Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007642**

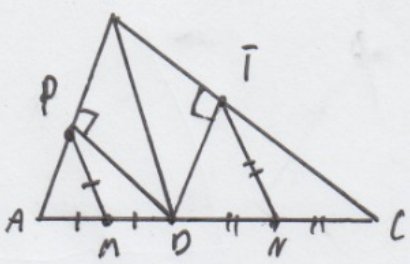
ID профиля: **219424**

Вариант 9

Чистовик

№1

а)



$PM \parallel TN$

BD - диаметр =>

ΔBTD и ΔBPD - прямоугольные, т.к. опираются на диаметр окр. =>

$\angle BTD = \angle BPD = 90$ =>

$\angle APD = \angle DTC = 90$ =>

ΔAPD и ΔDTC прямоугольные =>

PM и TN - медианы прямоугольных Δ =>

$PM = \frac{AD}{2}$; $TN = \frac{DC}{2}$ => ΔPMD и ΔTNC - равнобедренные

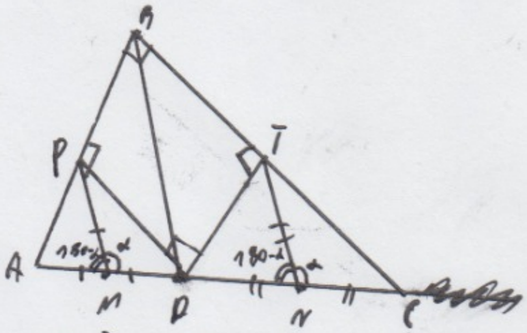
$PM \parallel TN$ => $\angle PMD = \angle TNC$ =>

ΔPMD и ΔTNC подобны по двум сторонам и углу между ними => $\angle MDP = \angle NCT$ => $PD \parallel TC$ => $PD \parallel BC$ =>

$\angle DPB + \angle ABC = 180$ => $\angle ABC = 180 - \angle DPB = 180 - 90 = 90$

Ответ: $\angle ABC = 90$

б)



$MD = \frac{1}{2}$

$NT = \frac{5}{2}$

$BD = 2$

$PBTD$ - четырёхугольник => $PB = DT$; $BT = PD$

$PD^2 = MP^2 + MD^2 - 2MD \cdot MD \cos\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\alpha$

$DT^2 = DN^2 + NT^2 - 2DN \cdot NT \cdot \cos(180-\alpha) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \cos\alpha = \frac{25}{2} + \frac{25}{2}\cos\alpha$

$BD^2 = PB^2 + PD^2 = PD^2 + DT^2 = 13 + 12\cos\alpha \Rightarrow 13 + 12\cos\alpha = 4 \Rightarrow 12\cos\alpha = -9 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{4} \Rightarrow$

$\cos(180-\alpha) = \frac{3}{4}$ =>

$AP^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \Rightarrow AP = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$PD^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8} \Rightarrow AP = \sqrt{\frac{7}{8}}$

$DT^2 = \frac{25}{2} + \frac{25}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{25}{8} \Rightarrow DT = \frac{5}{2\sqrt{2}}$

$TC^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{175}{8}$ $TC = 5 \cdot \sqrt{\frac{7}{8}}$ =>

$AB = AP + PB = AP + DT = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$BC = BT + TC = PD + TC = 3 \cdot \sqrt{\frac{7}{2}}$

$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$

Ответ: $\frac{9 \cdot \sqrt{7}}{4}$

№2 чистовик

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$$

О.Д.З.
$$\begin{cases} x+4\geq 0 \\ 6-x\geq 0 \\ 24+2x-x^2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$x\in[-4;6]$$

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=2\sqrt{24+2x-x^2}-4$$

$$x+4+(6-x)-2\sqrt{24+2x-x^2}=4\left(24+2x-x^2+4-4\sqrt{24+2x-x^2}\right)$$

$$14\sqrt{24+2x-x^2}=96+8x-4x^2+16-x-4-6+x=102+8x-4x^2$$

$$7\sqrt{24+2x-x^2}=51+4x-2x^2$$

$$49(24+2x-x^2)=(51+4x-2x^2)^2$$

$$1176+98x-49x^2=2601+408x-188x^2-16x^3+4x^4$$

$$1425+310x-139x^2-16x^3+4x^4=0$$

$$(x-5)(4x^3+4x^2-119x-285)=0$$

$$(x-5)(x+3)(4x^2-8x+95)=0$$

$$4x^2-8x+95\neq 0$$

т.к. $D<0 \Rightarrow$

$x=5$ и $x=-3$

Ответ $x=5$ и $x=-3$

211007642 (U219424 M1274864)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007642**

ID профиля: **219424**

Вариант 9

чистовик.

①

№5

Всего узлов ~~сетки~~ внутри квадрата будет $58 \cdot 58 = 3364$

из прямой $y = x$ 58 узлов принадлежат этому квадрату =>

способов выбрать один узел на этой прямой это $C_{58}^{1} = \frac{58!}{57! \cdot 1!} = 58$

Второй узел нужно выбрать из $3364 - 1 - 57 - 57 = 3249$ узлов, т.к. 1 узел занят, ещё 57 узлов нельзя выбрать, потому что тогда выбранные узлы будут лежать на прямой, параллельной оси x, ещё 57 узлов нельзя выбрать, потому что тогда выбранные узлы будут лежать на прямой, параллельной оси y =>

способов выбрать второй узел, это $C_{3249}^{1} = \frac{3249!}{3248! \cdot 1!} = 3249$

Всего $58 \cdot 3249 = 188442$

аналогично из прямой $y = 59 - x$ 58 узлов принадлежат этому квадрату и аналогично будет 188442 варианта =>

всего будет $188442 + 188442 = 376884$ вариантов, но один 2 раза посчитали варианты, когда один узел лежит на прямой $y = x$, а второй на прямой $y = 59 - x$, таких случаев $C_{58}^{1} \cdot C_{58}^{1} = 58^2 = 3364$ =>

всего вариантов $376884 - 3364 = 373520$

Ответ 373520 способов

№4 черновик ②

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2y^2 = 2 - \frac{2}{x^2+y^2} \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

$$(x^2+y^2)^2 + 2 - \frac{2}{x^2+y^2} = 5$$

$$(x^2+y^2)^3 - 3(x^2+y^2) - 2 = 0$$

$M = x^2+y^2$

$M^3 - 3M - 2 = 0$

$(M-2)(M+1)^2 = 0$

$M = 2$; $M = -1$

не подходит, т.к. $x^2+y^2 \geq 0$

$x^2+y^2 = 2$

$x^2 = 2 - y^2$

$(2-y^2)^2 + y^4 + 3(2-y^2)y^2 = 5$

$4 - 4y^2 + y^4 + y^4 + 6y^2 - 3y^4 = 5$

$y^4 - 2y^2 + 1 = 0$

$(y^2-1)^2 = 0$

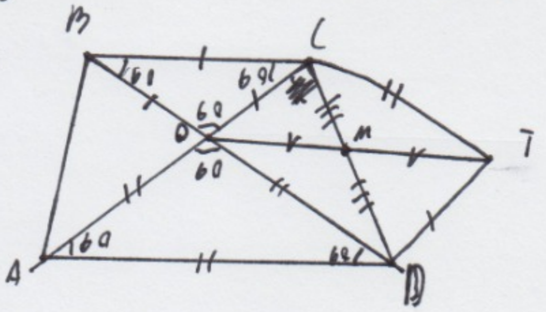
$y^2 = 1$

$y = \pm 1 \Rightarrow x^2 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$

Ответ: $x=1$ $y=1$; $x=-1$ $y=1$; $x=1$ $y=-1$; $x=-1$ $y=-1$

№6 чистовик ③

а1)



~~$\angle ACD = \alpha$ =>~~

~~$\angle ADM = 180 - \angle DOC - \angle ACD = 60$~~

m - медиана CD

~~$CM = MD$ => OM~~

$CM = MD$ $OM = MT$ =>

$OCTD$ - параллелограмм =>

$DT = OC$; $CT = OD$; $\angle OCT = \angle ODT = 60$ =>

$\angle BCT = \angle ADT = 120$ =>

$BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2 \cdot BC \cdot CT \cdot \cos 120$

$AT^2 = AD^2 + DT^2 - 2 \cdot AD \cdot DT \cdot \cos 120$ =>

$BT = AT$, т.к. $BC = DT$; $AD = CT$

$\angle CTD = 120$ и $\angle CAD = 60$ =>

$ACTD$ - вписанный =>

$\angle TAD = \angle DCT = \alpha$

$OCTD$ - параллелограмм => $\angle DCT = \angle CDO = \alpha$

$\Delta BOA = \Delta COD$ по двум ~~углам~~ сторонам и углу между ними =>

$\angle BAO = \angle CDO = \alpha$ =>

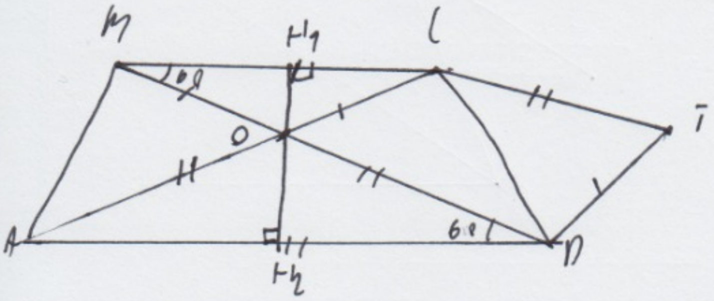
$\angle BAT = \angle BAD - \angle TAD = \angle BAO + \angle OAD - \angle TAD = \alpha + 60 - \alpha = 60$ =>

ΔBTA - равнобедренный, т.к. $BT = AT$ и ~~угол~~ $\angle BAT = 60$ =>

ΔBTA - правильный

№ 8 чистовик 4

а)



$BC = 3$

$AD = 7$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = ?$

$AB = BT = AT = \sqrt{BC^2 + CT^2 - 2BC \cdot CT \cdot \cos 120} = \sqrt{BC^2 + CT^2 + 2BC \cdot CT \cdot \cos 60} =$

$= \sqrt{9 + 49 + \cancel{\dots}\, 21} = \sqrt{79}$

$S_{ABT} = \frac{\sqrt{79} \cdot \sqrt{79} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{79 \cdot \sqrt{3}}{4}$

Д-м: $\angle ADB = \angle DBC \Rightarrow AD \parallel BC \Rightarrow ABCD$ - трапеция $\Rightarrow$

$H_1H_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7$

$S_{ABCD} = \frac{3+7}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (100) \Rightarrow$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{79}{100}$