Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100157**

ID профиля: **175028**

Вариант 17

1 часть. 11 класс. 17 Вариант. Лист 1.

Чистовик.

① По условию, $a_1, a_2 \dots a_n$ — арифм. прогрессия, $a_i \in \mathbb{Z}$. ($i \in [1; n]$).
Пусть d — разность прогрессии, $d > 0$, т.к. прогрессия возрастающая.
Т.к. $a_i \in \mathbb{Z}$, то и $d \in \mathbb{Z}$. Иначе, $a_2 = (\underset{\in \mathbb{Z}}{a_1} + \underset{\notin \mathbb{Z}}{d}) \notin \mathbb{Z}$, что не верно.

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

$$S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 10a_1 + 45d$$

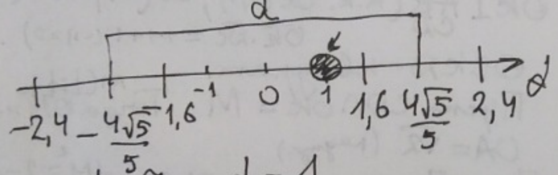
1) $a_6 \cdot a_{12} > S + 1 \iff (a_1 + 5d)(a_1 + 11d) > 10a_1 + 45d + 1 \iff \underline{a_1^2 + 16da_1 + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1}$

2) $a_7 \cdot a_{11} < S + 17 \iff (a_1 + 6d)(a_1 + 10d) < 10a_1 + 45d + 17 \iff a_1^2 + 16da_1 + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17.$

Домножив 1) неравенство на −1 и почленно сложив полученное неравенство с 2) получим ~~одно~~:

$$5d^2 < 16 \iff |d| < \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

$2 < \sqrt{5} < 3$
$1{,}6 < 0{,}8\sqrt{5} < 2{,}4$



т.к. $\begin{cases} d \in \mathbb{Z} \\ d > 0 \end{cases}$, $d = 1$.

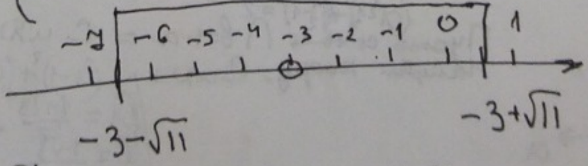
Подставим $d = 1$ в 1) и 2):

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 55 > 10a_1 + 46 \\ a_1^2 + 16a_1 + 60 < 10a_1 + 62 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (a_1 + 3)^2 > 0 \\ (a_1 - (-3 + \sqrt{11}))(a_1 - (-3 - \sqrt{11})) < 0 \end{cases} \iff$$

$a_1^2 + 6a_1 - 2 = 0$
$\frac{D}{4} = 9 + 2 = 11$
$\left[\begin{array}{l} a_1 = \frac{-3 + \sqrt{11}}{1} \\ a_1 = -3 - \sqrt{11} \end{array}\right.$

$$\iff \begin{cases} a_1 \neq -3 \\ a_1 \in ~~(-3-\sqrt{11}) \cup (-3+\sqrt{11})~~ (-3 - \sqrt{11}; -3 + \sqrt{11}) \end{cases}$$

$3 < \sqrt{11} < 4$ | $-4 < -\sqrt{11} < -3$
$0 < -3 + \sqrt{11} < 1$ | $-7 < -3 - \sqrt{11} < -6$



т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$, $a_1 = -6; -5; -4; -2; -1; 0$

Ответ: −6; −5; −4; −2; −1; 0.

Чистовик. Лист 1.

③. Будем рассматривать систему координат aOb.

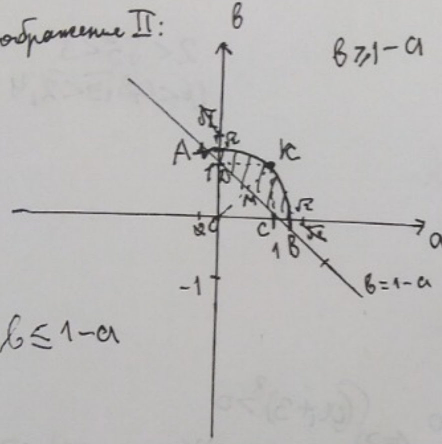
$$\begin{cases}(a-x)^2+(\overset{b-y}{\cancel{y-b}})^2\le 2\\ \cancel{a}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2a+2b\ge 2\\ a^2+b^2\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}2a+2b<2\\ a^2+b^2\le 2a+2b\end{cases}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-x)^2+(y-b)^2\le 2 & Ⓘ\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b\ge 1-a\\ a^2+b^2\le 1\end{cases} & Ⓘⓘ\\ \begin{cases}b<1-a\\ (a-1)^2+(b-1)^2\le 2\end{cases} & Ⓘⓘⓘ\end{array}\right.\end{cases}$$

I неравенство задаёт круг с центром $(x;y)$ и радиусом $\sqrt{2}$. Назову его ω_1

II система: ~~а точки~~ её решением будет являться множество точек, которые изображают ~~сех~~ сегмент круга с центром $O(0;0)$ и рад. $\sqrt{2}$.

III система: её решение — множ. точек, изображающих сегмент круга с центром $K(1;1)$ и рад $\sqrt{2}$.

Изображение II:



Пусть A и B — точки пересечения окр. $a^2+b^2=2$ и $b=1-a$.

$O(0;0)$, $C(1;0)$, $D(0;1)$.

$K(1;1)$.

$OK \perp \overset{\cancel{AB}}{CD}$ (т.к. $\overline{OK}(1;1)$, ~~$\overline{CD}(-1;$~~ $\overline{DC}(1;-1)$

$\overline{OK}\cdot\overline{DC}=1\cdot1+1\cdot(-1)=0$).

OCKD — квадрат.

Пусть $CD\cap OK=M$. $M(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$. Тогда $OM=\frac{1}{2}OK=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$OA=\sqrt{2}$ (радиус)

По т. Пифагора для ▵OMA: $AM^2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$AM=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Аналогично $MB=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

~~B~~ ~~$\overline{MA}$~~

Найдём точки пересечения $a^2+b^2=2$ и $b=1-a$:

$1-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$a^2+a^2-2a+1=2 \Leftrightarrow 2a^2-2a-1=0$

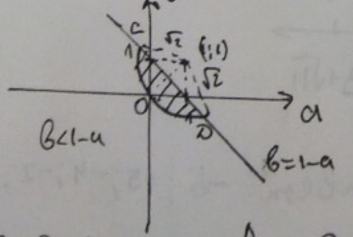
$\frac{D}{4}=1+2=3$

$$\left[\begin{array}{l}a=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ \cancel{b}a=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ b=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}a=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\\ b=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

т.е. $A\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

$B\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

Изображение III:



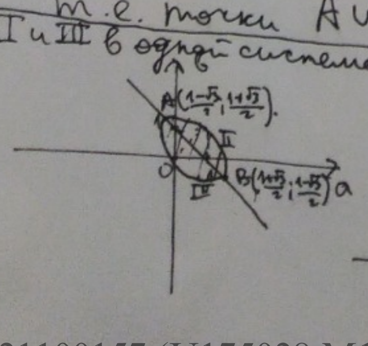
Пусть ~~$a^2+b^2=2$~~ $(a-1)^2+(b-1)^2=2$ $\cap\ b=1-a$ = C и D.

Найдём коорд. C и D: $(a-1)^2+(a)^2=2$.

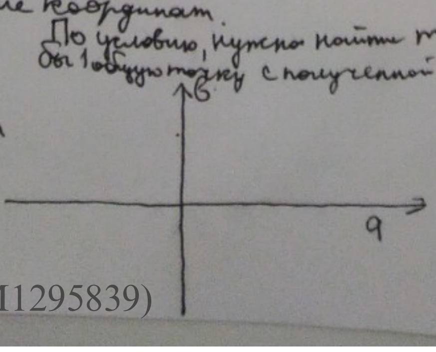
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ b=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{cases} \leftarrow D\\ \begin{cases}a=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\\ b=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{cases} \leftarrow C\end{array}\right.$$

т.е. точки A и C, B и D совпадают.

II и III в одной системе координат.



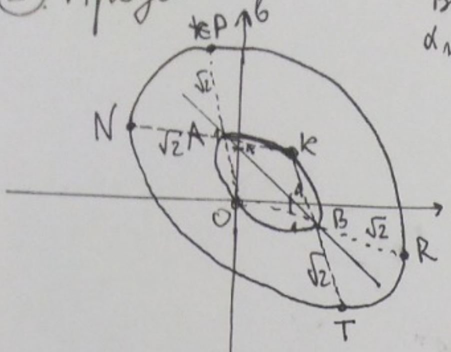
По условию, нужно найти такие x и y, что круг ω_1 имел хотя бы 1 общую точку с полученной фигурой.



Продолжение на след. ~~странице~~ листе

Чистовик. Лист 2.

③ Продолжение.



Все такие $(x;y)$ будут принадлежать 4 секторам:
$\alpha_1 = OPR$, $\alpha_2 = BRT$, $\alpha_3 = KTN$, $\alpha_4 = ANP$.

Искомая фигура M — совокупность секторов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и α_4

Дуга PR — все точки, равноудалённые от дуги AKB на $\sqrt{2}$, т.е. $OP = 2\sqrt{2} = OR$

Дуга RT — ~~вс~~ точки, равноудалённые от точки B на $\sqrt{2}$, т.е. $BR = \sqrt{2}$, $BT = \sqrt{2}$.

Дуга TN аналогична PR, ~~NP — RT~~, NP аналогична RT

~~Найдём координат~~

Рассмотрим $\triangle AOB$. $AB = |\overline{AB}| = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ $\sqrt{\frac{3}{2}}$

$OA = \sqrt{2}$, $OB = \sqrt{2}$.

По т. косинусов: $\cos\angle AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = \frac{2+2-\frac{3}{2}}{2 \cdot 2} = \frac{4-\frac{3}{2}}{4} = \frac{5}{8}$. $\angle AOB = \arccos\frac{5}{8}$

Точки O и K симметричны относительно AB, значит $\angle AKB = \angle AOB = \arccos\frac{5}{8}$

Пусть $\angle AOB = \alpha = \angle AKB$.

$$S_M = \left(S_{\underset{\text{сект}}{}OPR} - S_{\underset{\text{сект}}{}O(AKB)}\right) + \left(S_{\underset{\text{сект}}{}NKT} - S_{\underset{\text{сект}}{}K(AOB)}\right) + S_{\underset{\text{сект}}{}BPT} + S_{\underset{\text{сект}}{}ANP} + S_{\text{фигуры } OAKB}.$$

~~В М сект~~ Фигура M симметрична относительно прямой AB, значит $S_M = 2\left(\left(S_{\underset{\text{сект}}{}OPR} - S_{\triangle OAB}\right) + S_{\text{сект } BRT}\right)$

$S_{\text{сект } OPR} = \frac{\pi \cdot R_1^2 \cdot \arccos\frac{5}{8}}{2\pi}$, где $R_1 = OP = 2\sqrt{2}$. $\Rightarrow S_{\text{сект } OPR} = 8 \cdot \frac{\arccos\frac{5}{8}}{2} = 4\arccos\frac{5}{8}$.

$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}\sin\angle AOB \cdot OA \cdot OB = \frac{\sqrt{39}}{8}$

$\sin\angle AOB = \sqrt{1-\cos^2\angle AOB} = \sqrt{1-\frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$

~~Но~~ $S_{\underset{\text{сект}}{}BRT} = \frac{\pi R_2^2 \cdot \angle RBT}{2\pi}$

Найдём $\angle$~~B~~RBT. $B\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$. ~~$BR = \sqrt{}$~~ $R(x_1;y_1)$. $BR^2 = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} - x\right)^2} + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} - y\right)^2 = 2$.

Черновик.

1. S_{10}. $a_1, a_2, a_3 \dots a_n \in Z$. $d>0$

$a_6 a_{12} > S+1$, $a_7 a_{11} < S+17$.   все возм $a_1 = ?$

$S_{\cancel{10}} = \frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot 10 = 5(a_1+a_{10}) = 5(a_1+a_1+9d) = 10a_1+45d$. $\frac{a_1+a_1+11d}{2} = a$

$a_1=a_1$, $a_2=a_1+d$, $a_n = a_1+(n-1)d$ $a_2 = \frac{a_1+a_3}{2}$

$a_6 a_{12} > S+1$ $(a_1+5d)(a_1+11d)$

$a_1^2+16da_1+55d^2 > \cancel{5a}\ 10a_1+45d+1$

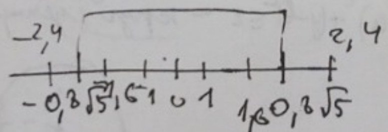
$a_7 a_{11} = (a_1+6d)(a_1+10d) < \cancel{a_1+a}\ 10a_1+45d+17$.

$$\begin{cases} a_1^2+16da_1+60d^2 < 10a_1+45d+17 \\ a_1^2+16da_1+55d^2 > 10a_1+45d+\cancel{7}1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$5d^2 < \cancel{6}16$

$d^2 < \frac{16}{5}$

$-\frac{4}{\sqrt5} < d < \frac{4}{\sqrt5}$



$2<\sqrt5<3$

~~$0,8<2,4$~~

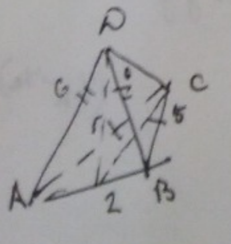
$1,6 < 0,8\sqrt5 < 2,4$

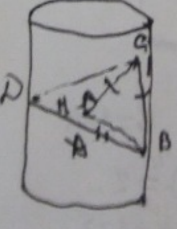
Если все члены целые, то и $d\in Z$, иначе если $d \notin Z$, то $a_2 = a_1+d \notin Z$.

$d \in Z$. $d=1$.

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1+55 > 10a_1+46 \\ a_1^2+16a_1+60 < 10a_1+62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a_1^2+6a_1+9>0 \\ a_1^2+6a_1-2<0. \end{matrix}$$

2.





3. M состоит из точек $(x;y)$.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 2\\ a^2+b^2\leq \min(2a+2b,2)\end{cases}\to$$

$$\Leftrightarrow (a-x)^2+(b-y)^2\leq 2$$

Рассмотрим систему координат aOb

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2a+2b>2 & a+b>1\\ a^2+b^2\leq 2\end{cases}\\ \begin{cases}2a+2b<2 & a+b<1\\ a^2+b^2\leq 2a+2b\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b>1-a\\ a^2+b^2\leq 2\end{cases}\\ \begin{cases}b<1-a\\ (a-1)^2+(b-1)^2\leq 2\end{cases}\end{array}\right.$$

$$a^2-2a+1-1+b^2-2b+1-1\leq 0$$

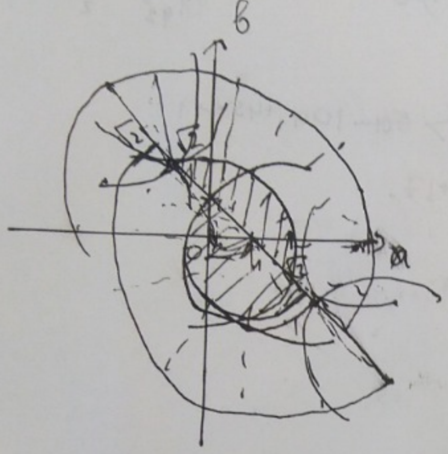
$$(a-1)^2+(b-1)^2\leq(\sqrt{2})^2$$

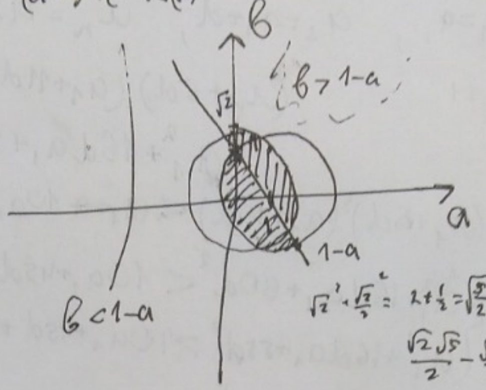
$b=0$

$(a-1)^2=2$

$a-1=\sqrt{2}$ $a=\sqrt{2}-1$

$a-1=-\sqrt{2}$ $a=\sqrt{2}+1$



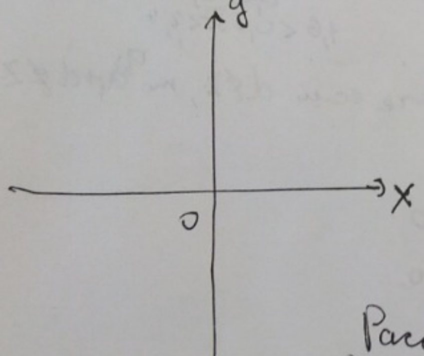


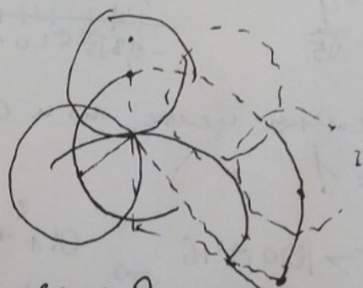
$$\sqrt{2}^2+\frac{\sqrt{2}}{2}^2=2+\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{2}+\sqrt{}$$

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$$

Рассмотрим XOY.

$(x-a)^2+(y-b)^2\leq 2$ – круг с центром в $(a;b)$ и р-м $r=\sqrt{2}$. $\omega(0;\sqrt{2})$.





У нас есть 2 сегмента.

Рассмотрим отдельно один.

Если круг ω будет касаться дуги сегмента, то будет решение ~~часта~~

$(x_A-x_B)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}=$

$=$

$(1;1)\in$ II.

$\text{II}_{2}=$

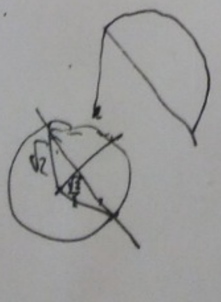
Пересечение $a^2+b^2=2$ с $b=1-a$

$$a^2+(a-1)^2=2.$$

$$a^2+a^2-2a+1=2$$

$$2a^2-2a-1=0$$

$$\frac{D}{4}=1+2=3$$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100157**

ID профиля: **175028**

Вариант 17

часть 2. Вариант 17. 11 класс.

Чистовик. лист 1.

⑤ Пусть $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=a$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=b$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=c$.

Рассмотрим $a\cdot b\cdot c$.

$$a\cdot b\cdot c=\frac{\lg(4x+1)\cdot\lg\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\cdot\lg(5x-1)}{\lg\sqrt{5x-1}\cdot\lg(4x+1)\cdot\lg\left(\frac{x}{2}+2\right)}=4$$ при условии, что a, b и c определены.

1) Пусть $a=b$, $c=a-1$, $c=b-1$.

Тогда $\begin{cases}a^2\cdot(a-1)=4\\ b=a\\ c=a-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=2\\ c=1\end{cases}\Leftrightarrow$

$a^3-a^2-4=0$

$(a-2)(a^2+a+2)=0$

$a=2.$

$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 0 & -4\\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0\end{array}$

$a^2+a+2=0$

$D=1-8<0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)=2\\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=2\\ \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+1=5x-1\\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^2=(4x+1)^2\\ 5x-1=\frac{x}{2}+2\\ \sqrt{5x-1}\neq1\\ 4x+1\neq1\\ \frac{x}{2}+2\neq1\\ 5x-1>0\\ 4x+1>0\\ \frac{x}{2}+2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ \left(\frac{x}{2}+2-4x-1\right)\left(\frac{x}{2}+2+4x+1\right)=0\\ 10x-2=x+4\\ x\neq\frac{2}{\cancel{10}5}\\ x\neq0\\ x\neq-2\\ x>\frac{1}{5}\\ x>-\frac{1}{4}\\ x>-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{2}{7}\\ x=-\frac{2}{3}\end{array}\right.\\ x=\frac{2}{3}\\ x>\frac{1}{5}\\ x\neq\frac{2}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{x\in\varnothing}$$

2) Пусть $a=c$, $b=a-1$, ~~$c=a$~~ $b=c-1$.

$$\begin{cases}a^2(a-1)=4\\ c=a\\ b=a-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ c=2\\ b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ 5x-1=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\\ \left(\frac{x}{2}+2\right)^2=4x+1\\ x>\frac{1}{5}\\ x\neq\frac{2}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ \left[\begin{array}{l}x=10\\ x=2\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=6\\ x=2\end{array}\right.\\ x>\frac{1}{5}\\ x\neq\frac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{x=2.}$$

$5x-1=\frac{1}{4}(x+4)^2$

$20x-4=x^2+8x+16$

$x^2-12x+20=0.$

$\frac{D}{4}=36-20=16$

$x=\frac{6+4}{1}=10.$

$x=6-4=2$

$\frac{1}{4}(x+4)^2=4x+1$

$x^2+8x+16=16x+4$

$x^2-8x+12=0$

$\frac{D}{4}=16-12=4$

$x_{1,2}=4\pm2$

$\left[\begin{array}{l}x=6\\ x=2\end{array}\right.$

$4x+1=\sqrt{5x-1}$

$\begin{cases}(4x+1)^2=5x-1\\ 4x+1\geq0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}16x^2+8x+1=5x-1\\ x\geq-\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}16x^2+3x+2=0\\ x\geq-\frac{1}{4}\end{cases}$

$D=9-8\cdot16$

3) Пусть $b=c$, $a=b-1$, $a=c-1$.

$$\begin{cases}b^2\cdot(b-1)=4\\ c=b\\ a=b-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\ c=2\\ a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2=(4x+1)^2\\ 5x-1=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2\\ 4x+1=\sqrt{5x-1}\\ x>\frac{1}{5}\\ x\neq\frac{2}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{2}{7}\\ x=-\frac{2}{3}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=10\\ x=2\end{array}\right.\\ x\in\varnothing\\ x>\frac{1}{5}\\ x\neq\frac{2}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{x\in\varnothing}$$

Ответ: 2

Чистовик. Лист 1.

④. $\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} НОД(a;b;c)\cdot НОК(a;b;c)=abc=2^{16}\cdot 3^{17} \\ НОД(a;b;c)=6 \end{cases}$

a, b и c состоят из степеней двоек и троек. При этом, т.к. НОД(a;b;c)=6 :
$a \vdots 6$
$b \vdots 6$
$c \vdots 6$

$$\begin{cases} a=2\cdot3\cdot2^{\alpha_1}\cdot3^{\beta_1} \\ b=2\cdot3\cdot2^{\alpha_2}\cdot3^{\beta_2} \\ c=2\cdot3\cdot2^{\alpha_3}\cdot3^{\beta_3} \\ abc=2^{16}\cdot3^{17} \end{cases} \Leftrightarrow\Rightarrow abc=2^3\cdot3^3\cdot2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\cdot3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}=2^{16}\cdot3^{17}, \Leftrightarrow \begin{matrix}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=16-3=\boxed{13} \\ \beta_1+\beta_2+\beta_3=17-3=\boxed{14}\end{matrix}$$

Нужно найти кол-во способов распределить число 13 по 3 слагаемым $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}$
$\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0)$

~~Чтобы~~ Число способов распределить число ~~k~~ n по 2 слагаемым $\overset{(x и y)}{=} n+1$: $\underbrace{\begin{cases}x=n \\ y=0\end{cases}, \begin{cases}x=n-1 \\ y=1\end{cases}, \ldots, \begin{cases}x=1 \\ y=n-1\end{cases}, \begin{cases}x=0 \\ y=n\end{cases}}_{(n+1)\text{ пара}}$

Когда 3 слагаемых:

$x=n$, $y=0$, $z=0$ — 1 способ ; $x=n-1$, $y+z=1$, т.е. нужно распределить число 1 по 2-м ~~слагаемым~~ слагаемым: 2 способа ; $x=n-3$, $y+z=2$ — 3 способа ... $x=1$, $y+z=n-1$ — n способов ; $x=0$, $y+z=n$ — $n+1$ способ

всего : $1+2+3+\ldots+n+n+1=\frac{n+2}{2}(n+1)$ способов.

Число способов распределить 13 по 3 слагаемым α_1, α_2 и α_3:

$A=\frac{13+2}{2}\cdot(13+1)=\frac{15\cdot14}{2}$

Число способов распределить 14 по 3 слагаемым $\beta_1, \beta_2, \beta_3$:

$B=\frac{16\cdot15}{2}$.

При этом на каждый из A случаев приходится по B , т.е.

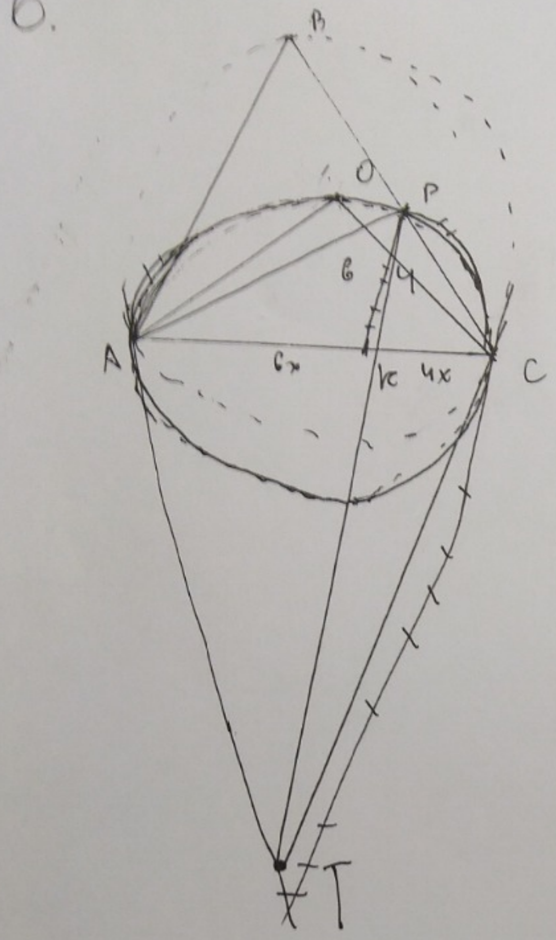
всего : $A\cdot B=\frac{14\cdot15\cdot15\cdot16}{2\cdot2}=105\cdot120=12600$

$$\begin{array}{r} 105 \\ \cdot\ 120 \\ \hline 210 \\ +105\ \ \\ \hline 12600 \end{array}$$

Ответ: 12600.

Чистовик. лист 2.

6.



Пусть AK=6x, тогда KC=4x.
AC=10x.

$$\frac{S_{APK}}{S_{KPC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{6}{4}.$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \frac{AC \cdot CB}{AC \cdot CP} = \frac{CB}{CP}.$$

$$S_{ABC} = 10 \cdot \frac{CB}{CP}.$$

Черновик.

4. (a;b;c) сколько троек. $a, b, c \in N$

$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{13}\cdot 3^{16} \end{cases}$ перемножим. $НОД(a;b;c)\cdot НОК(a;b;c) = a\cdot b\cdot c.$

$a\cdot b\cdot c = 2^{16}\cdot 3^{17}.$

НОД(a;b;c)=6, т.е. $a \vdots 6$, $b \vdots 6$, $c \vdots 6.$

$a = 2\cdot 3\cdot 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}$

$b = 2\cdot 3\cdot 2^{\beta_1}\cdot 3^{\beta_2}$

$c = 2\cdot 3\cdot 2^{\gamma_1}\cdot 3^{\gamma_2}$

$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 = 16-3 = 13$

$\alpha_2+\beta_2+\gamma_2 = 17-3 = 14.$

$\alpha_1=13,\ \alpha_2\ \beta_1=\gamma_1=0$

$\alpha_1=12,\ \beta_1=1,\ \gamma_1=0$

$\beta_1=0,\ \gamma_1=1.$

$\alpha_1=11,\ \beta_1=2,\ \gamma_1=0$

$\beta_1=1\ \ \gamma_1=1$

$\beta_1=0\ \ \gamma_1=2.$

$\begin{cases} 5x-1>0 \\ 4x+1>0 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2}+2\neq 1 \\ 4x+1\neq 1 \\ \sqrt{5x-1}\neq 1 \end{array}\right. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ x>-\frac{1}{4} \\ x>-4 \\ x\neq -2 \\ x\neq 0 \\ x\neq \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$ $x>\frac{1}{5}$, $x\neq\frac{2}{5}$

5. $\overset{a}{\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)}$, $\overset{b}{\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2}$, $\overset{c}{\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)}.$

x-? 2 из них равны, а третье меньше каждого на 1?

$$ab\neq c = \frac{~~\log 4x~~\ \cancel{\lg(4x+1)}\cdot 2\cancel{\lg(\frac{x}{2}+2)^2}\cdot\cancel{\lg(5x-1)}}{\frac{1}{2}\cancel{\lg\sqrt{5x-1}}\cdot\cancel{\lg(4x+1)}\cdot\cancel{\lg(\frac{x}{2}+2)}} = 4.$$

$\begin{cases} 4x+1>0 \\ 5x-1>0 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \left[\begin{array}{l} 4x+1\neq 1 \\ \frac{x}{2}+2\neq 1 \\ \sqrt{5x-1}\neq 1. \end{array}\right. \end{cases}$

$$a\cdot b = \frac{\cancel{\lg(4x+1)}\cdot\lg\left(\frac{x}{2}+2\right)^2}{\lg\sqrt{5x-1}\cdot\cancel{\lg(4x+1)}} = \log_{\sqrt{5x-1}}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 4\log_{5x-1}\left(\frac{x}{2}+2\right)$$

$ab = \frac{4}{c}.$

$x+4-3x-2=0$

$7x=2$

$x=\frac{2}{7}.$

$x+4+3x+2=0$

$9x=-6$

$x=-\frac{6}{9}=-\frac{2}{3}$

Пусть $a=b$, $c=b-1$, $c=a-1.$

$a^2\cdot(a-1)=4 \Leftrightarrow a^3-a^2-4=0.$

	1	-1	0	-4
2	1	1	2	0

~~a=2~~

$(a-2)(a^2+a+2)=0.$

Если $a=c$, $b=a-1$, $b=c-1.$

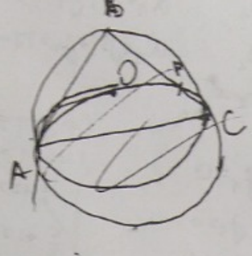
$a^2\cdot(a-1)=4$

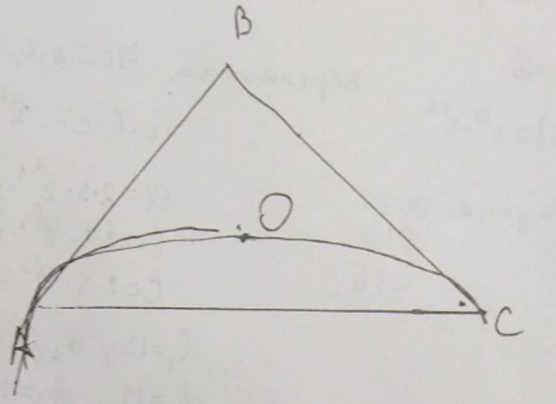
$\begin{array}{l} a=2 \\ c=2 \\ b=1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x=2 \\ 5x-1=\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \end{array}$

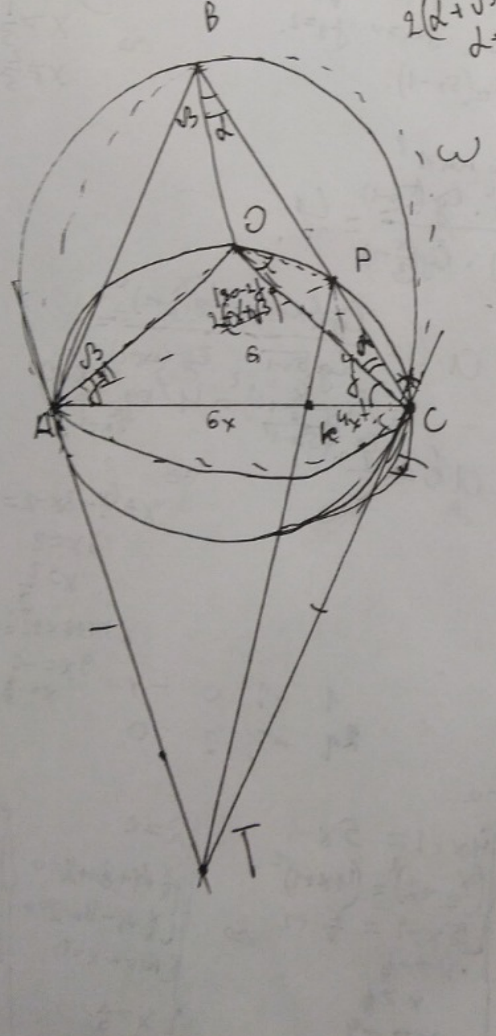
$\begin{cases} a=2 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} 4x+1=5x-1 \\ \left[\begin{array}{l} \left(\frac{x}{2}+2\right)^2=(4x+1)^2 \\ 5x-1=\frac{x}{2}+2 \end{array}\right. \\ x>-\frac{1}{4} \\ x>\frac{1}{5} \\ x>-4 \\ x\neq 0 \\ x\neq -2 \\ x\neq\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \frac{x}{2}+4+8x+2=0 \\ \frac{x}{2}+4-8x-2=0 \\ 10x-x=6 \end{array}\right. \\ x>\frac{1}{5} \\ ~~x\neq 0~~ \\ x\neq\frac{2}{3} \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\frac{8}{3} \\ x=\frac{2}{7} \\ x=\frac{2}{3} \end{array}\right. \\ x>\frac{1}{5} \\ x\neq\frac{2}{3} \end{cases}$

Черновик.

6.







$2(\alpha+\beta+\gamma)=180$

$\alpha+\beta+\gamma=90$

$\gamma=90-\alpha+\beta$

AT и TC – касат. к ω.

TP∩AC=K.

$S_{APK}=6$, CPK=4.

а) $S_{ABC}=?$

б) AC=?, ~~co~~ $\angle ABC=\operatorname{arctg}\frac{7}{3}$.

$\angle OAC=\angle OCA$ (т.к. OA=OC.

~~S_{APK}~~ $= S_{APC}=10$ (= $S_{APK}+S_{PKC}$.

~~$S_{APC}=\frac{1}{2}$~~ Пусть $\rho(P;AC)=h$.

$$\left.\begin{aligned}S_{APC}&=\tfrac{1}{2}h\cdot AC\\ S_{APK}&=\tfrac{1}{2}h\cdot AK\\ S_{PKC}&=\tfrac{1}{2}h\cdot KC\end{aligned}\right\}\ \frac{AK}{KC}=\frac{6}{4}.$$

Черновик.

4. $abc = 2^{16} \cdot 3^{17}$.

$a \vdots 6$, $b \vdots 6$, $c \vdots 6$ $\to$ $\begin{cases} a = 2 \cdot 3 \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \\ b = 2 \cdot 3 \cdot 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \\ c = 2 \cdot 3 \cdot 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $abc = 2^{3+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \cdot 3^{3+\beta_1+\beta_2+\beta_3} = 2^{16} \cdot 3^{17}$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 2 \cdot 3$

т.е. $\begin{cases} 3+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 16 \\ 3+\beta_1+\beta_2+\beta_3 = 17 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 13$

$\beta_1+\beta_2+\beta_3 = 14$.

Найти кол-во способов распредилить 13 двоек среди 3 мест.

~~Расс~~ Попробуем сначала распределить n двоек на 2 места. X и Y.

~~□ □~~ 1 2 ~~□ □~~, □

$\begin{cases} x = n \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = n-1 \\ y = 1 \end{cases}$, … $\begin{cases} x = 1 \\ y = n-1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ y = n \end{cases}$ всего $n+1$ пара (~~можно~~ x изменялся от n до 0 всего n+1.)

Если $\alpha_1 = 13$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$ — 1 способ

$\alpha_1 = 12$ ~~$\alpha_2 =$~~ 0 среди α_2 и α_3 надо ~~$\alpha_3 =$~~ распределить 1 двойку, т.е. 2 способа

$\alpha_1 = 11$, $\alpha_2+\alpha_3 = 2$ — 3 способа.

$1+2+3+4+\ldots+14 = \frac{1+14}{2} \cdot 14 = 15 \cdot 7 = 105$.

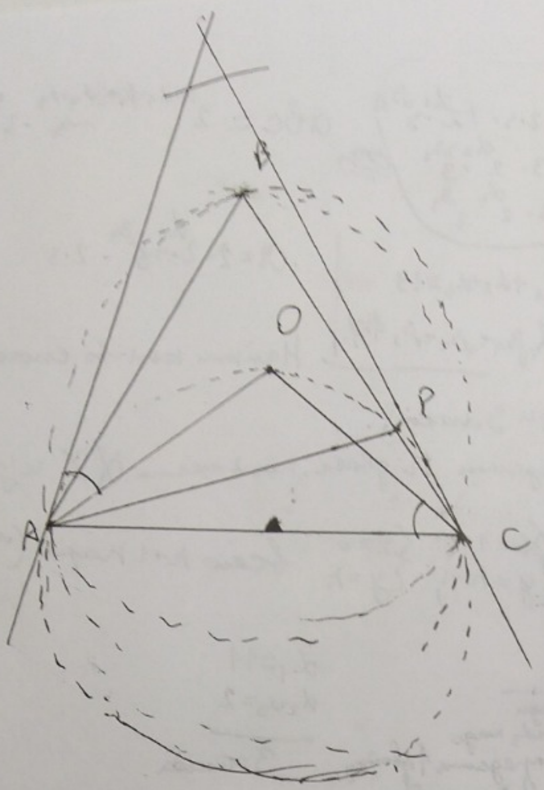
Формула: $\frac{1+(n+1)}{2} \cdot (n+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$.

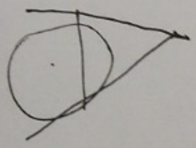
Для троек:

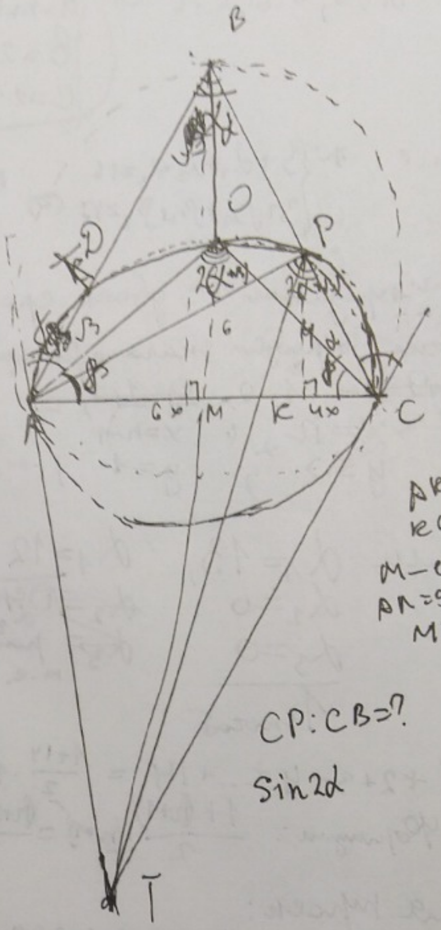
~~Всего 14~~ распределяем 14 троек, т.е. всего способов $\frac{15 \cdot 16}{2} = 15 \cdot 8 = 120$.

~~При этом для каждого распределения двоек~~

Всего чисел $105 \cdot 120$







AK=6x
KC=4x

M–сер.
AM=5x
MK=x
KC=4x

CP:CB=?

Sin2α