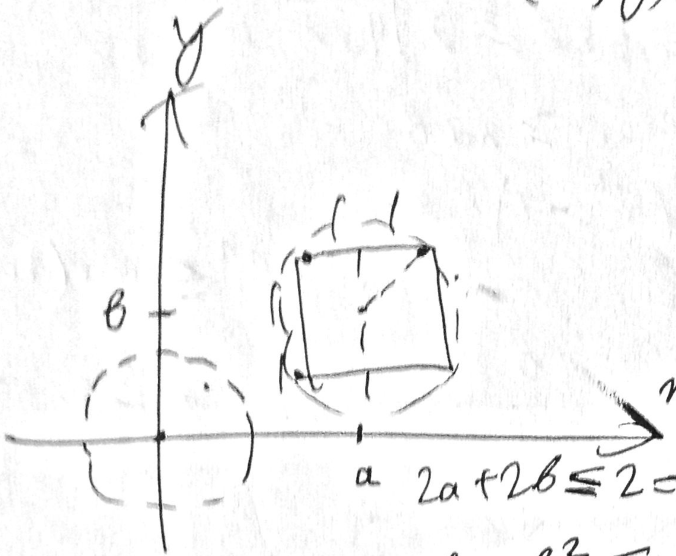
$\sqrt{25-4}=\sqrt{21}=\sqrt{7\cdot 3}$

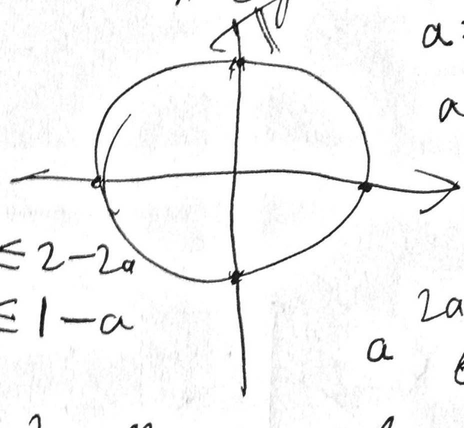
№3. Черновик 3

$(x;y)$

$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b;2)\end{cases}$

$x^2+y^2 \ge 2$





$a=2$

$a \le \sqrt{2}$

$b \le \sqrt{2}$

$2a+2b \le 2 \Rightarrow 2b \le 2-2a$

$b \le 1-a$

$a^2+b^2 \le 2.$

$2a+2b$

$b=-a$

$2a+2b \ge 0$

$2a \ge -2b$

$-2-2$

$\begin{cases}a^2+b^2 \le 2a+2b \\ a^2+b^2 \le 2\end{cases}$

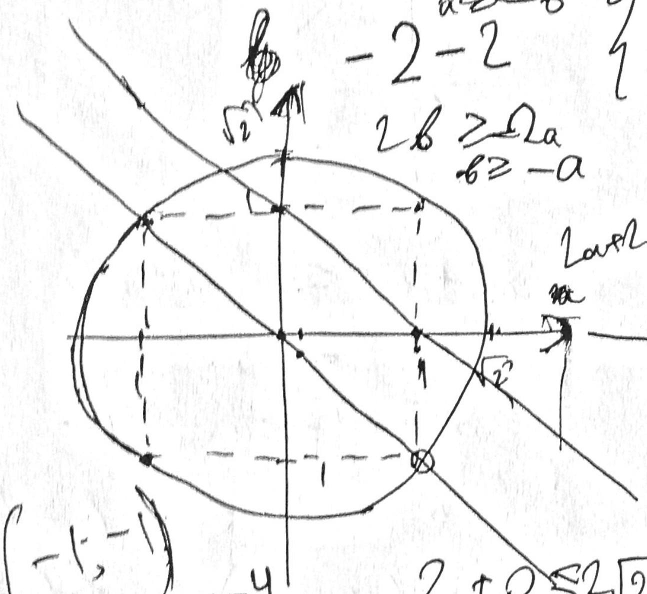
$2b \ge -2a$

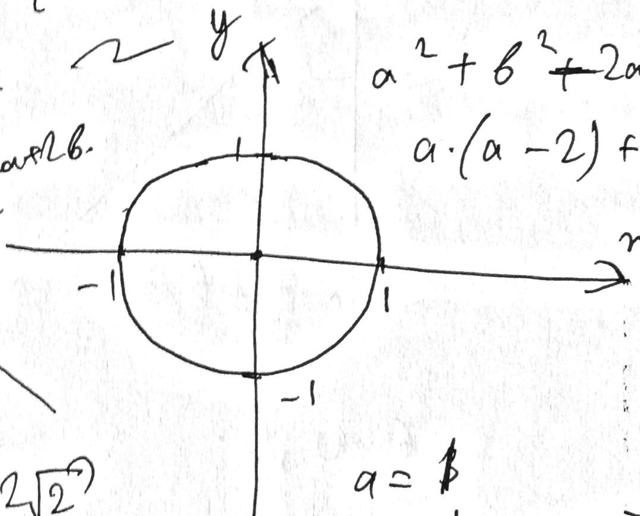
$b \ge -a$

$a^2+b^2-2a-2b \le 0$

$a\cdot(a-2)+b(b-2)$

$b=-1$





$(-1;-1)$

-4

$2+0 \le 2\sqrt{2}$

$a=1$

$b=1$ $2a+2b \ge 2\sqrt{4ab}$

$=4ab$

$a=1;$

$b=0$

$2 \le 0$

$1+1 \le 4$

$1;0,1$

$0,1$ $1,02$ 1 $1;-0,1$

$1+0,01 \le 2-0,02$

$a=$

$a^2+b^2 \le 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$

$2-0,2$

$0,01 \le 0,2.$

$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$

$1+0,01$

$1,04+0,98 \le$

$0,1;-0,1$

$2ab < 2a+2b.$

$0,1$

$2a(b-1) < 2b$

$2,02.$

$0,1$ 1 $1,01$ $1,01$

$1+0,25=1,25.$

$0,1^2+0,1^2 \le 0$ $1,0001$ $1,0001$

$2-1=1.$

$-1;1$

$1;-0,5.$

черновик

$a^2+b^2 \le \min(2a+2b;2) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a^2+b^2 \le 2 \\ a^2+b^2 \le 2a+2b \end{cases}$

$a^2+b^2 \le$

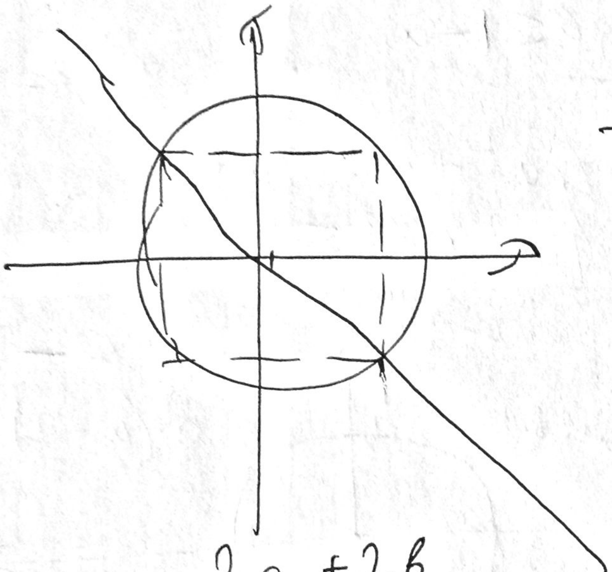
$2a+2b \ge 2\sqrt{4ab} = 4\sqrt{ab}$

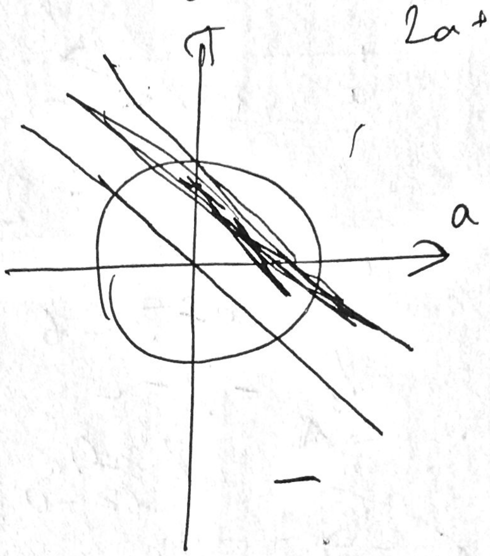
$a^2+b^2 \ge 2ab$

$(a-b)^2 \ge 0$

$a^2+b^2 \le \min(2a+2b;2)$

$2a+2b \le$





$2a+2b$

$a^2+b^2 \le 2a+2b.$

~~$a^2 + 2a$~~

~~$y \ge a^2+b^2-2a-2b$~~

$a^2-2a \le 2b-b^2$

$a(a-2) \le b(2-b)$

$0;0,5.$

$0,25;1$

$0,1+$

$0,01+0,01 \le 0,4.$

$-1;1$

$1;0,5$

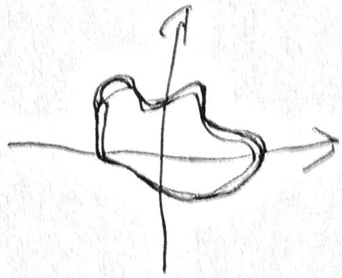
~~0~~ $2 \le 0$ ~~0~~

$1+0,25 \le 1$

$+0,01;-0,0001$

$10^{-8}+10^{-4} \le 0,02-$

Черновик 5.



~~$1-0,5$~~

$1+0,025 \leq$

$a^2+b^2 \leq 2a+2b$

$a^2-2a \leq 2b-b^2$

$a(a-2) \leq b\cdot(2-b)$

$a^2-2a-2b+b^2 \leq 0$

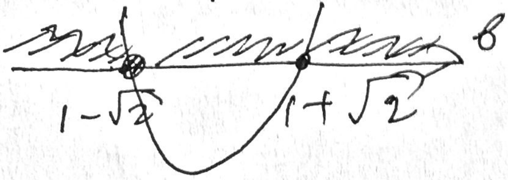
~~$a=1\pm\sqrt{1-b^2+2b}$~~ $=1\pm\sqrt{1+2b-b^2}$

$D=1+2b-b^2$

$1+2b-b^2 \geq 0$

$b^2-2b-1 \leq 0$

$b=1\pm\sqrt{2}$



Вариант 17 Чистовик 1

№1.

Дано: $d > 0; a_i \in \mathbb{Z}$

a_n – арифм. прогр.

$S = \sum_{i=1}^{10} a_i$

$a_6 \cdot a_{12} > S + 1$

$a_7 \cdot a_{11} < S + 17$

a_1 – ?

$S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 5(2a_1 + 9d) = 10a_1 + 45d$

$a_6 \cdot a_{12} = (a_1 + 5d)(a_1 + 11d) = a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2$

$a_7 \cdot a_{11} = (a_1 + 6d)(a_1 + 10d) = a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2$

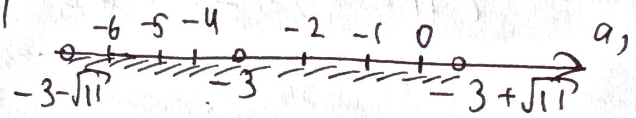
$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 d + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 \\ a_1^2 + 16a_1 d + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5d^2 < 16 \Rightarrow d^2 < \frac{16}{5}$, по усл. $a_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d = 1$

$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 45 + 1 \\ a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 45 + 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1 + 3)^2 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases}$

$a_1 = -3 \pm \sqrt{11}$



$a_1 \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$.

Ответ: $a_1 \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$.

Вариант 17. чистовик 2

№2.

ABCD - тетраэдр

AB = 2

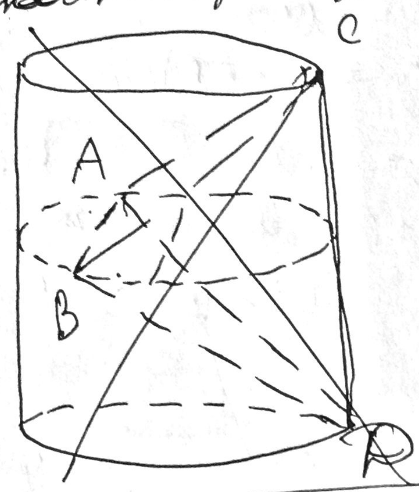
AC = CB = 5

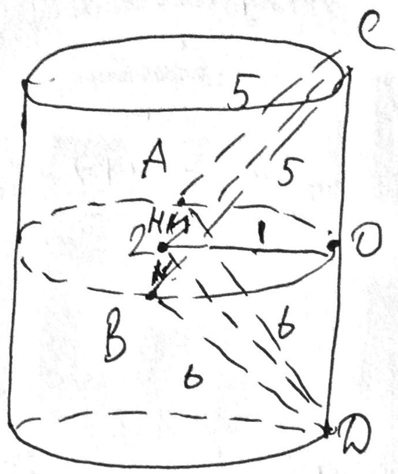
AD = DB = 6

ABCD вписан в цилиндр

CD - ?

т.к. радиус цилиндра наименьший, то AB - диаметр сечения, параллельного основанию цилиндра.





сечения цилиндра ACB и DAD - эллипсы при этом DB = AD и AC = BC и.

$CH = \sqrt{25-1} = \sqrt{24}$

$DH = \sqrt{36-1} = \sqrt{35}$

$CO = \sqrt{24-1} = ~~\sqrt{20}~~ \sqrt{23}$

$OD = \sqrt{35-1} = ~~\sqrt{31}~~ \sqrt{34}$

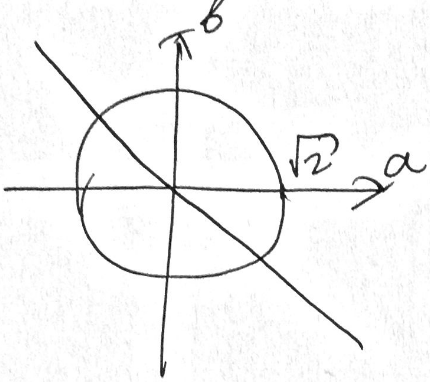
$CD = CO + OD = ~~2\sqrt{5} + \sqrt{31}~~ \sqrt{23} + \sqrt{34}$

Ответ: ~~$2\sqrt{5} + \sqrt{31}$~~ $\sqrt{23} + \sqrt{34}$.

Вариант 17. Чистовик 3.

№3. $a^2+b^2 \le \min(2a+2b; 2) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a^2+b \le 2 \\ a^2+b^2 \le 2a+2b \end{cases}$ $2a+2b>0 \Rightarrow b>-a$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100225**

ID профиля: **800649**

Вариант 17

Вариант 17. Чистовик 1. часть 2

№4. $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 6 \\ НОК(a;b;c) = 2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2} \\ b = 2^{\beta_1}\cdot 3^{\beta_2} \\ c = 2^{\gamma_1}\cdot 3^{\gamma_2} \end{matrix}$

Заметим, что среди α_1, β_1 и γ_1 обязательно есть хотя бы одна 1 и хотя бы одна 15, а среди α_2; β_2 и γ_2 обязательно есть хотя бы одна 1 и хотя бы одна 16.

При этом $\begin{cases} \min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 1 \\ \max(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 15 \\ \min(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2) = 1 \\ \max(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2) = 16 \end{cases}$

1) Посчитаем число троек $(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$:

общ. вид	число	крайние случаи
$(15; 1; \gamma_1)$	15	(15; 1; 15); (15; 1; 1)
$(15; \beta_1; 1)$	+ 15 − 1	(15; 1; 1); (15; 15; 1)
$(1; 15; \gamma_1)$	+ 15	(1; 15; 1); (1; 15; 15)
$(\alpha_1; 15; 1)$	+ 15 − 2	(1; 15; 1); (15; 15; 1)
$(1; \beta_1; 15)$	+ 15 − 1	(1; 1; 15); (1; 15; 15)
$(\alpha_1; 1; 15)$	+ 15 − 2	(1; 1; 15); (15; 1; 15)
	84	

2) Аналогично, число троек $(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$ равно $16\cdot 6 - 6 = 90$

Тогда ~~всего~~ чисел $(a; b; c)$ всего 7560

$84 \cdot 90 = 7560$ ~~7728~~

Ответ: ~~7728~~ 7560

$\begin{array}{r} 92 \\ \times\ 84 \\ \hline 368 \\ 736 \\ \hline 7728 \end{array}$

$\begin{array}{r} 84 \\ \times\ 90 \\ \hline 7560 \end{array}$

Вариант 17.

Чистовик 2.
часть 2

№5. $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$; $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$; $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

Заметим, что при $x=2$

$$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_3(9) = 2$$

$$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = \log_9 9 = 1$$

$$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) = \log_3 9 = 2$$, т.е. $x=2$ подходит.

~~$\sqrt{5x-1} \notin \mathbb{Z}$~~ $x=2$ – единств. ~~прото~~ решение

Ответ: $x=2$.

№4.

часть 2. черновик

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

НОД: p^c $c=\min(\alpha;\beta;\gamma)$

НОК: p^d $d=\max(\alpha;\beta;\gamma)$

~~$d=\max(\alpha;\beta;\gamma)$~~

~~$c=\min(\alpha;\beta;\gamma)$~~.

нет p кроме 2 и 3.

$a⋮6=2\cdot 3$

$b⋮6$

$c⋮6$

$a=6$

$b=6$

$c=2^{15}\cdot 3^{16}$

a;b;c

$a=2\cdot 3$ | $a=2\cdot 3$ | $a=2^{15}\cdot 3^{16}$
$b=2\cdot 3$ | $b=2^{15}\cdot 3^{16}$ | $b=2\cdot 3$
$c=2^{15}\cdot 3^{16}$ | $c=2\cdot 3$ | $c=2\cdot 3$.

$\frac{1+2}{2}\cdot 2$

$\frac{1+3}{2}\cdot 3$

a=

$\frac{1+16}{2}\cdot 16=17\cdot 8\cdot 3=$

$\alpha_1=15$

$a=2^2\cdot 3$

$b=2\cdot 3$

$c=2^{15}\cdot 3^{16}$

$$\begin{cases} a=2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2} \\ b=2^{\beta_1}\cdot 3^{\beta_2} \\ c=2^{\gamma_1}\cdot 3^{\gamma_2} \end{cases}$$

15:

$\alpha_1;\beta_1;\gamma_1$ | $3\cdot 15\cdot 15-4$

$\alpha_2;\beta_2;\gamma_2$ | $3\cdot 16\cdot 16-4$

$(3\cdot 15\cdot 16-4)(3\cdot 16\cdot 16-4)=$

$16\times 16=96+160=256$

$225\cdot 3=675$; $675-4=671$

$256-4=252$

$671+1252=1342$ ... 3355, 1342, 169092

20×12

15;15;γ_1

15;15;15

15;β_1;15

α_1;15;15

$\min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=1$

$\max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=15$.

15;1;γ_1

15;β_1;1

15

15 + 15 − 1

~~15;15~~

15;1;γ_1

15;β_1;1

1;15;γ_1

α_1;15;1

1;β_1;15

α_1;1;15

15;1;1

15;1;

$16\times 6=96$

90−6

№5. часть 2. черновик 2

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$

$\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

1) $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=\log_{4x+1}\left(\frac{\pi}{2}+2\right)^2$

$\log_{5x-1} 4x+1 = 2\log_{4x+1}\left(\frac{\pi}{2}+2\right)$

$4x+1>0$

$x>-\frac{1}{4}$

$\sqrt{5}$

$x=\pi$

$\sqrt{5x+1}\ (4\pi+1)$

$5x-1>0$

$x>\frac{1}{5}$

$5x-1\neq 1$

$x\neq\frac{2}{5}$

$\log_{4x+1} t$

$\frac{x}{2}+2>0$

$\log_2 3=\log$

$\frac{x}{2}>-2$

$x>-4$

$\log$

1) $\begin{cases}\log_{5x-1}(4x+1)=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)\\ \log_{5x-1}(4x+1)=\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)\\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)=\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)\end{cases}$

$\frac{x}{2}+2\neq 1$

$\frac{x}{2}\neq -1$

$x\neq -2.$

$x=2;$

$\frac{\lg(4x+1)}{\lg(5x-1)}=\frac{\lg\left(\frac{x}{2}+2\right)}{\lg(4x+1)}$

$x=1$

$\sqrt{5x-1}=1$

$\lg^2(4x+1)=\lg\left(\frac{x}{2}+2\right)\lg(5x-1)$

$2\log_{5x-1}(4x+1)$

$2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

$\frac{1}{\log_{4x+1}(5x-1)}=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$1=\log_{4x+1}(5x-1)\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$x=2,$

$x=2$

$x=4$

$2\log_4 9=2$

$20-1$

$16+1$

17

19

$2\log_4(3)=1$

$\log_{5x-1}(4x+1)\log_{\frac{x}{2}+2}(4x+1)=1$

$\log_{3} 9=2$

$\sqrt{5x-1}=\frac{x}{2}+2$

$2\log_{5x-1}(4x+1)=2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$\log_{5x-1}(4x+1)=\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$\frac{\lg^2(4x+1)-\lg\left(\frac{x}{2}+2\right)\lg(5x-1)}{\lg(4x+1)\lg(5x-1)}$

$(4x+1)^{\log_{5x-1}(4x+1)}=\frac{x}{2}+2$

$t^{\log_{5x-1} t}=\frac{x}{2}+2.$

$\lg^2(4x+1)=\lg\left(\frac{x}{2}+2\right)\lg(5x-1)$ $\log_{5x-1}$

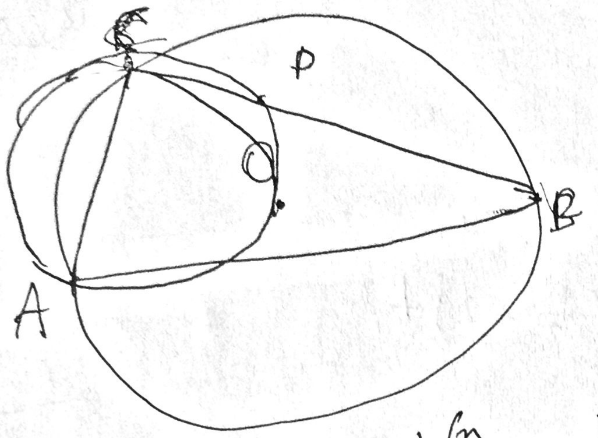
$10^{\lg\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\lg(5x-1)}$

$\left(\frac{x}{2}+2\right)^{\lg(5x-1)}$

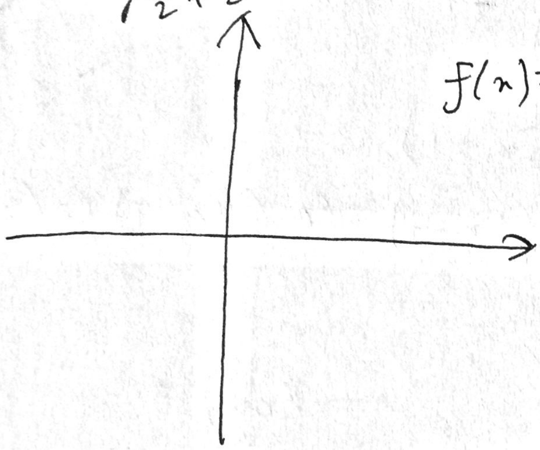
$(4x+1)^{\lg(4x+1)}=$

№ 6

Черновик 3.
часть 2.



$\log_{\frac{x}{2}+2}\left((5x-1)\left(\frac{x}{2}+2\right)\right)$ $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1$



$f(x)=\frac{\log_{5x-1}(4x+1)}{\ln x}=\frac{\ln(4x+1)}{\ln(5x-1)}$

$f'(x)=\frac{\frac{\ln(5x-1)}{4x+1}-\frac{\ln(4x+1)}{5x-1}}{\ln^2(5x-4)}$

$\lg^2(4x+1)=\lg\left(\frac{x}{2}+2\right)\lg(5x+1)$

$\frac{\lg(4x+1)}{\lg(5x-1)}=\frac{\lg(5x-1)}{\lg\left(\frac{x}{2}+2\right)}+1$

$\begin{cases}\lg(4x+1)\cdot\lg\left(\frac{x}{2}+2\right)=\lg^2(5x-1)^2+\lg(5x-1)\lg\left(\frac{x}{2}+1\right)=0.\\ \lg^2(4x+1)=\lg\left(\frac{x}{2}+2\right)\lg(5x+1)\end{cases}$

$\lg(4x+1)\lg\left(\frac{x}{2}+2\right)=\lg^2(5x-1)+\lg^2(4x+1)$

$\{$

Черновик 4.
часть 2.

Nb. №5.

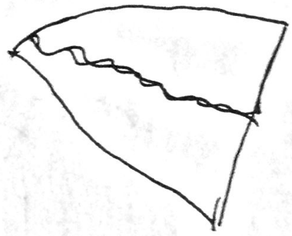
$2\log_{5x-1}(4x+1)$

$2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$

$\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

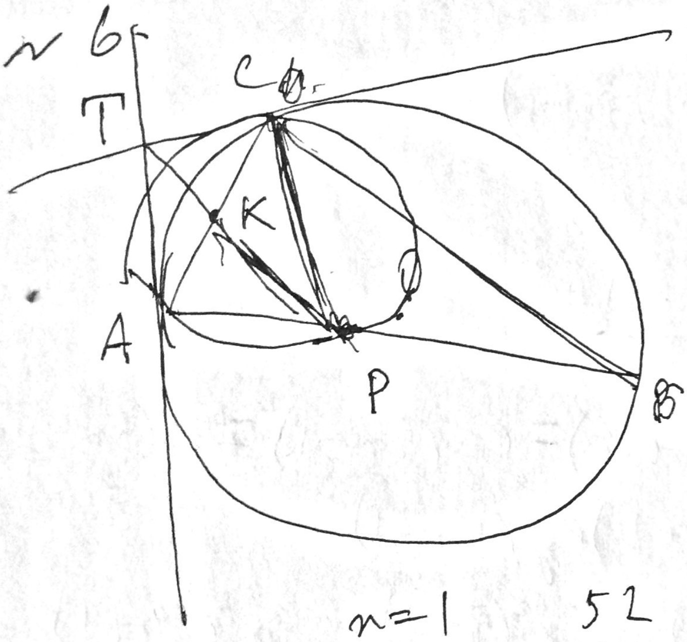
$$\begin{cases} 2\log_{5x-1}(4x+1)=\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) \\ 2\log_{5x-1}(4x+1)=2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2\ln(4x+1)}{\ln(5x-1)}=\dfrac{\ln(5x-1)}{\ln\left(\frac{x}{2}+2\right)} \\ \dfrac{2\ln(4x+1)}{\ln(5x-1)}=\dfrac{2\ln\left(\frac{x}{2}+2\right)}{\ln(4x+1)}+1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 2\ln(4x+1)\cdot\ln\left(\frac{x}{2}+2\right)=\ln^2(5x-1) \\ 2\ln^2(4x+1)=2\ln\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot\ln(5x-1)+\ln(4x+1)\cdot\ln(5x-1) \end{cases}$$

№6.



$S_{APK}=6$

$S_{CPK}=4$

$\log_2 5$

$\log$

$x=10$

$5+2=7$

$\log_7(41)$

130

$\log_{41} 7$

261

$\log_7(49)=2$

42

~~x= 15~~

$x=13.$

$x=1$ 52

27.

$65-1=$

$x=65.$

$\log_2 5$

$\log_5 \frac{3}{2}.$

~~$\log_3 261$~~

~~$\log 261$~~

$x=$

$x=16$

$x=14.$

71.

$x=19.$ $\log_8 53.$

44. $x=20.$

$x=165$

74

$x=17.$

84

119

$x=23.$

$x=15.$

$x=18$

$x=21.$

99.

109

169

74.

~~41~~ 31.

104

114

1393.