Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100101**

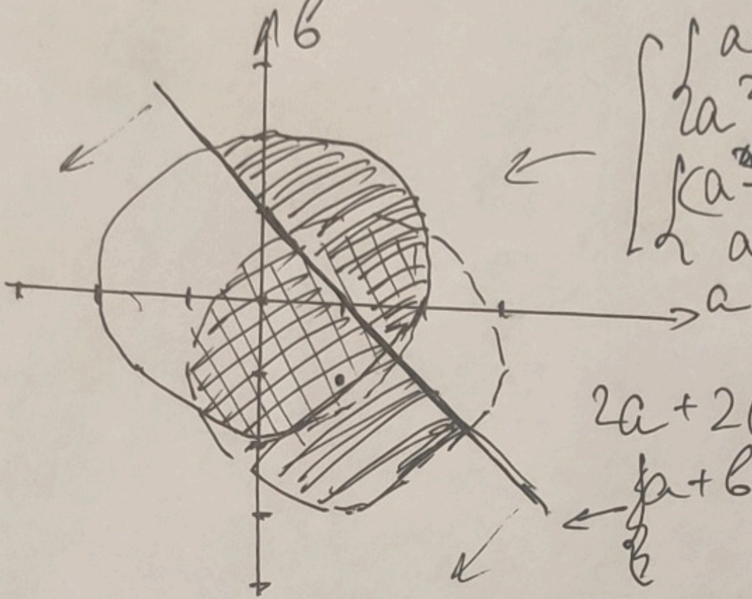
ID профиля: **210635**

Вариант 17

№3 (Чистовик)

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 2 & (2)\\ a^2+b^2 \le \min(2a+2b, 2) & (1)\end{cases}$$

(1)

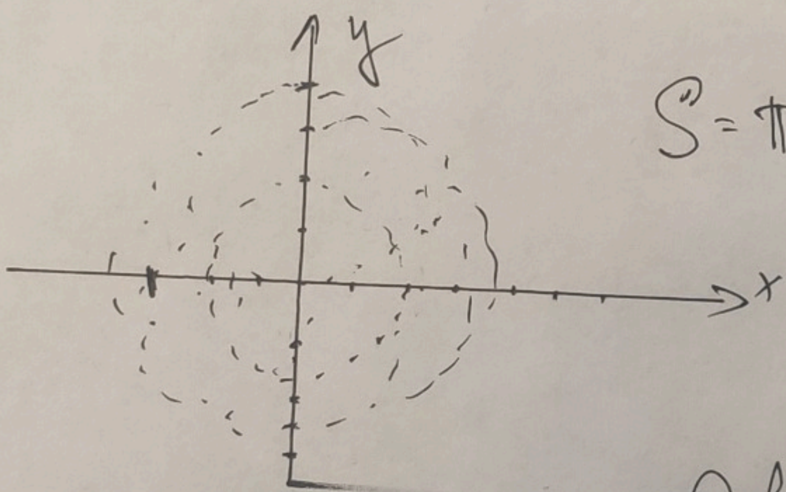


$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+b \ge 1\\ a^2+b^2 \le 2\end{cases}\\ \begin{cases}(a-1)^2+(b-1)^2 \le 2\\ a+b \le 1\end{cases}\end{array}\right.$$

$2a+2b \le 2$

$a+b \le 1$

(2)



$S = \pi r^2 = 16\pi$

Ответ: 16π

4

c2100101 (U210635 M1297087)

№1 (Чистовик)

$a_1, \dots a_n \in \mathbb{Z}$, $d > 0$. Т.к все целые, то d тоже целое

$$S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 10a_1 + 45d$$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+11d) > S+1 \\ (a_1+6d)(a_1+10d) < S+17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16da_1 + 55d^2 > 10a_1 + 45d + 1 \\ a_1^2 + 16da_1 + 60d^2 < 10a_1 + 45d + 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 2a_1(8d-5) + 55d^2 - 45d - 1 > 0 \\ a_1^2 + 2a_1(8d-5) + 60d^2 - 45d - 17 < 0 \quad | \cdot (-1) \end{cases} +$$

$$55d^2 - 45d - 1 - 60d^2 + 45d + 17 > 0$$

$$-5d^2 + 16 > 0$$

$$d^2 < \frac{16}{5}$$

$$|d| < \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$d \in \left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}; \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$$

~~$\sqrt{5} \in (2;3)$~~ ~~$\frac{4\sqrt{5}}{5} \in (1;2)$~~

$\sqrt{5} \in (2;3)$

$4\sqrt{5} \in (8;12)$

$\frac{4\sqrt{5}}{5} \in \left(\frac{8}{5}; \frac{12}{5}\right)$

целые $d = -1; 0; 1$, $d > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow d = 1$

Подставим в систему нер-в

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 - 2 < 0 \end{cases} ; \begin{cases} (a+3)^2 > 0 \\ a \in (-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11}) \end{cases} ; \begin{cases} a \neq -3 \\ a \in -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0 \end{cases}$$

$D_1 = 9 + 2 = 11$

$a_n = \frac{-3 \pm \sqrt{11}}{1}$

$\sqrt{11} \in (3;4)$

$-3+\sqrt{11} \in (0;1)$

$-\sqrt{11} \in (-4;-3)$

$-3-\sqrt{11} \in (-7;-6)$

$-3-\sqrt{11}$ $\quad -3+\sqrt{11}$ $\quad a_1$

$-7 \quad -6 \quad -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1$

$a_1 = -6; -5; -4; -2; -1; 0$

21100101 (U210635 M1297087)

лист 1.

Ответ: $-6; -5; -4; -2; -1; 0$

(Чистовик) №2

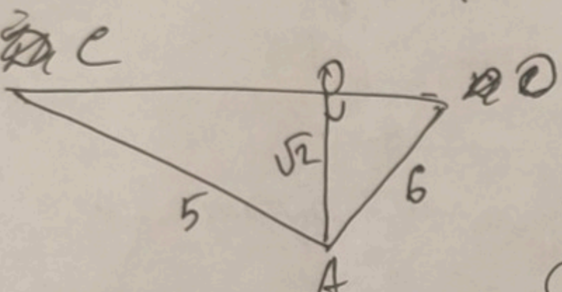
4. $CD \perp (AOB) \Rightarrow CD \perp OB$.

$\triangle ACD = \triangle BCD$ (по 3-м сторонам).

BO и AO - перпендикуляры у равных углов равных треугольников $\Rightarrow AO = BO$ (все элементы равны)

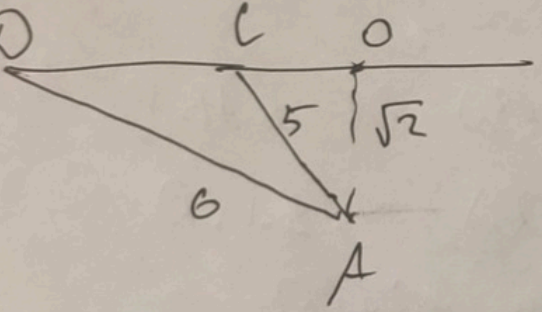
5 $\begin{cases} AO^2 + BO^2 = 4 \\ AO = BO \end{cases} \Rightarrow AO = BO = \sqrt{2}$

6 в (ACD):



~~Если~~ Если высота лежит внутри $\triangle ACD$ ($\angle A$ - острый), то $CD = OD + OC = \sqrt{33} + \sqrt{23}$

(т.к. $OD = \sqrt{AD^2 - AO^2}$, $OC = \sqrt{AC^2 - AO^2}$



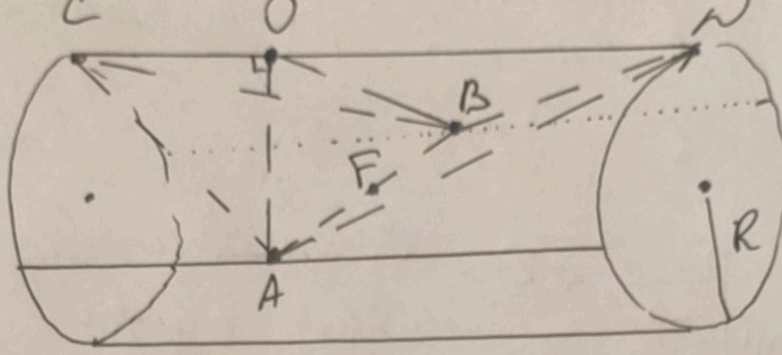
Иначе $CD = OD - OC =$
$= \sqrt{33} - \sqrt{23}$

Ответ: $\sqrt{33} + \sqrt{23}$;
$\sqrt{33} - \sqrt{23}$.

(Чистовик)

Дано
ABCD - тетраэдр
AB = 2
AC = CB = 5
AD = BD = 6
вершины ∈ боковой пов-ти цилиндра
R - минимален
Найти
CD = ?

Решение: №2
ДП: $AO \perp CD$, т. $O \in CD$
F - сер. AB



1. ~~Т.к. CD ∥ оси, то ограничим цилиндр~~

1. F - сер AB $\Rightarrow$ в $\triangle ABC$; CF - медиана, бис-са и высота $\Rightarrow$

$\Rightarrow CF \perp AB$

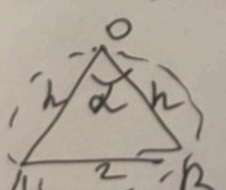
Аналогично в $\triangle ABD$: $DF \perp AB$ | $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB \perp (CFD) \Rightarrow AB \perp CD$

2. Из доп. построения: $AO \perp CD$;
из 1: $AB \perp CD$ | $\Rightarrow CD \perp (AOB)$

3. Т.к. CD ∥ оси, то $CD \perp$ основаниям $\Rightarrow$

$\Rightarrow (AOB) \parallel$ основаниям $\Rightarrow$ сечение пл-ю ($\triangle AOB$) цилиндра - ~~окружно~~ круг, равный основанию. $\Rightarrow$ R - радиус описанной вокруг $\triangle AOB$ окр-ти (все точки ∈ поверхности цилиндра). Тогда из теоремы синусов:



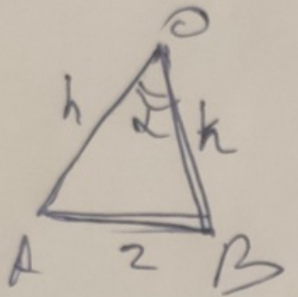
$$\frac{AB}{\sin\angle BOA} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}$$ - минимален при $\sin\alpha = 1 \Rightarrow$

21100101 (U210635 M1297087)

$\Rightarrow \angle BOA = 90°$, AB - диаметр $\Rightarrow$ ~~R~~ $AO^2 + BO^2 = 4$ $\rightarrow$

~~$AO = \sqrt{2}$~~

окружность, описанная вокруг ΔAOB –
р-ть основания, Тогда ~~радиус цилиндр~~ $= R =$



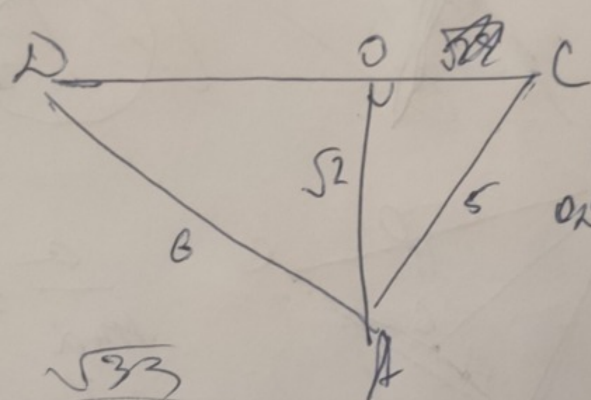
$= \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}$ – минимален

при $\sin\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 90°$

$\Rightarrow h^2 + h^2 = 4$

$h = \sqrt{2}$

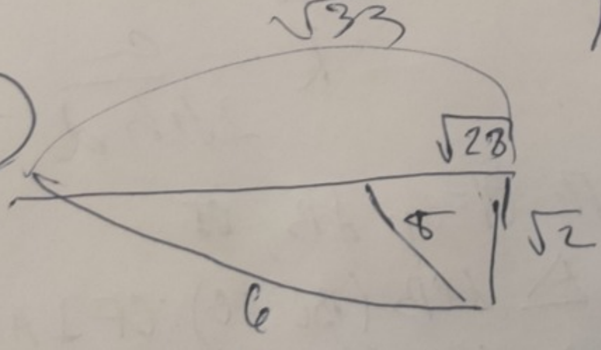
1



$OC = \sqrt{25-2} = \sqrt{23}$

$OD = \sqrt{36-2} = \sqrt{33}$

2



$a_1, \dots a_{12} \in \mathbb{Z}$ Черновик

$S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{2a_1 + d}{2} \cdot 10 = 10a_1 + 5d$

$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+11d) > S+1 \\ (a_1+6d)(a_1+10d) < S+17 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 5da_1 + 11da_1 + 55d^2 > 10a_1 + 5d + 1 \\ a_1^2 + 6da_1 + 10da_1 + 60d^2 < 10a_1 + 5d + 17 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 2a_1(8d - 5) + 55d^2 - 5d - 1 > 0 \\ a_1^2 + 2a_1(8d-5) + 60d^2 - 5d - 17 \leq 0 \end{cases}$

$D_1 = 64d^2 - 80d + 25 - 55d^2 + 5d + 1 =$

$= 9d^2 - 75d + 26$

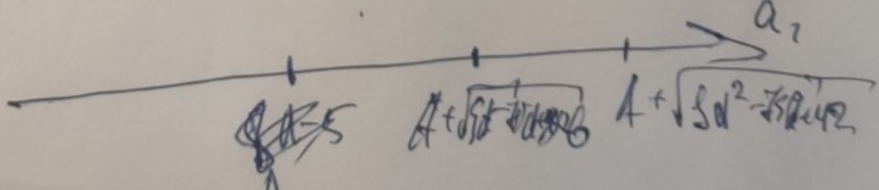
$a_1 = \frac{8d - 5 \pm \sqrt{9d^2 - 75d + 26}}{}$

т.к. $d > 0$, то $8d - 5 + \sqrt{9d^2 - 75d + 26} > \dots$

$D_1 = 64d^2 - 80d + 25 - 60d^2 + 5d + 17 =$

$= 4d^2 - 75d + 42$

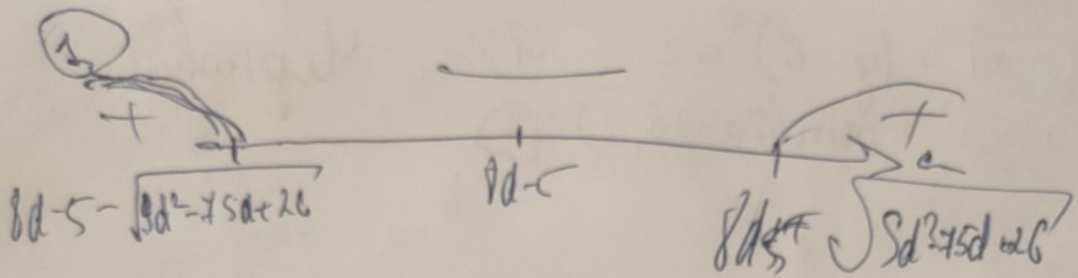
$a_1 = \frac{8d - 5 \pm \sqrt{4d^2 - 75d + 42}}{}$

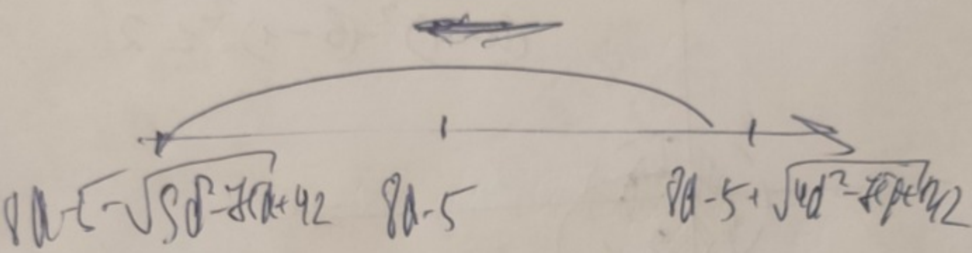


$64d^2 - 80d + 25 - 55d^2 + 45d + 1 =$

$= 9d^2 - 45d + 26 = 0$

$D = 45 \cdot 45 - 264 \cdot 3 =$





тогда решения будут при пересечении этих двух множеств, т. е.

$\cancel{8d-5} \quad \sqrt{4d^2-75d+42} > \sqrt{5d^2-75d+26}$

$4d^2-75d+42 > 9d^2-75d+26$

$5d^2 < 16$

$|d| < \frac{4}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{5} > 2 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{5}} < 2 \Rightarrow d = \pm 1, 0$

Проверим: 0 - подходит
1 - не подходит
-1 - подходит

~~$D_1 = 9+$~~

Часть 2

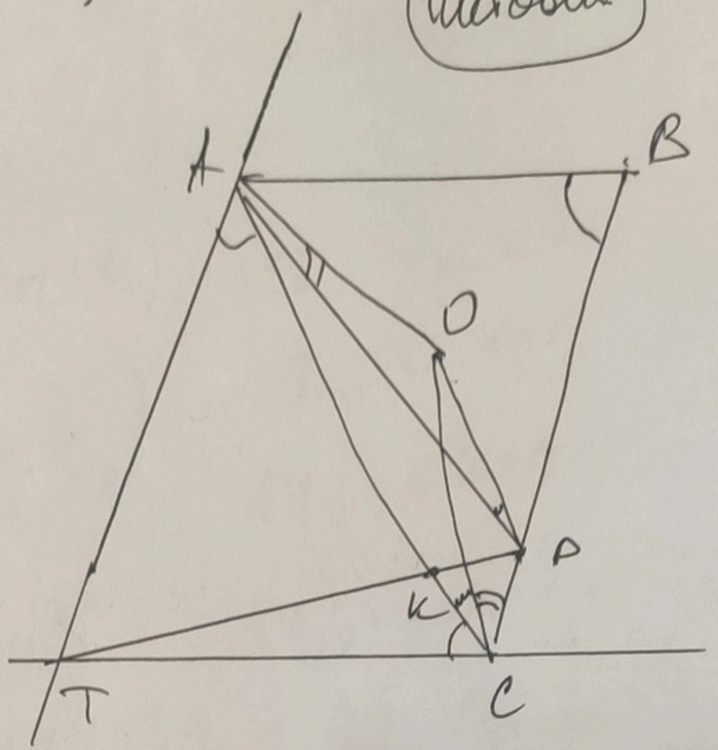
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100101**

ID профиля: **210635**

Вариант 17

№6 Чистовик



Дано
$\triangle ABC$
окр $(O; OA)$ – описана вокруг ABC
окр. Ψ описана вокруг $AOPC$, $P \in BC$
CT, AT – касательные
$TP \cap AC = K$
$S_{CPK} = 4$
$S_{APK} = 6$
Найти
$S_{ABC} = ?$

1. $\angle TCA = \angle TAC = \angle ABC = \frac{1}{2}\smile AC$
(углы между хордой и касат. и впис. угол)

2 Т.к. $AOPC$ – вписан, то углы, опирающиеся на одни дуги равны:
$\angle POC = \angle PAC$
$\angle AOC = \angle APC$
$\angle OPA = \angle OCA$
$\boxed{\angle OCP = \angle PAO}$
$\Rightarrow \angle KPC = \angle ABC$

2 $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{\frac{PC}{BC}} = \left(\frac{CK}{AC}\right)^2 = \frac{S_{KPC}}{S_{ABC}}$

2. $\triangle APC$ и $\triangle KPC$ имеют общую высоту из P на $AC \Rightarrow \frac{CK}{AC} = \frac{S_{KPC}}{S_{KPC}+S_{APK}} = 0{,}4$

3 $S_{ABC} = \frac{S_{KPC}}{(0{,}4)^2} = \frac{4\cdot 10\cdot 10}{4\cdot 4} = 25$

Ответ: а) 25

лист 3

Чистовик

1) $(3^1; 3^{16}; 3^k)$ 16 возможных k

2) $(3^{16}; 3^1; 3^k)$ 16

3) $(3^1; 3^k; 3^{16})$ 15, т.к. $k=16$ уже было в 1

4) $(3^{16}; 3^k; 3^1)$ 15, т.к. $k=1$ уже было во 2

5) $(3^k; 3^1; 3^{16})$ 14, т.к. $k=1; 16$, уже было в 4 и

6) $(3^k; 3^{16}; 3^1)$ 14, т.к. $k=1; 16$, уже было в 3 и

всего: $(16+14+15)2 = 90$ вариантов

Аналогично для расстановок двоек

всего: $(15+14+13)2 = 78$ вариантов

Всего троек: $90 \cdot 78 = 7020$

Ответ: 7020.

лист 2

№4 Чистовик

НОК$(a; b; c) =$ ~~в~~ $2^{15}\cdot 3^{16}$

НОД$(a; b; c) =$ ~~$2^{15}\cdot 2^{16}$~~ 6

1. Т.к. НОД$(a; b; c) = 6$, то представим числа a, b, c как:

$a = 2^x \cdot 3^k \cdot 6 \cdot ...$;

$b = 2^y \cdot 3^p \cdot 6 \cdot ...$;

$c = 2^z \cdot 3^d \cdot 6 \cdot ...$;

(разложим на множители). Кроме того, т.к. НОК$(a; b; c) = 2^{15}\cdot 3^{16}$, то кроме двоек и троек других множителей нет.

Очевидно, что если ~~прибавить~~ $k > 0$, $p > 0$, $d > 0$, то НОД$(a; b; c) \neq 6$. Тогда хотя бы одно число должно иметь только одну тройку среди множителей. Кроме того, НОК$(a; b; c) = 2^{15}\cdot 3^{16}$.

То есть если $\begin{cases} k < 16 \\ p < 16 \\ d < 16 \end{cases}$, то НОК$(a; b; c) \neq 2^{15}\cdot 3^{16}$.

(показатель степени тройки был бы меньше 16, или же больше, если $\left[\begin{array}{l} k > 16 \\ p > 16 \\ d > 16 \end{array}\right.$. Тогда хотя бы одно число должно иметь 16 троек в множителе.

Тогда у нас есть 2 числа, множители (тройки) которых мы знаем. Тройки ~~других~~ третьего числа могут быть ~~расстановок троек~~ от 1 до 16. Тогда ~~всего $3!\cdot 16$~~ ~~$3\cdot 16 = 48$~~ кол-во показатель третьего числа

~~по множителям~~ ~~кол-во перестановок других чисел по трем местам~~

~~Но существует~~ 6 повторений: $(3^1; 3^{16}; 3^k)$, $(3^1; 3^k; 3^{16})$, $(3^k; 3^1; 3^{16})$, $k = 1; 16$

след. стр

Лист 1

№5

$\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$ $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$

ОДЗ
$$\begin{cases} 5x-1 \neq 1 \\ 5x-1>0 \\ \frac{x}{2}+2>0 \\ \frac{x}{2}+2 \neq 1 \\ 4x+1>0 \\ 4x-1 \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 0,4 \\ x>0,2 \\ x>-4 \\ x \neq -1 \\ x>-0,25 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

~~$x \in (0,2)\cup$~~

~~$x \in (0;0,2)\cup$~~

$x \in (0,2;0,4)\cup(0,$

бозможно при паре равных чисел

$$\left[\begin{array}{l} \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) \\ \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) \\ \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \end{array}\right.$$

$\cancel{2\log_{5x-1}(4x+1)} = \frac{1}{\log_{5x-1}\frac{x}{2}+2}$

$4x+1 = 5x-1$

$x = 2$

$\cancel{4x+1 = \frac{x}{2}+2}$

$\cancel{8x+2 = x+4}$

$\cancel{7x =}$

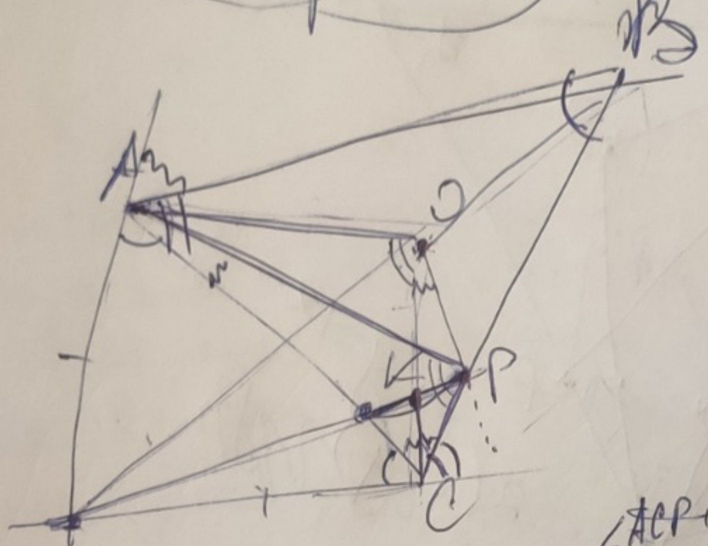
x

черновик

Черновик

а) S_{ABC} - ?

б) AC - ?, $\angle ABC$



$S_{APK} = 6$

$S_{CPK} = 4$

$\frac{CK}{AK} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

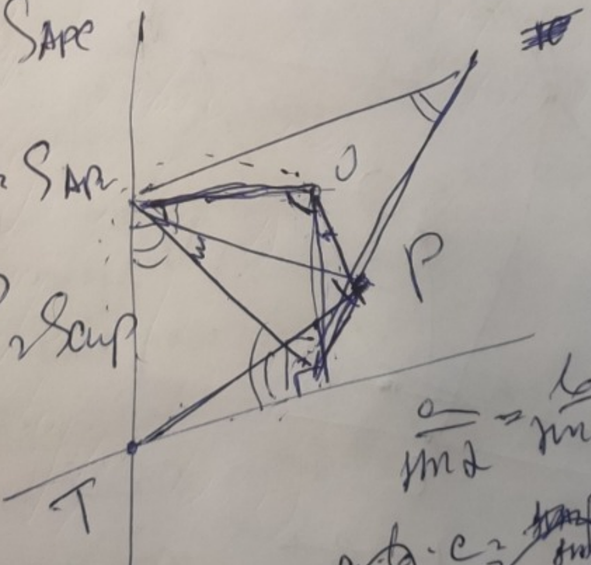
~~$\angle ACP + \angle AOP = 180°$~~

$\angle ABC = \angle ACP = \angle CAP = \frac{1}{2} AC$

$\frac{AP \cdot PC \cdot AC}{20} = S_{APC}$

$\frac{AP \cdot PK \cdot AK}{12} = S_{APK}$

$\frac{PC \cdot CK \cdot KP}{8} = S_{CKP}$



$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

$\frac{a \cdot b \cdot c}{2R} = \frac{b \sin\beta \cdot c \sin\alpha}{\sin\alpha \cdot a}$

$S = a \cdot c \cdot \sin\beta = \frac{bac}{2R}$

21100101 (U210635 M1297088)

№4 Черновик

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=6 \\ НОК(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16} \end{cases}$$

a	b	c
$2\cdot 3\ldots$	$2\cdot 3\ldots$	$2\cdot 3\ldots$

1. Рассмотрим распределение 13-ти троек: очевидно, что все 3 числа не могут получить их по тройке, тогда хотя бы одно из них не должно иметь ~~более~~ 2+ троек. Тогда кол-во возможных распределений 13-ти троек среди двух других чисел: $C_{13}^2 = \frac{13!}{11!\cdot 2!} = 6\cdot 13$

~~Это возможно~~ Троек не иметь может три числа (a, b и c), тогда для каждого варианта будет 78 расстановок. ~~вет.~~ То есть всего расстановок троек: $78\cdot 3 = 234$

1. Рассмотрим распределение ~~троек~~ ~~ставки~~ троек: в нас 16-ти троек, тогда 1 число должно иметь 16 троек, а другое одну. Таких расстановок $\frac{3!}{2!}=3$. Для каждой расстановки этих двух чисел ~~есть~~ ~~его~~ третье число может иметь любое кол-во троек (от 1 до 16-ти). То есть всего $3\cdot 16 = 48$ расстановок троек в числах.

$3^1 \cdot 3^{16} \cdot 3$

$3^1 \cdot 3^{10} \cdot 3^{16}$

Аналогичными рассуждениями кол-во расстановок двоек $3\cdot 15 = 45$

Всего $45\cdot 48 = 2160$ вариант

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times\ 48 \\ \hline 360 \\ 180 \end{array}$$