Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007655**

ID профиля: **843551**

Вариант 9

 Чистовик, математика 10 кл

N 1

Решение: соединим отрезки ~~PM~~ DP и DT.

Поскольку углы $\angle DPB$ и $\angle DTB$ равны $90°$ (опир. на BD), то треугольники $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ - прямоугольные, к тому же $AM = MD = PM$ и $DN = NC = TN$ (медиана в прям. тр.)

Обозначим угол $\angle BCA = \alpha$. Тогда угол TNA равен 2α (свойства смежных углов), и в силу параллельности PM и TN, угол $\angle PMD$ равен $180 - 2\alpha$ (внутр. односторонние углы при пар. прямых). Поскольку $PM = MD$, то $\angle PDM = \alpha$, и $\angle TDC = 90 - \alpha$. Откуда следует, что $\angle PDT = 90°$.

Но четырехугольник $PBTD$ вписанный, поэтому $\angle ABC = 90°$.

а) $90°$.

б) Из первого пункта следует, что четырехугольник $PBTD$ - квадрат, с диагональю 2, откуда $PB = BT = TD = DP = \sqrt{2}$. Из условия следует, что $AC = 6$ (поскольку, $PM = AM = MD = \frac{1}{2}$ и $DN = NC = TN = \frac{5}{2}$).

Обозначим $AP = x$, $CT = y$. Из предыдущего решения, поскольку $\angle PDA = \angle BCA = \alpha$, то $PD \parallel BC$, откуда подобие:

$\triangle APD \sim \triangle ABC$:

$$\frac{x}{x+\sqrt{2}} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{5};$$ Аналогично, $\triangle DTC \sim \triangle ABC$:

то ~~$y=$~~ $\dfrac{y}{y+\cancel{\ldots}\sqrt{2}} = \dfrac{5}{6} \Rightarrow y = \cancel{\ldots}\,5\sqrt{2}$

Значит $AB = AP + PB = \cancel{\ldots} + \cancel{\ldots} = \cancel{\ldots}\,\dfrac{\sqrt{2}}{5} + \sqrt{2} = \dfrac{6}{5}\sqrt{2}$

$BC = BT + TC = \cancel{\ldots} + \cancel{\ldots} = \cancel{\ldots}\,\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

Откуда площадь ABC:

~~$S = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC = \frac{1}{2}\cdot\frac{6^3}{5\sqrt{2}}\cdot\frac{6}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{18}{10}}$~~

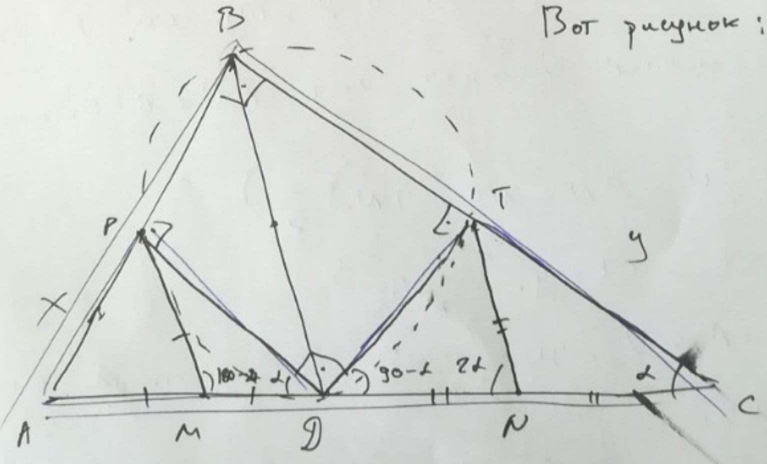
~~Ответ: а) $\angle ABC = 90^\circ$~~
~~б) $\frac{18}{10}$~~

$$S = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC = \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2} = \boxed{\frac{6}{5}}$$

Ответ: а) $\angle ABC = 90^\circ$

б) $S_{ABC} = \dfrac{6}{5}$

Вот рисунок:



страница - 3 Чистовик, матем. 10 кл

№ 2

Обозначим $a = \sqrt{x+4}$, $b = \sqrt{6-x}$, а перепишем уравнение: $a - b + 4 = 2ab \Rightarrow$

$\Rightarrow a - b = 2ab - 4$

Возведем в квадрат учитывая неотрицательность: (*)

$$a^2 - 2ab + b^2 = 4a^2b^2 - 16ab + 16$$

Поскольку $a^2 + b^2 = 10$, то перепишем как:

$$4a^2b^2 - 14ab + 6 = 0 \Rightarrow 2a^2b^2 - 7ab + 3 = 0.$$

Положим $t = ab \geq 0$

$$2t^2 - 7t + 3 = 0$$

$$D = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 \Rightarrow t = \frac{7 \pm 5}{4} = \frac{1}{2}; 3$$

Откуда $\left[\begin{array}{l} ab = \frac{1}{2} \\ ab = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{-x^2+2x+24} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{-x^2+2x+24} = 3 \end{array}\right. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} -x^2 + 2x + 24 = \frac{1}{4} & (1) \\ -x^2 + 2x + 24 = 9 & (2) \end{array}\right.$$

Решая каждую из уравнений получим:

(1) $x = 1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{11}$

(2) $\left[\begin{array}{l} x = -3; \\ x = 5 \end{array}\right. \Rightarrow$

Учитывая ОДЗ и (*), нам подходят корни

Ответ: $x = 5$

 Чистовик

Приложение к задаче №2:

*, имеется в виду, что $\sqrt{x+4}-\sqrt{-x+6}\geq 0$

решая которую $\underline{x\geq 1}$**. А правая часть решается

так же. $2\sqrt{24+2x-x^2}-4\geq 0$

$$\Downarrow$$

$$24+2x-x^2\geq 4$$

$$x^2-2x-20\geq 0$$

$$D=4-4\cdot(-20)=84$$

$$x=\frac{2\pm2\sqrt{21}}{2}=1\pm\sqrt{21}\ \to\ x\in[1-\sqrt{21};\ 1+\sqrt{21}]$$ ***

Объедения (**) и (***) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x\in\left[1;\ 1+\sqrt{21}\right]$$ (****)

Объедения (****) с ОДЗ:

$$x\in[1;\ 1+\sqrt{21}]$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007655**

ID профиля: **843551**

Вариант 9

Чистовик, матем. 10кл

Страница 1)

N 1

Решить:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

Решение:

Пусть $a = x^2+y^2$, $b = x^2y^2$. Тогда перепишем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{a} + b = 2 \\ a^2+b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{2-b} \\ \dfrac{4}{b^2-4b+4} + b = 5 \end{cases}$$

Приведём к общему знаменателю 2ое уравнение системы, и перепишем как:

$$\frac{b^3-4b^2+4b+4}{b^2-4b+4} = 5 \Rightarrow b^3-4b^2+4b+4 = 5b^2-20b+20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^3-9b^2+24b-16=0.$$

Нетрудно видеть, что уравнение обращается в ноль при $b=1$, а значит можем переписать его:

$$(b-1)(b^2-8b+16) = (b-1)(b-4)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=4 \end{array}\right. \Rightarrow b=1,\ a=2.$$ ($b=4$ не подходит, поскольку $a \leq 0$)

211007655 (U843551 M1278269)

Отсюда:

$$\begin{cases} x^2 y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ y = -\frac{1}{x} \end{array} \right. \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Чистовик, матем. 10 кл

~~Нетрудно видеть, что~~ графиком ~~первого уравнения является двуе гипербол $y = \frac{1}{x}$ и $y = -\frac{1}{x}$.~~

~~А второе уравнение задаёт окружность с центром в начале координат, радиуса $\sqrt{2}$. Поскольку части гипербол симметричны относительно обеих осей, то достаточно решить систему:~~

$$\begin{cases} y^2 = \frac{1}{x^2} \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{1}{x^2} \\ x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 \end{cases}$$

Заметим, что второе уравнение выполняется только при $x = \pm 1$, поскольку сумма двух обратных не меньше 2х. Откуда y (1; -1) (1; 1); (-1; 1) (-1; -1).

Итак ответ: (1; 1); (1; -1); (-1; 1); (-1; -1)

Страница - 2

Страница-3 | Математика, 10 кл.

N 2

Найдём количество внутренних узлов.

Рассмотрим вертикальные отрезки равные стороне квадрата. Их всего 60. И на каждой из них 2 узла границы, ~~тогда~~ Аналогично, горизонтальных отрезков равных стороне квадрата - 60, и на каждом 2 узла границ. Тогда всего внутренних узлов:

$$60\cdot(60-2)+60\cdot(60-2)=120\cdot(60-2)=6960.$$

Обозначим 2 выборочных узла с координатами $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$.

По условию, требуется $x_2-x_1\neq 0$ или $y_2-y_1\neq 0$.

1) Рассмотрим случай, когда один из узлов находится на одной из прямых $y=x$ или $y=59-x$.

~~Заметим, что у квадратов с нечетной длиной стороной, узлов пересекаемых главной диагональю на 1 меньше чем у квадратов с четной длиной стороны, (этот 1 узел попадает внутрь центрального квадратика), и составляет~~

Поскольку на главной диагонали 59 клеток, то узлов пересекаемых одной из прямых $y=x$ или $y=59-x$ $\boxed{-58}$.

Страница - 4 | Матем., 10 кл

А значит точку M можем выбрать $2\cdot 58$ способом.

А точку N ~~n~~ $6960 - 2\cdot 57 - 2\cdot 58 =$
$= 6730.$

~~Всего~~ Тогда: всего: $2\cdot 58\cdot 6730 = 780680$

2) ~~Случай~~ - 2. Если обе точки лежат на прямых $y = x$ или $y = 59 - x$.

Всего узлов на этих прямых $2\cdot 58 = 116$. (Заметим, что, у квадрата с нечетной длиной стороны, две диагонали пересекаются внутри центрального квадрата, поэтому единицу не отнимаем.)

~~Кол-во способов выбрать два~~ При этом, если мы расположим 1 узел, то для второго ~~останет~~ будут недоступны два узла, таких, что соединив их отрезком, получим отрезок параллельный одной из осей. Поэтому кол-во способов выбрать 2 узла ~~$58\cdot(56-3)$~~ $\frac{116\cdot(116-3)}{2} = 6554$

И всего способов:
$780680 + 6554 = 787234$

Ответ: 787234.

Страница - 5 | Математика, 10 кл.

Задача N 3

Решение:

Поскольку: $\angle BDA = \angle DBC = 60°$ и $\angle CAD = \angle ACB = 60°$, то прямые BC и AD параллельны, и поскольку $\Delta BOC \sim \Delta AOD$, то четырехугольник ABCD - это равнобокая трапеция.

Поскольку T симметрична O относительно середины стороны CD, то OCTD - параллелограм. (диагонали OT и DC делятся пополам в точке пересечения.)

Угол $\angle AOC = 60°$, тогда $\angle COD = 120°$. Но в параллелограме противоположные углы равны, а значит $\angle CTD = 120°$.

Теперь, заметим, что четырехугольники ACTD и BCTD - вписанные ($\angle CAD + \angle CTD = 180°$ и $\angle CBD + \angle CTD = 180°$).

А значит 5 точек ABCDT лежат на одной окружности, описанной около трапеции ABCD. Тогда угол $\angle BTA = \angle BDA = 60°$ (опир. на одну хорду AB) и в силу параллельности OD и CT, угол $\angle ACT = \angle AOD = 60°$.

~~А значит треугольник~~ Но $\angle ACT = \angle ABT = 60°$ (опир. на ~~одну~~ хорду AT). А значит ΔABT - правильный.

Страница -6 Математика, 10 кл.

$BC = BO = OC = 3$ и $AD = AO = OD = 7$.

Найдём сторону BT.

Поскольку BCTD - параллелограм, то $OD = CT = 7$.

Тогда по теореме косинусов в треугольнике $\triangle BCT$:

$$BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2 \cdot BC \cdot CT \cdot \cos\angle BCT.$$

угол $\angle BCT = \angle BCA + \angle ACT = \angle BCA + \angle AOD = 120°$.

Поэтому

$$BT^2 = 9 + 49 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 58 + 21 = 79.$$

Откуда $BT = \sqrt{79}$.

И площадь ABT $\Rightarrow S_{ABT} = \frac{79 \cdot \sqrt{3}}{4}$

Найдем площадь ABCD. Продлим CT до пересечения в точке K с AD. Тогда, поскольку $BD \parallel CT \Rightarrow DK = BC = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow AK = 10$
и $BD = CK = BO + OD = 3 + 7 = 10$, и $\angle ACT = 60°$,
отсюда следует, что $\triangle ACK$ - правильный, со стороной 10. Но, площадь $\triangle ACK$ равен площади $\square ABCD$, поскольку мы вычли из ABCD площадь S_{ABC} и прибавили площадь S_{DCK}, $S_{ABC} = S_{DCK}$ поскольку у этих треугольников равные основания $BC = DK = 3$ и высоты при параллельных прямых.

 Математика, 10кл.

А значит $S_{ABCD} = S_{ACK} = \frac{100\sqrt{3}}{4}$.

Откуда

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{79\cdot\sqrt{3}}{4}}{\frac{100\sqrt{3}}{4}} = \frac{79}{100}$$

Ответ: б) $\frac{79}{100}$