Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007530**

ID профиля: **112922**

Вариант 9

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$$

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=2\sqrt{24+2x-x^2}-4.$$

$$\begin{cases} x+4+6-x-2\sqrt{(x+4)(6-x)}=4(24+2x-x^2)^2+16-16\sqrt{(x+4)(6-x)} \\ x+4\ge 0 \\ 6-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14\sqrt{(x+4)(6-x)}=4(24+2x-x^2)+6 \\ -4\le x\le 6 \end{cases}$$

$24+2x-x^2=t,\ t>0.$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 7\sqrt{t}=2t+3 \\ -4\le x\le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 49t=4t^2+9+12t \\ -4\le x\le 6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$; D=37^2-4\cdot4\cdot9=37^2-12^2=49\cdot25=35^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4t^2-37t+9=0 \\ -4\le x\le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{37\pm35}{8} \\ -4\le x\le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=9 \\ t=\frac{1}{4} \end{array}\right. \\ -4\le x\le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 24+2x-x^2=9 \\ 24+2x-x^2=\frac{1}{4} \end{array}\right. \\ -4\le x\le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-2x-15=0 \\ 4x^2-8x-95=0 \end{array}\right. \\ -4\le x\le 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

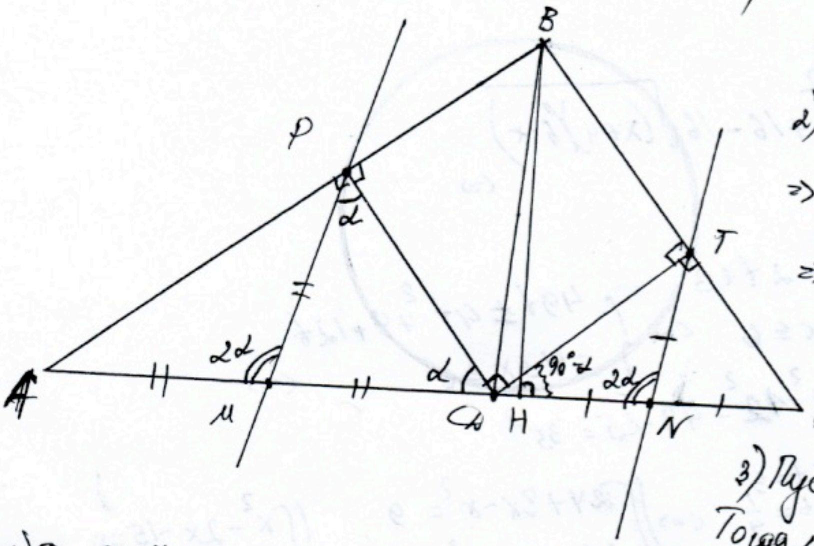
$D=16+4\cdot95=36\cdot11=6^2\cdot11$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=5 \\ x=\frac{4\pm6\sqrt{11}}{4} \end{array}\right. \\ -4\le x\le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-3 \\ x=\frac{2+3\sqrt{11}}{2} \\ x=\frac{2-3\sqrt{11}}{2} \end{array}\right.$$

$$\frac{4+6\sqrt{11}}{4}<6;\quad \frac{4-6\sqrt{11}}{4}>-4$$

Ответ: $5; -3; \frac{2+3\sqrt{11}}{2}; \frac{2-3\sqrt{11}}{2}$.

211007530 (U112922 M1273427)



а) 1) Т.к. BD – диаметр $\Rightarrow \angle BPD = \angle BTD = 90°$, по св-ву вписан. угла, опирающ. на диам.

2) $\angle BPD = 90° \Rightarrow \angle APD = 180° - 90° = 90° \Rightarrow \triangle APD$ – пр.

$\Rightarrow PM$ – мед. в пр. $\triangle APD \Rightarrow AM = MP = MD \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle APM$ и $\triangle PMD$ – р/б $\triangle$-ки.

Аналогично: $\triangle DTC$ – прям $\triangle$; $DN = NT = NC$;

$\triangle DNT$ и $\triangle TNC$ – р/б $\triangle$-ки.

3) Пусть $\angle PDM = \alpha$, тогда по св-ву р/б$\triangle$: $\angle MPD = \alpha$

Тогда $\angle AMP = \angle MPD + \angle MDP = 2\alpha$ по св-ву внешнего угла.

4) Т.к. $PM \parallel TN$, то $\angle AMP = \angle DNT = 2\alpha$ – по св-ву соотв. углов.

5) Т.к. $\triangle DNT$ – р/б$\triangle \Rightarrow \angle TDN = \frac{180° - \angle DNT}{2} = \frac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha$.

6) $\angle PDT = 180° - \alpha - (90° - \alpha) = 90°$. Тогда $\angle ABC = 360° - 90° - 90° - 90° = 90°$.

б) 1) $PM = 0,5 \Rightarrow AM = MD = MP = 0,5$ (мед. в пр. $\triangle$-ке). Аналогично: $DN = NC = NT = 2,5$.

2) $AC = AM + MD + DN + NC = 2 \cdot 0,5 + 2 \cdot 2,5 = 6$.

3) $S_{ABC} = S_{ADB} + S_{BDC} = \frac{1}{2} \cdot \sin\angle ADB \cdot AD \cdot BD + \frac{1}{2} \cdot \sin\angle BDC \cdot DC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot \sin\angle ADB\,(AD + DC) =$

$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin\angle ADB \cdot 6 = 6\sin\angle ADB$; $\sin\angle ADB = 1$, т.к. $\angle ADB = 90° \Rightarrow S = 6$.

Ответ: $\angle ABC = 90°$; $S_{ABC} = 6$.

Черновик Часть 1. Вариант 9. №2.

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$.

$-3+4$ $\quad 6--3 \quad 24-6-9 \quad 24-6-9=9$

$\boxed{x=5}$: $3-1+4=2\cdot3$ +.

? $\boxed{x=-3}$: $1-3+4=2\cdot3$

$\begin{cases} x+4\geq 0 \\ 6-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -4 \\ x\leq 6 \end{cases}$.

$24+2x-x^2=(x+4)(6-x)$;

$24+2x-x^2$, $x=-3$: $24-6-9=9$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=2\sqrt{24+2x-x^2}-4$.

$(x+4)(6-x)\geq 0$

$(x+4)(x-6)\leq 0$

$\cancel{x+4+6-x}-2\sqrt{(x+4)(6-x)}=4(24+2x-x^2)+16-8\cdot2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

$14\sqrt{(x+4)(6-x)}=4(24+2x-x^2)+6$.

$7\sqrt{(x+4)(6-x)}=2(24+2x-x^2)+3$.

$49\cdot(24+2x-x^2)=4(24+2x-x^2)^2+9+12(24+2x-x^2)$

$4(24+2x-x^2)^2-37(24+2x-x^2)+9=0$. $\quad t=(x+4)(6-x)$, $t\geq 0$.

$4t^2-37t+9=0$. $\quad D=37^2-4\cdot4\cdot9=1369-144=1225=$ $\quad 49\cdot25=7^2\cdot5^2=35^2$

$37\cdot37=1369$; $4\cdot24=96$; $72/8=9$

$t=\frac{37\pm35}{8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=9 \\ t=\frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2+2x+24=9 \\ -x^2+2x+24=\frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2+2x+15=0. \\ 4x^2+8x+4\cdot24-1=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-15=0. \\ 4x^2-8x-95=0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} (x-5)(x+3)=0. \text{ оба корня} \\ x=\frac{4\pm6\sqrt{11}}{4} \end{array}\right. \\ -4\leq x\leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-3 \\ x=\frac{2\pm3\sqrt{11}}{2} \end{array}\right.$

$D=16+4\cdot95=396=16\cdot\ldots=36\cdot11$

$396/2=198$, $198/2=99$, $99/9=11$.

$95\cdot4=380$, $380+16=396$; $16\cdot16=256$; $24\cdot4=96$

$360+36$; $36\cdot11$

$4+6\sqrt{11} \vee 24$ +.

$6\sqrt{11}\vee 20$

$3\sqrt{11}\vee 10$

$9\cdot11 \vee 100$

$4-6\sqrt{11}\vee -16$

$20 \vee 6\sqrt{11}$

$2+3\sqrt{11}\vee 12$

$3\sqrt{11}\vee 10$.

$2-3\sqrt{11}\vee -8$.

$-3\sqrt{11}>-10$

$24\cdot4=96$ $\quad +8x-x^2=1$

211007530 (U112922 M1273427)

Черновик Часть 1 Вариант 9 №3

$26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0.$

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0.;\ x_B=\frac{-b}{2a}=\frac{-2a^2}{2a}=-a.$

$3x-y=4.$ $y=3x-4.$

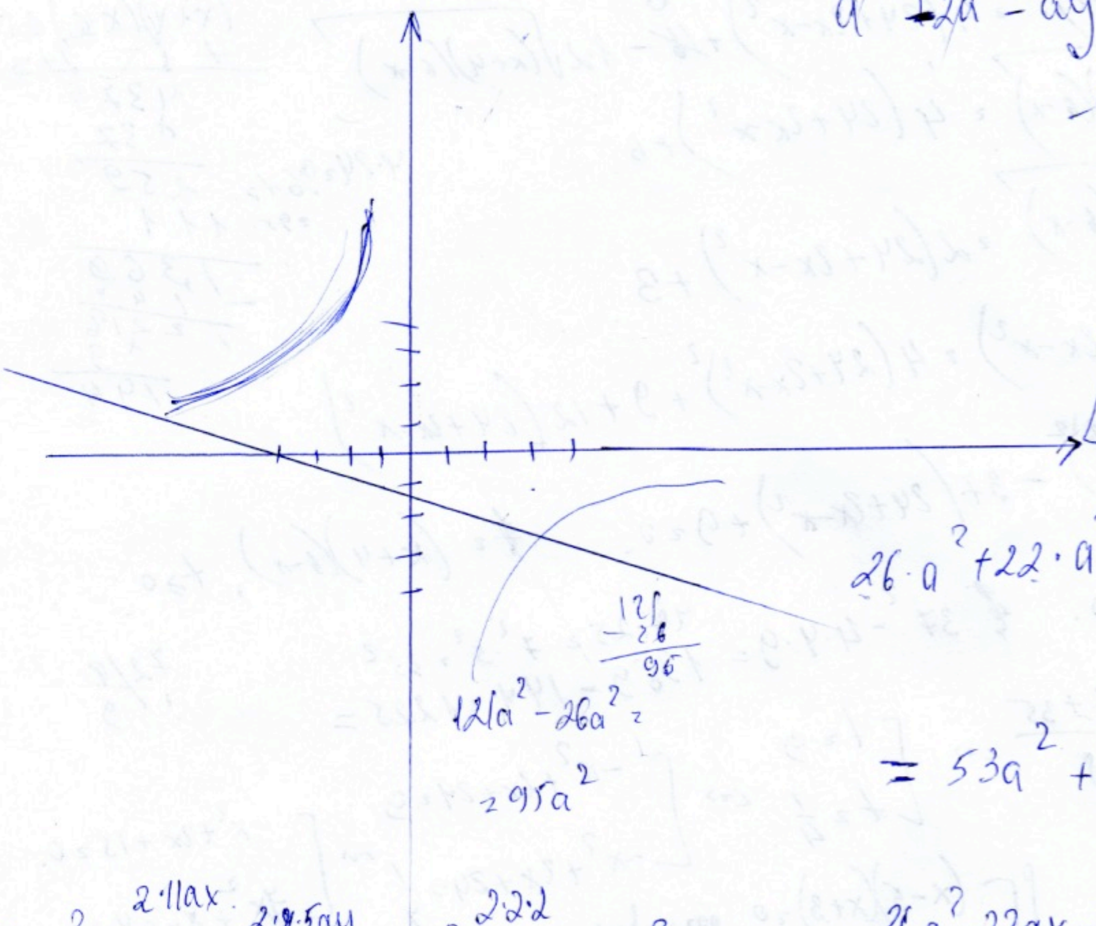
$a^3-2a^3-ay+a^3+1=0.$

$-ay+1=0.$

$1=ay$

$\boxed{y=\frac{1}{a}}$ если $x=-a.$ $a=-x.$

$y=-\frac{1}{x}$



$\begin{array}{r}121\\-26\\\hline 95\end{array}$

$121a^2-26a^2=$

$=95a^2$

$26\cdot a^2+22\cdot a^2-20\cdot a\cdot\frac{1}{a}+5\cdot a^2-$

$-8\cdot a\cdot\frac{1}{a}+4\cdot\frac{1}{a^2}=$

$=53a^2+4\cdot\frac{1}{a^2}-28=0.$

$26a^2-\overset{2\cdot 11ax}{22ax}-\overset{2\cdot 2\cdot 5ay}{20ay}+5x^2+\overset{2\cdot 2\cdot 2}{8yx}+4y^2=0.$

$x^2\ \ 4x^2+8yx+4y^2$

$(2x+2y)^2$

$26a^2-22ax-20ay+x^2=0$

$(11a-x)^2-95a^2-22ay.$

$25a^2-20ay+4y^2+a^2-22ax+5x^2+8yx$

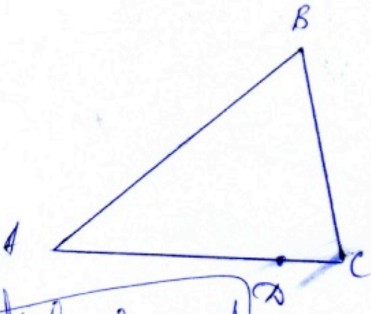
$(5a-2y)^2+$

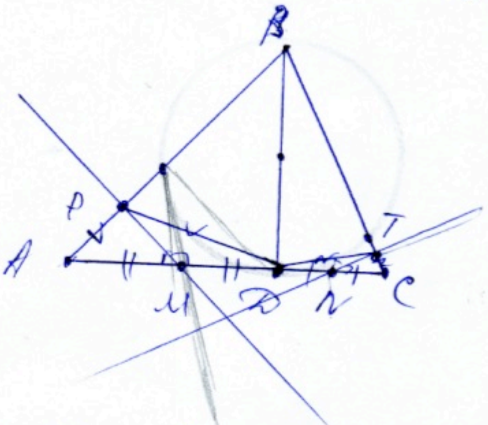
211007530 (U112922 M1273427)

Черновик Часть 1 Вариант 9 №1

$3,9 = 3,8 = 1,9$

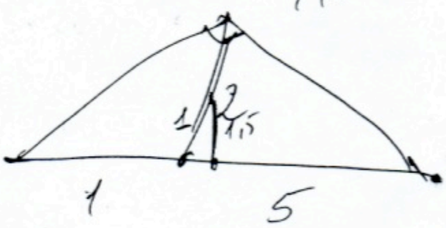
$2,9 = 1,4,5$



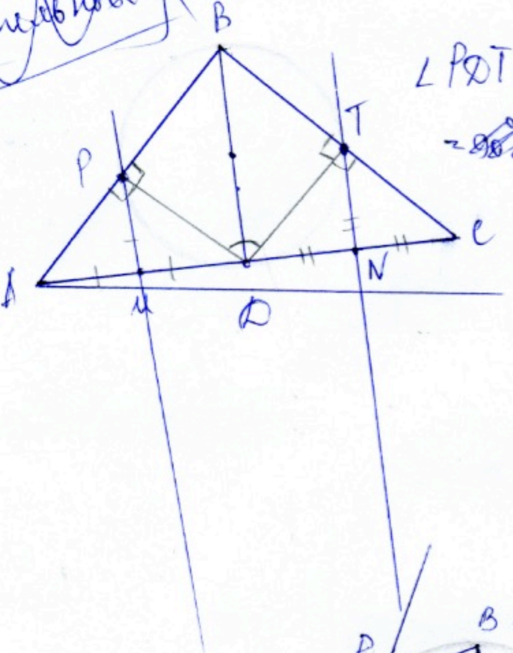


$\frac{5,7}{2} = 2,85$

$0,5 + 1,5 = 3$

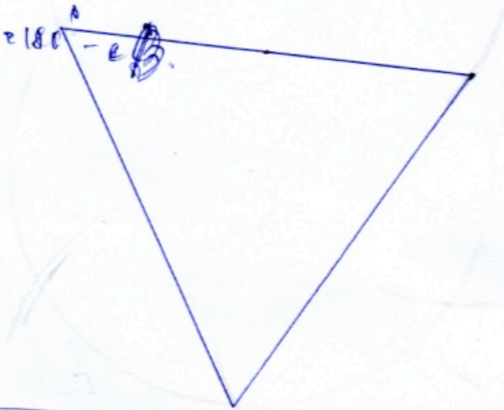


$\boxed{\text{Отрезки касательных}}$

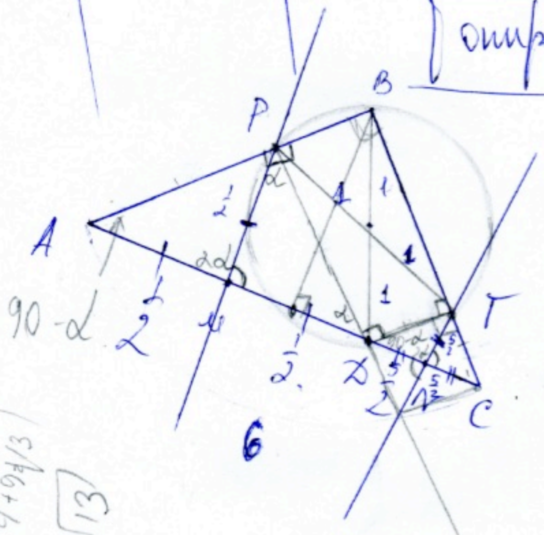


$\angle PDT = 180^\circ - \angle ADP - \angle CDT =$

$= 180 - \angle A + \angle C = 180^\circ - \angle B.$

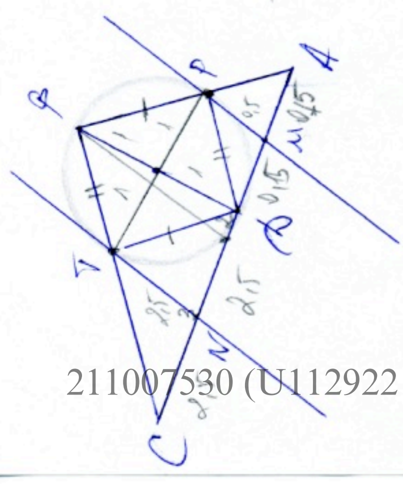


$\boxed{\text{опирается на диамет}}$; соот. углы



$\frac{180 - 2\alpha}{2} = 90 - \alpha$

$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = \sqrt{13}$



$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot DP + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot DT.$

$\frac{1}{2} \sin\alpha \cdot AD \cdot BD + \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \, DC \cdot BD =$

$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin\alpha \, (5+1) = 6 \sin B.$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007530**

ID профиля: **112922**

Вариант 9

$$\begin{cases}\frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2\\ x^4+y^4+3x^2y^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2y^2=2-\frac{2}{x^2+y^2}\\ (x^2+y^2)^2+x^2y^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2y^2=2-\frac{2}{x^2+y^2}\\ (x^2+y^2)^2+2-\frac{2}{x^2+y^2}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2y^2=2-\frac{2}{2}\\ x^2+y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow$$

Рассмотрим второе уравнение:

$$(x^2+y^2)^2+2-\frac{2}{x^2+y^2}=5.$$

$$(x^2+y^2)^2-\frac{2}{x^2+y^2}-3=0. \quad x^2+y^2=t,\ t>0.$$

$$t^3-3t-2=0.$$

$$(t+1)(t^2-t-2)=0.$$

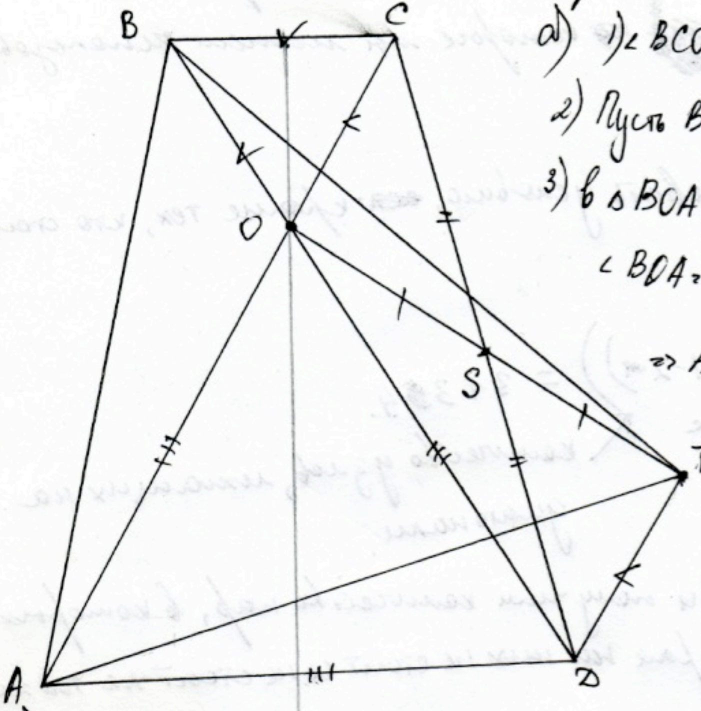
$$(t+1)^2(t-2)=0.$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=-1\end{array}\right.\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow t=2.\Leftrightarrow x^2+y^2=2.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=2\\ x^2y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=2.\\ \left[\begin{array}{l}y=\frac{1}{x}\\ y=-\frac{1}{x}.\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+y^2=2\\ y=\frac{1}{x}\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+y^2=2\\ y=-\frac{1}{x}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+\frac{1}{x^2}=2\\ y=\frac{1}{x}\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+\left(-\frac{1}{x}\right)^2=2\\ y=-\frac{1}{x}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^4-2x^2+1=0\\ y=\frac{1}{x}\end{cases}\\ \begin{cases}x^4-2x^2+1=0\\ y=-\frac{1}{x}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right.\\ y=\frac{1}{x}\end{cases}\\ \begin{cases}x^2=1\\ y=-\frac{1}{x}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(1;1)$; $(1;-1)$; $(-1;-1)$; $(-1;1)$. (4 решения).



а) 1) $\angle BCO = \angle OAD = 60^\circ$; $O \in AC \Rightarrow ABCD$ — трапеция по опр.

2) Пусть $BC = CO = OB = x$; $AO = OD = AD = y$.

3) в $\triangle BOA$: $AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2 \cdot BO \cdot AO \cdot \cancel{\sin}\cos 120^\circ$
$\angle BOA = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ $\}\Rightarrow$

$\Rightarrow AB^2 = x^2 + y^2 + xy$.

4) $\triangle CSO = \triangle DST$ по двум сторонам ($CS = SD$, т.к. S — сер. CD по условию; $OS = ST$, т.к. T — сим. O отн. S по усл.) и углу между ними ($\angle OSC = \angle DST$ по св-ву верт. углов) $\Rightarrow OC = DT = x$ и $\angle OCS = \angle SDT = \alpha$.

5) $\angle ADT = \angle ADC + \angle CDT = 180^\circ - \angle BCD + \angle CDT = 180^\circ - (60^\circ + \angle OCD) + \angle CDT = 180^\circ - 60^\circ - \alpha + \alpha = 120^\circ$

в $\triangle ADT$: $AT^2 = AD^2 + DT^2 - 2 \cdot AD \cdot DT \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow AT^2 = y^2 + x^2 + x \cdot y = AB^2 \Rightarrow AT = AB$

6) $\triangle BOA = \triangle TDA$ по трём сторонам ($BO = DT = x$; $OA = AD = y$; $AB = AT$) $\Rightarrow \angle BAO = \angle TAD = \beta$.

7) $\angle BAT = \angle BAO + \angle OAT = \angle TAD + \angle OAT = \angle OAD = 60^\circ$.

8) в $\triangle BAT$: $AB = AT$; $\angle BAT = 60^\circ \Rightarrow \triangle BAT$ — р/с $\triangle$ — ч.т.д.

б) 1) $AB^2 = x^2 + y^2 + xy$, $x = 3$; $y = 7 \Rightarrow AB^2 = 9 + 49 + 21 = 79$.

2) $S_{BAT} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{79\sqrt{3}}{4}$, по св-ву р/с $\triangle$-ка.

3) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (BC + AD) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (3+7) \cdot (h_{BOC} + h_{AOD}) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{2}\right) = 5 \cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$.

↑ по опр. площ. трапеции

↑ по св-ву р/с $\triangle$-ка.

4) $\frac{S_{BAT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{79\sqrt{3}}{4}}{25\sqrt{3}} = \frac{79}{100}$.

Ответ: $\frac{79}{100}$.

1) Всего узлов в квадрате ~~[illegible]~~ которые мы можем использовать: $(1+59-2)^2 = 58^2 = 3364$.

2) Посчитаем сколько узлов будут соответствовать условию, кроме тех, кто стоит на диагоналях (их посчитаем позже).

$$3364 - (1+59-2-1)\cdot 2 - ((59+1-2)+(59+1-2-\cancel{1})) = 3134.$$

т.е. которые лежат на одной прямой (гор. или верт.) с изнач. точкой

количество узлов, лежащих на диагонали.

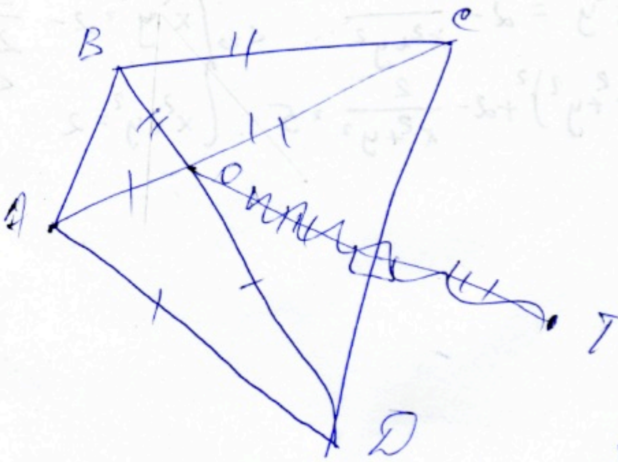
Это количество мы умножим на 116 и получим количество пар, в которых одна точка стоит на диагоналях, а вторая на них не стоит и не стоит на той же верт./гор. прямой с первой точкой.

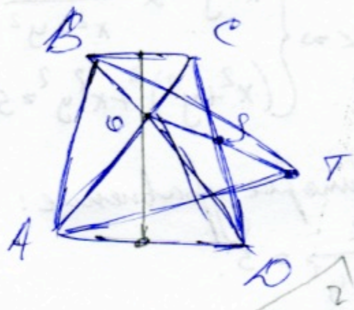
3) Т.к. у нас квадрат 60×60, то диагонали не имеют общих узла. Всего этих узлов (лежащих на диагонали) $(59-1)\cdot 2 = 116$. Тогда каждый может быть в паре с $116-2-1=113$ других (те 2 лежат с ним на одной прямой), а значит всего вариантов $\frac{113\cdot 116}{2}$ = ~~[illegible]~~ $\frac{116\cdot 113}{2}$, т.к. мы каждый вариант считаем дважды.

4) Значит всего вариантов $116\cdot 3134 + 116\cdot\frac{113}{2} = 6554 + 363544 = 370098$.

Ответ: 370098.

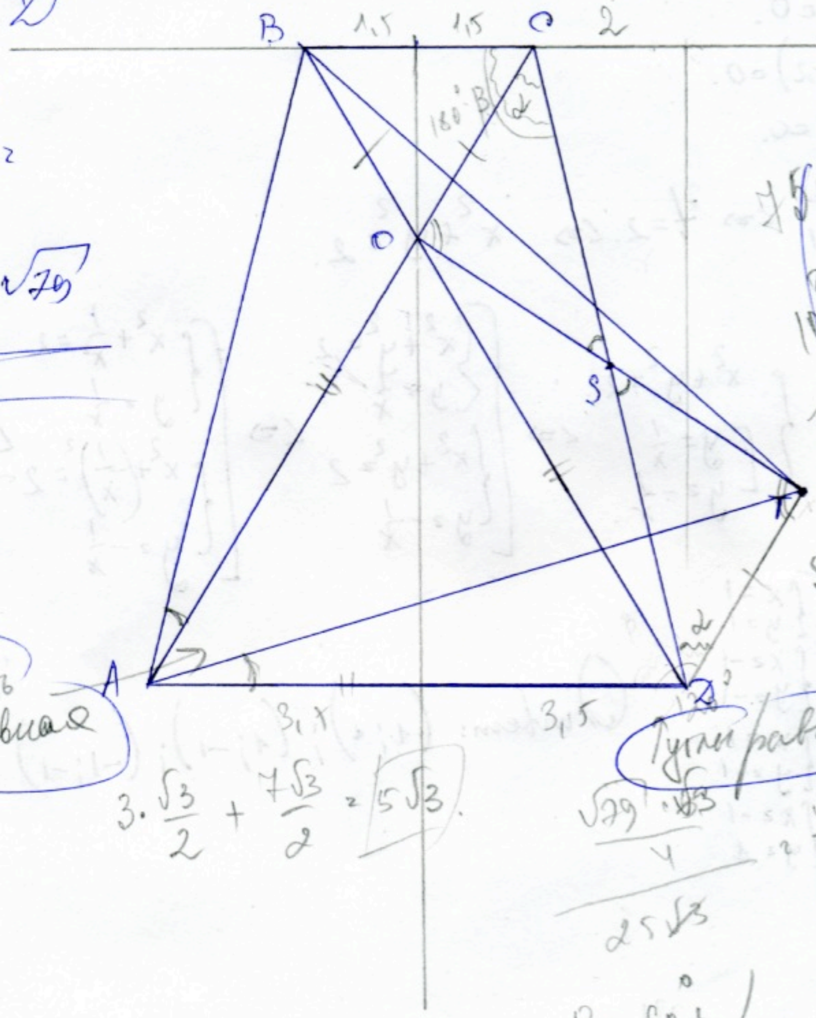
Черновик В9 Ч2 №7.





$$\sqrt{3^2+7^2-2\cdot 3\cdot 7\cdot\cos 120^\circ} = \sqrt{49+9+21} = \sqrt{79}$$

$$\sqrt{10^2-5^2} = \sqrt{5\cdot 15} = 5\sqrt{3}$$



разность равная

Углы равны

$$\sqrt{7{,}5^2+4^2} = \sqrt{10^2-5^2+2^2} = \sqrt{100-25+4} = \sqrt{79}$$

$$S_{тр} = \frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{3}\cdot 10{,}5$$

$$S_{TKO} = \frac{25\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{79}\cdot 5\sqrt{3}}{4}$$

$$3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{79}\cdot\sqrt{3}}{4}}{25\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{79}}{100}$$

$\beta = 60^\circ + \alpha$

$180^\circ - \beta = 120^\circ - \alpha$

Черновик. В9. Ч2. №4.

$$\begin{cases}\dfrac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5\end{cases} \Rightarrow x^2y^2=2-\frac{2}{x^2+y^2}$$

$(x^2+y^2)^2+x^2y^2=5$

$x^2+y^2=t,\ t\geq 0$

$(x^2+y^2)^2+2-\dfrac{2}{x^2+y^2}=5$

$(x^2+y^2)^2 - \dfrac{2}{x^2+y^2}=3$

$(x^2+y^2)^3-3(x^2+y^2)-2=0$

$t^3-3t-2=0$

	1	0	-3	-2
-1	1	-1	-2	0
-1	1	-2	0	

$(t+1)(t^2-t-2)=0$

$(t+1)(t-2)(t+1)=0$

$(t+1)^2(t-2)=0$

$t=2$

$$\begin{array}{r|l} t^3-3t-2 & t+1 \\ \hline -(t^3+t^2) & t^2-t-2 \\ -t^2-3t-2 & \\ -(-t^2-t) & \\ \hline -2t-2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} t^2-t-2 & t+1 \\ \hline t^2+t & t-2 \\ -2t-2 & \end{array}$$

$(t+1)^2(t-2)=$

$=(t^2+2t+1)(t-2)=$

$=t^3-2t^2+2t^2-4t+t-2=$

$=t^3+t-6$

$t^2-t-2=(t-2)(t+1)=$

$=t^2+t-2t-2$

$(t+1)(t^2-t-2)$

$\cancel{t^3-t^2-2t+t^2-t-2}$

$x^2+y^2=2$

$x^2y^2=2-\dfrac{2}{2}=1 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}x^2+y^2=2 \\ x^2y^2=1\end{matrix}}$

[illegible]

$x^2+y^2=2$

$x^2y^2=1$

$(xy)^2=1$

$$\begin{cases}\left[\begin{matrix}xy=1 \\ xy=-1\end{matrix}\right. \\ x^2+y^2=2\end{cases}$$

$y=\dfrac{1}{x}$

$x^2+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2=2$

$x^4-2x^2+1=0$

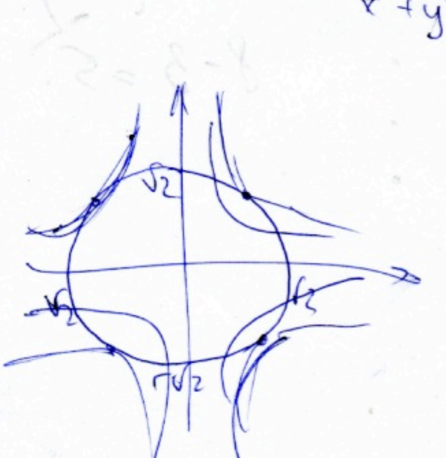
$(x^2-1)^2=0$

$\left[\begin{matrix}x=1 \\ x=-1\end{matrix}\right.$ $\quad$ $\begin{matrix}y=1 \\ y=-1\end{matrix}$

1) $x=1;\ y=1$
2) $x=-1;\ y=-1$
3) $x=1;\ y=-1$
4) $x=-1;\ y=1$

$x^2+y^2=2$

$x^2+y^2+2xy=2+2xy$



Черновик. В9.12 №5.

$3\cdot 3-2\cdot 4$

$60\cdot 60-58\cdot 4=3600-232=3368$

вн граница

$58\cdot 4=232$

$3600-232=3368$

$60-3=58-1=\boxed{57}\cdot 2=114$ – те, где не могут быть. +1 сама точка. (по горизонтали и верт.)

$3368-114-1=3368-115=\boxed{3253}\cdot 58$

сама точка

$3368-114-1-58=3105\cdot 58$

уже

$1-2+1-2-1$

$3105\times 58=24840+15525=180090$

60.

$120-5=115$

$3253\times 58=26024+16265=188674$

$58\cdot 2-1$ $114-3=111$

$3364-57\cdot 2-(59\cdot 2-3)=3364-114-116=3134$

116

$2\cdot(59-1)=$ $3364-230=3134$

$3364-229=3135$

0 1 2 3 4 5

$2\cdot(5-1)$

$8-3=5.$

$113\times 58=904+565=6554$

$3134\times 116=18804+3134+3134=363544$

211007530 (U112922 M1273428)