Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100195**

ID профиля: **122410**

Вариант 17

Чистовик.

№3.

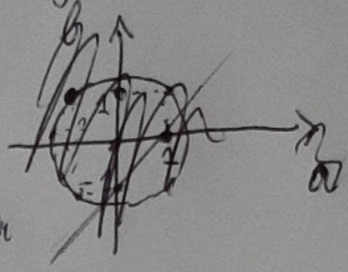
Для начала рассмотрим, какие значениям удовлетворяют a и b:

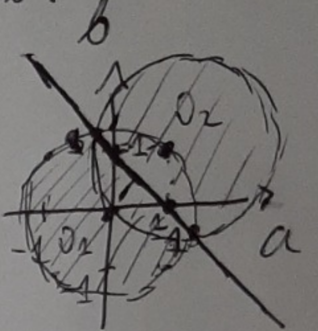
$a^2+b^2 \leq \min(2a+2b,\ 2)$, при $2 \geq 2a+2b$: $b \leq 1-a$

$a^2+b^2 \leq 2$ -

- внутренность окружности с радиусом $\sqrt{2}$ и центром в $(0;0)$ под прямой

$b = 1-a$





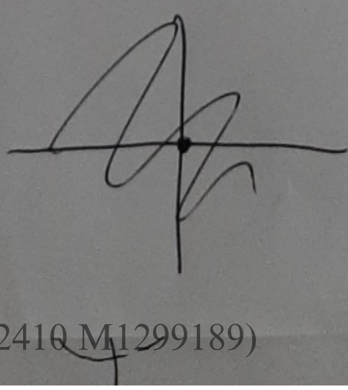
при $2 < 2a+2b$:

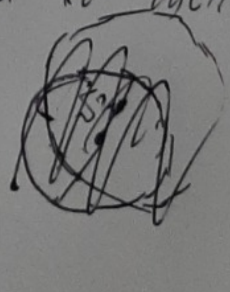
$a^2+b^2 \leq 2a+2b$

$(a-1)^2+(b-1)^2 \leq 2$ - внутри окружности с радиусом $\sqrt{2}$, центром в $(1,1)$ над прямой $b \geq 1-a$.

Получаем, что a и b принадлежат к объединению двух таких окружностей.

А теперь понимаем, что $(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 2$ - это окружности с центрами в точках (a,b) и радиусами $\sqrt{2}$. То есть искомая фигура есть объединение двух окружностей с теми же центрами, но радиусами $2\sqrt{2}$:





5

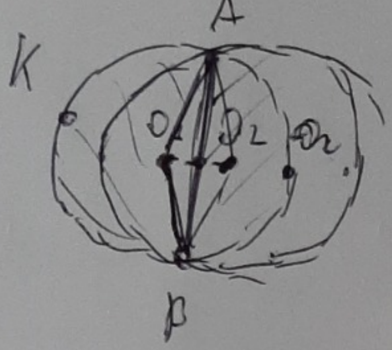
21100195 (U122410 M1299189)

Чистовик

O_1 и O_2 - центры окружностей

$O_1O_2 = \sqrt{2}$.

радиусы окружностей $2\sqrt{2}$.



$AB = 2\sqrt{(2\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} =$

$= 2\cdot \sqrt{15}/2 = \sqrt{30}$

$\cos\angle AO_1O_2 = \dfrac{\sqrt{2}/2}{2\sqrt{2}} = 1/4$

$\angle AO_1B = 2\cdot \arccos(1/4)$,

$S_{\cup AKB} = (\pi - \arccos(1/4))\cdot(\sqrt{2}\cdot 2)^2 = 8\cdot(\pi - \arccos(1/4))$,

$S_{\triangle AO_1B} = 1/2 \cdot 1/2 \cdot O_1O_2 \cdot AB = 1/4 \cdot \sqrt{2}\cdot\sqrt{30} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$

Тогда $S_{ф.} = 2\cdot\left(8\cdot(\pi - \arccos(1/4)) + \dfrac{\sqrt{15}}{2}\right) =$ $S_{\triangle AO_1B} + S_{\cup AKB}$

$= 16\pi - 16\arccos(1/4) + \sqrt{15}$

Отв:

6

21100195 (U122410 M1299189)

Чистовик

Единственное, что может не позволить вписать пятиугольник в цилиндр является, то что AM больше, чем практическое расстояние от точки A до △ADC:

$$CD^2 = \cancel{\sqrt{}}\,5^2+6^2-2\cdot6\cdot5\cdot\cos\alpha$$ – угол между AD и AC

$$\cos\alpha = \frac{61-CD^2}{60}$$

$$1-\sin^2\alpha = \frac{(61-CD^2)^2}{3600}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{-(61-CD^2)^2+3600}{3600}}$$

$$\frac12 CD\cdot AM \geq S_{\triangle ADC} = \frac12\cdot5\cdot6\cdot\sin\alpha$$

$$\sqrt2 = AM \geq 30\cdot\sqrt{\frac{3600-(CD^2-61)^2}{3600\,CD^2}} = \frac12\cdot\sqrt{\frac{3600-(CD^2-61)^2}{CD^2}}$$

$$8 \geq \frac{3600-(CD^2-61)^2}{CD^2}$$

$$8CD^2 \geq 3600-(CD^2-61)^2$$

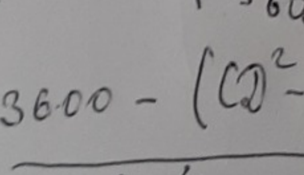
и из неравенства △: $CD < 11$

$$CD^4-114CD^2+121 \geq 0$$

Отсюда можно понять, что выйдут 2 случая – где CD > чего-то и где CD < чего-то.

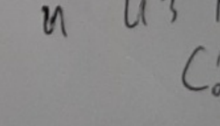
3

Ясно, что 1 случай, когда △ADC – остроугольный, и крайним случаем является то, что высота = $\sqrt2$:



$\Rightarrow DM = \sqrt{36-2} = \sqrt{34}$; $MC = \sqrt{25-2} = \sqrt{23}$ $\Rightarrow CM+MD = \sqrt{34}+\sqrt{23}$

А с другой стороны: случай, когда △ADC – тупоугольный



$\Rightarrow MC = \sqrt{23}$, $DM = \sqrt{34}$, $DC = \sqrt{34}-\sqrt{23}$.

Чистовик.

Из чего получаем ответ:

$$CD \in (0; \sqrt{34} - \sqrt{23}] \cup [\sqrt{34} + \sqrt{23}; 11).$$

④

Черновик

$S = a + (a+d) + \ldots + (a+9d) = 10a + 45d$

121

$25-2=\sqrt{23}$

$\sqrt{35}$

$a^2 + 16ad + 55d^2 > 10a + 45d + 1$

$a^2 + 16ad + 60d^2 < 10 + 45d + 171$

$61 \times 61 = 3660 ... 3721$

CD

$\sqrt{37} + \sqrt{26}$

$d = 1$

$d = 0$

$d = -1$

$+5d^2 > 10a + 45d + 1 + 5d^2$

$5d^2 < 16$

$5d^2 \le 15$

$d^2 \le 3$

$DC \cdot 1 > \sqrt{37} \cdot \sqrt{26}$

114×114

$CD =$

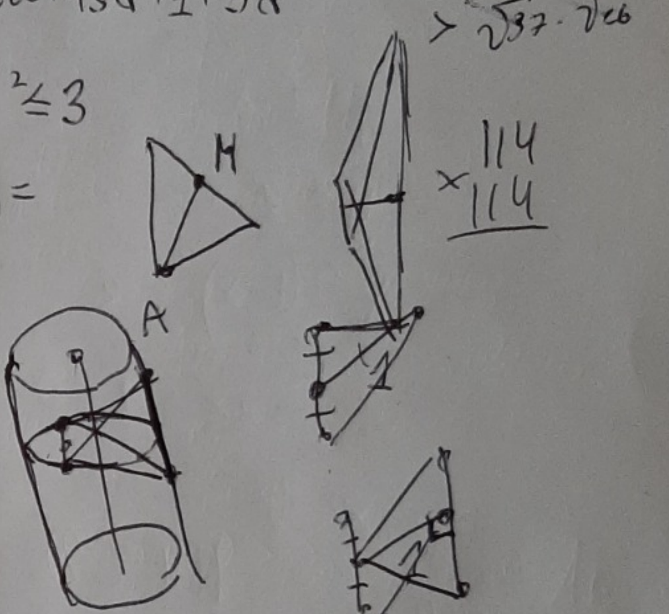
$6^2 - \sqrt{2}$

$36 - 2 = \sqrt{34}$

$a^2 + 6a - 2 > 0$

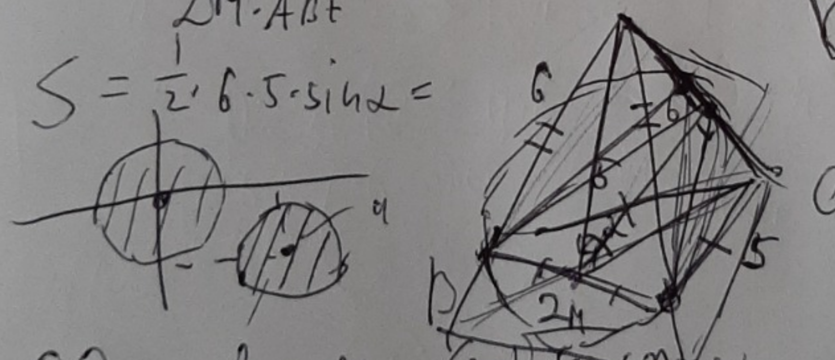
$-3 - \sqrt{11}$

$(a \cdot b)$



$DM \cdot AB +$

$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \sin\alpha =$



$2a + 2b = 2$

$CD < 11$

$x = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 30 \cdot \cos\alpha$

$\frac{1}{2} h \cdot CD$

$AM > \frac{1}{2}$

$\sqrt{6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos\alpha} =$

$= \sqrt{61 - 60\cos\alpha}$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 2$

$\cos\alpha = \frac{61 - CD^2}{60}$

$a^2 + b^2 \le (\min(2a+2b, 2))$

$6 \cdot 5 \cdot \sin\alpha$

$a^2 - 2a + b^2 - 2b \le 2$

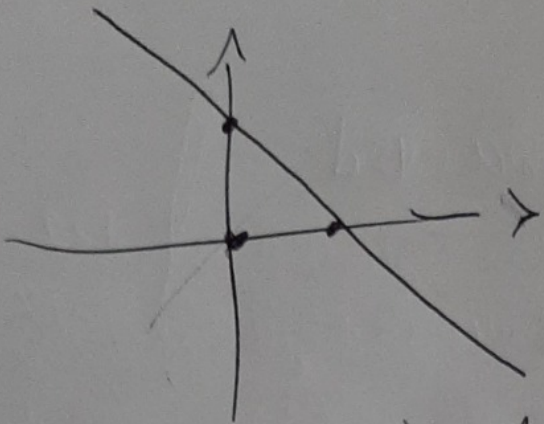
$h = \frac{6 \cdot 5 \cdot \sin\alpha}{\sqrt{61 - 60\cos\alpha}}$

$\sin\alpha$ — ур.

ур.

$CD = \sqrt{61 - 60\cos\alpha}$

21100195 (U122410 M1299189)



$y = 1 - x$

$y \le 1 - x$

$0 \qquad 0$

$y = 1 - x$

$y = 1 - x$

$x^2 + (1-x)^2 = 2$

$2x^2 - 2x - 1 = 0$

CD <

x

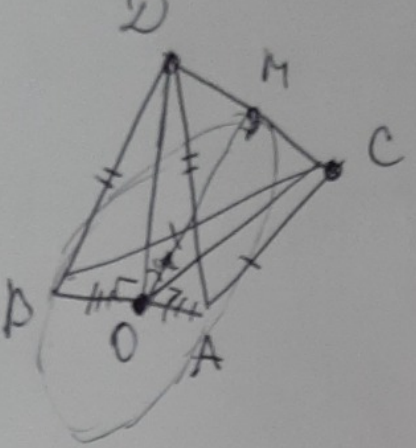
~~114 CD~~

CD ≥

Чистовик.

№2.

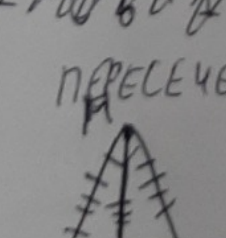
Поймём, что раз $CD \parallel$ оси цилиндра, то весь отрезок CD будет лежать на поверхности цилиндра, а



значит окружность на поверхности цилиндра, проходящая через точки A и B будет проходить и через отрезок CD.

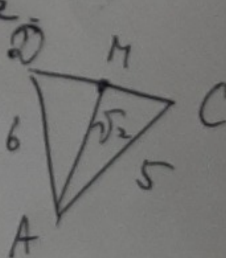
Отметим, что из-за симметрии относительно плоскости через точки C, D и середину отрезка AB, тетраэдр переходит сам в себя, поэтому окружность содержащая отрезок AB можно провести так, что она равна основанию цилиндра. Значит минимальное значение диаметра цилиндра равно $AB=2$ (радиус соответственно $\underline{1}$), а AB — диаметр окружности в основании цилиндра, тогда из середины AB можно провести отрезок равный по длине $\underline{1}$. Обозначим середину AB за O, а точку пересечения окружности и DC, за M

тогда



Т.к. $OM = OB = OA$ и $MB = MA \Rightarrow$
$\Rightarrow MA = \sqrt{2}$.

Получаем Δ: ADC



2

21100195 (U122410 M1299189)

Чистовик

№1

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}$, обозначим a_1 за a, а шаг прогрессии за d, тогда: $S = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a+9d) = 10a + 45d$;

Из условия:

$(a_6 = a+5d$; $a_7 = a+6d$; $a_{11} = a+10d$; $a_{12} = a+11d)$

$(a+5d)\cdot(a+11d) > 10a+45d+1$.

$(a+6d)\cdot(a+10d) < 10a+45d+17$

$\cancel{(a+5d)\cdot(a+11d)}$

$\Leftarrow$ $a^2+16ad+55d^2 > 10a+45d+1$

$a^2+16ad+60d^2 < 10a+45d+\boxed{17}$

$a^2+16ad+60d^2 > 10a+45d+5d^2+1$,

$\Downarrow$

$5d^2 \le 15 \Rightarrow d^2 \le 3$, но т.к. $a_1, a_2 \ldots$ - целые, то d - тоже целое, поэтому отсюда следует, что $d = -1$; 0 или 1. Т.к. прогрессия возрастающая, то $d = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a^2+16a+55 > 10a+45+1 \Rightarrow a^2+6a+9>0$, $(a+3)^2$ - всегда

$a^2+16a+60 < 10a+45+17 \Rightarrow a^2+6a-2 < 0$

$D = 36+4\cdot2 = 44$

$a \in \left(\frac{-6-\sqrt{44}}{2}; \frac{-6+\sqrt{44}}{2}\right)$, т.к.

a - целые, то $a = -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0$.

отв.:

1

21100195 (U122410 M1299189)

Часть 2

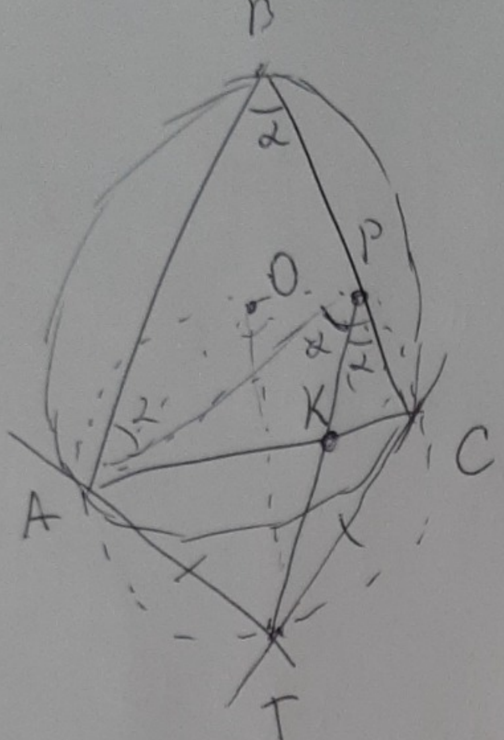
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100195**

ID профиля: **122410**

Вариант 17

Чистовик.
№6



а) По лемме о площадях:

$$\frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle KPC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{6}{4}.$$

Т.к. $\angle OAT + \angle OCT = 180°$,
$\underset{90°}{\angle OAT}$, $\underset{90°}{\angle OCT}$

то AOCT – на 1 окружности =>

=> A, O, P, C, T – на одной окружности

AT = TC – касательные =>

=> PT – биссектриса угла APC ($\cup AT = \cup TC$) =>

=> $\frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{6}{4}$; Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда

$\angle AOC = 2\alpha$ (центральный в 2 раза больше вписанного) =>

=> $\angle APC = 2\alpha$ = (на ту же дугу AC) => $\angle BAC = \alpha$ =>

=> $\triangle APB$ – р/б => $AP = BP$, => $\frac{BP}{PC} = \frac{6}{4}$, по лемме о

площадях получаем, что $S_{\triangle BAC} = \frac{10}{4} \cdot S_{\triangle APC} = \frac{10^2}{4} =$

$= \underline{25}$ – отв.

б) Пусть $AP = 6x$, а $PC = 4x$, тогда

$S_{\triangle APC} = 10 = \frac{1}{2} \cdot 6x \cdot 4x \cdot \sin 2\alpha = 24x^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$,

т.к. $\alpha = \operatorname{arctg} 7/5$, то $\operatorname{tg}\alpha = 7/5$ => $\sin\alpha = \frac{7}{\sqrt{74}}$; $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{74}}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

5

21100195 (U122410 M1299190)

Откуда: Чистовик

$$10 = 24 \cdot \frac{35}{74} \cdot x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{740}{24 \cdot 35} = \frac{185}{6 \cdot 35} =$$

$$= \frac{37}{42}.$$ По теореме косинусов:

$$AC = \sqrt{(4x)^2 + (6x^2) - 2 \cdot 4x \cdot 6x \cdot \cos\alpha} =$$

$$= \sqrt{x^2 \cdot 52 - x^2 \cdot 48 \cdot \frac{5}{\sqrt{74}}} = \sqrt{\frac{37}{42} \cdot \left(52 - 48 \cdot \frac{5}{\sqrt{74}}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{37}{21} \cdot \left(26 - 24 \cdot \frac{5}{\sqrt{74}}\right)} = \sqrt{\frac{\sqrt{37}}{21\sqrt{2}} \cdot \left(26\sqrt{74} - 24 \cdot 5\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{26 \cdot 37 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{37} \cdot 24 \cdot 5}{21\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{962 - 60\sqrt{74}}{21}}$$

6

Чистовик

Получаем, что 2 каких-то логарифма равны 2, а какой-то равен 1. Рассмотрим 3 случая:

1) $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=1 \Rightarrow \frac{x}{2}+2=5x-1$

$3=4,5x \Rightarrow x=\frac{2}{3}$.

Подставляем в другие:

$\log_{\frac{8}{3}+1}\left(\frac{1}{3}+2\right)^2=\log_{\frac{11}{3}}\frac{49}{9}\neq 2$ - не подходит

2) $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=1 \Rightarrow 4x+1=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^2}{4}-2x+3=0 \Rightarrow x^2-8x+12=0$

$(x-2)(x-6)=0$, при $x=2$:

$x=2$:

$\log_{\frac{2}{2}+2}(5\cdot 2-1)=\log_3 9=2$;

$\underbrace{\log_{\sqrt{2\cdot 5-1}} 4\cdot 2+1=\log_3 9=2}$; - подходит.

$x=6$:

$\log_{\frac{6}{2}+2}(5\cdot 6-1)=\log_5 29$ - не подходит.

3) $\log_{\sqrt{5x-1}} 4x+1=1 \Rightarrow \sqrt{5x-1}=4x+1$

$5x-1=16x^2+8x+1$

$16x^2+3x+2=0$

$9-4\cdot 16\cdot 2=D<0$

Получаем, что единственный подходящий $x=2$.

Отв: 2.

9

21100195 (U122410 M1299190)

Чистовик.

№4.

$$\begin{cases} НОД(a, b, c) = 6; \\ НОК(a; b; c) = 2^{15} \cdot 3^{16} \end{cases} \Rightarrow a = 6a_1;\ b = 6b_1;\ c = 6c_1, \text{ где } a_1, b_1 \text{ и } c_1 \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$НОК(a_1; b_1; c_1) = 2^{14} \cdot 3^{15};\ НОД(a_1; b_1; c_1) = 1,$$

Можно понять, что $a_1 = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3}$; $b_1 = 2^{b_2} \cdot 3^{b_3}$; $c_1 = 2^{c_2} \cdot 2^{c_3}$

где ~~$a_{2,3}$ все значения~~ $a_{2,3}; b_{2,3}; c_{2,3} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Можно понять, что если все a_1, b_1 и $c_1 \vdots 2$, то хотя бы 1 из 3 $НОД(a_1, b_1, c_1) \neq 1$, значит $\vee a_2$, b_2 или c_2 равно 0, аналогично хотя бы одно из a_3, b_3 и c_3 равно 0, при этом хотя бы 1 из a_2, b_2, c_2 равно 14 и хотя бы одно из a_3, b_3, c_3 равно 15, чтобы НОК был таким какой он есть. Оставшееся из чисел в тройке из a_2, b_2 и c_2 может быть любым от 0 до 14, а в a_3, b_3 и c_3 от 0 до 15. Рассмотрим в начале ~~случаи~~ распределение троек a_2, b_2, c_2.

Всего различных вариантов:

$$\underbrace{\cancel{3!\cdot 13}}_{1} \quad \underbrace{3! \cdot 13}_{\text{одно из чисел 0, другое 14, третье от 1 до 13}} + \underbrace{3}_{\text{два числа 0, одно 14}} + \underbrace{3}_{\text{два числа 14, одно 0.}} = 84$$

Для чисел a_3, b_3 и c_3 различных вариантов: аналогично:

$$3! \cdot 14 + 3 + 3 = 90$$

1

Чистовик.

В ответе получим $90 \cdot 84 = 7560$ - троек.

②

Чистовик

№5

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$; $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2} 5x-1$,

т.к. все эти логарифмы существуют, то можно их преобразовать:

1.) $\log_{\sqrt{5x-1}} 4x+1 = \frac{1}{\log_{4x+1}\sqrt{5x-1}} = \frac{2}{\log_{4x+1} 5x-1}$;

2.) $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 2\log_{4x+1}\frac{x}{2}+2$

3.) $\log_{\frac{x}{2}+2} 5x-1$.

~~Рассмотрим случаи:~~

~~1) (1=2)~~: $\cancel{\frac{2}{\log_{4x+1}5x-1} = 2\log_{4x+1}\frac{x}{2}+2 \Rightarrow}$

$\cancel{\Rightarrow \log_{4x+1}(5x-1)\cdot\log_{4x+1}\frac{x}{2}+2 = 1}$

$\cancel{\frac{\log_{\sqrt{5x-1}} 4x+1}{\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)} = 1}$

Сделаем замену: a, b, c $a=4x+1$; $b=5x-1$; $c=\frac{x}{2}+2$

получим: $\log_c b$; $2\log_a c$, $\frac{2}{\log_a b}$, если их перемножить, то выйдет:

$\log_c b\cdot 2\log_a c\cdot\frac{2}{\log_a b} = \frac{\ln b}{\ln c}\cdot\frac{2\ln c}{\ln a}\cdot\frac{2\ln a}{\ln b} = 4$,

если 2 из них равны d, а третий $d-1$, то

$d^2(d-1)=4 \Leftrightarrow d^3-d^2-4=0 \Rightarrow d=2$. 3

$(d-2)\underbrace{(d^2+d+2)}_{D<0}=0$

Черновик

$(a, b, c) = 6$;

$2 \cdot 3 \cdot a_1 = 3^{16}$

$2 \cdot 3 \cdot b_1$

$2 \cdot 3 \cdot c_1$

$2 \cdot 3 \cdot 3^{18}$

2

9

$a = \frac{x}{2} + 2$;

$4x + 1 > \frac{x}{2} + 2$

$\log_a b$

$a_1 \cdot b_1 \cdot c_1$

7560

$\frac{4}{10} x \cdot \frac{6}{10} =$

a, b, c

$a = 6a_1$

$6b_1$

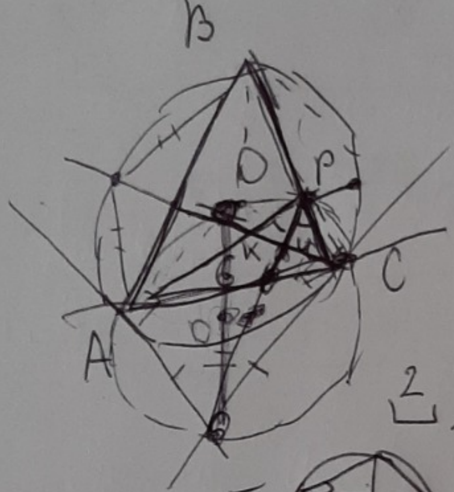
$6c_1$

$\log_a b$;

$2 \log_b c$

$\log_c a$

$2 \cdot 3 \cdot 3^2$



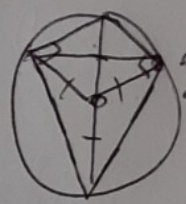
$\underline{2}, \underline{2}, \underline{2}$

$2^{13}, 3^{16}$

4

$\sqrt{2}$

1 угол 13



2^k

$2^{a_2} \cdot 3^{a_3}$

$2^{b_2} \cdot 3^{b_2}$

2

$3 \cdot 15 \cdot 6x$

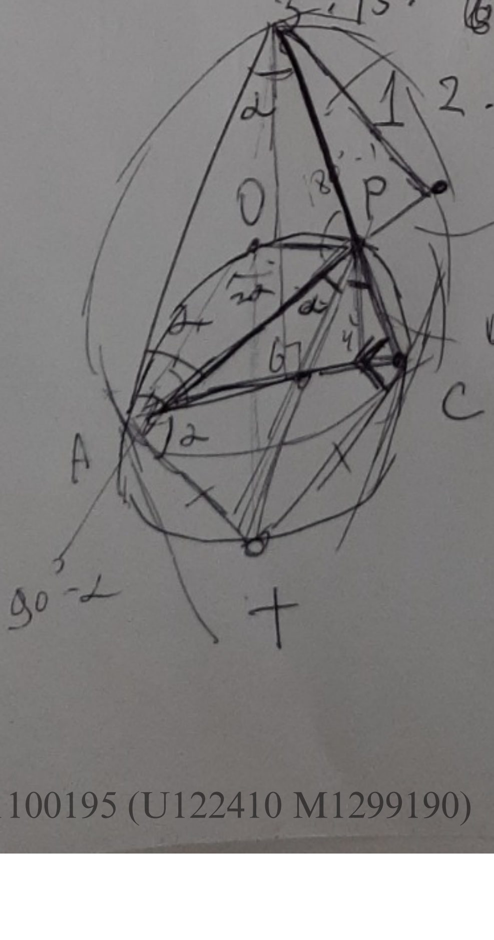
26×37

$\begin{array}{r} \times \; 26 \\ 37 \\ \hline 182 \\ + 78 \\ \hline 962 \end{array}$

1, 2 . . . 13

$4 \times 78 + 6 = 84$

$4x \log_{\sqrt{5x-1}} (4x+1)$



$\frac{4}{10}$

$2 \log_{4x+1} \left(\frac{x}{2} + 2\right)$;

21100195 (U122410 M1299190)