Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007434**

ID профиля: **885607**

Вариант 9

Чистовик

математика, 10 кл.

вариант 9.

№2. $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$

ОДЗ:

$\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 6 \end{cases} \Rightarrow x \in [-4; 6]$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

$(\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x})^2 = \cancel{2}4(\sqrt{(x+4)(6-x)} - \cancel{2}2)^2$

в случае, когда $\sqrt{x+4} \geq \sqrt{6-x}$.

$x+4 \geq 6-x$.

$2x \geq 2$.

$x \geq 1$

1) $10 - 2\sqrt{(x+4)(6-x)} = 4((x+4)(6-x) - 4\sqrt{(x+4)(6-x)} + 4)$

Пусть $\sqrt{(x+4)(6-x)} = a$ и $a \geq 0$, тогда

$10 - 2a = 4(a^2 - 4a + 4)$

$4a^2 - 16a + 16 + 2a - 10 = 0$

$4a^2 - 14a + 6 = 0$

$2a^2 - 7a + 3 = 0$

$D = 49 - 24 = 25$

$a_1 = \frac{7+5}{4} = 3 \quad a_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{(x+4)(6-x)} = 3$ или $\sqrt{(x+4)(6-x)} = \frac{1}{2}$

$(x+4)(6-x) = 9$

$24 + 2x - x^2 = 9$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$x_1 = -3 \quad x_2 = 5$

не удв.

$(x+4)(6-x) = \frac{1}{4}$

$24 + 2x - x^2 = \frac{1}{4}$

$x^2 - 2x - \frac{95}{4} = 0$

$4x^2 - 8x - 95 = 0$

$D_1 = 16 + 380 = 396$. $\sqrt{D} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{11}$

$x_3 = \frac{4 + 6\sqrt{11}}{4}$ $\quad x_4 = \frac{4 - 6\sqrt{11}}{4} < 1$.

не удв

$x_3 = 1 + 1{,}5\sqrt{11}$

2) Если $x \leq 1$.

$(\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x})^2 = -4(\sqrt{(x+4)(x-6)} - 2)^2$.

~~Пусть $\sqrt{x+4}$ =~~

$10 - 2\sqrt{(x+4)(6-x)} = -4((x+4)(6-x) - 4\sqrt{(x+4)(6-x)} + 4)$

1

Чистовик

№2 Продолжение

Пусть $\sqrt{(x+4)(6-x)} = b$, $b \geq 0$, тогда:

$10 - 2b = -4(b^2 - 4b + 4)$

$10 - 2b = -4b^2 + 16b - 16$

$4b^2 - 18b + 26 = 0$

$2b^2 - 9b + 13 = 0$

$D = 81 - 26 \cdot 4 < 0$

$\Rightarrow$ нет корней

Ответ: 5; $1 + 1{,}5\sqrt{11}$

2

Чистовик

№3 $ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$

$y=\dfrac{ax^2+2a^2x+a^3+1}{a}$

при $a\neq 0$

$y=x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}$

$x_в=\cancel{-2a}\ \dfrac{-2a}{2}=-a.$

$y_в=\frac{1}{a}.$

$B(-a;\frac{1}{a})$

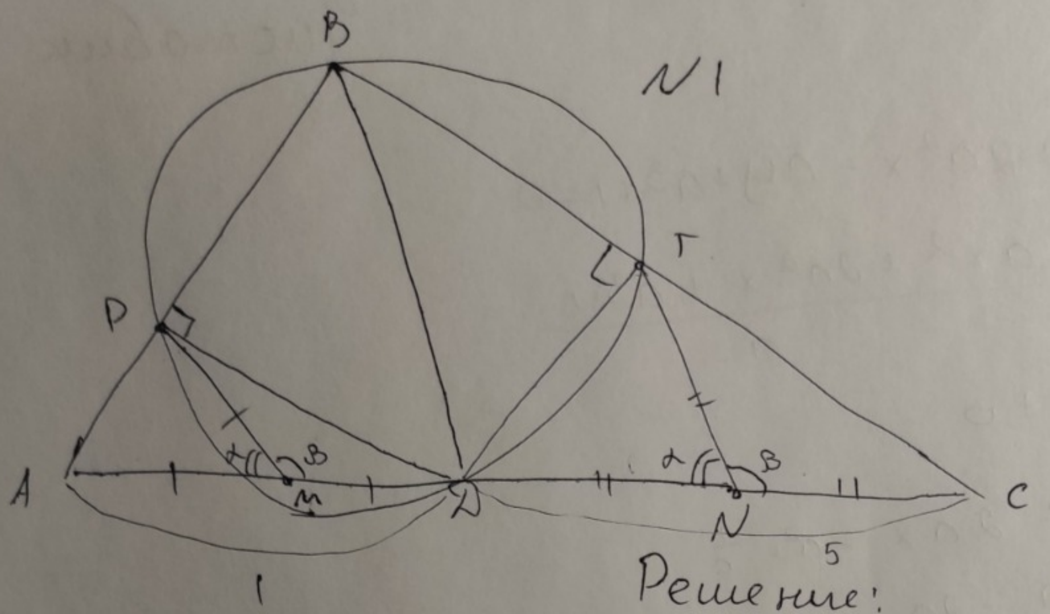
$y=3x-4$

3

Чистовик

I)

N1



Найти: ABC.

Решение:

1) BD - диаметр $\Rightarrow \angle BPD = \angle BTD = 90°$

в $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ $\angle APD$ и $\angle DTC = 90° \Rightarrow PM = \frac{1}{2}AD$ и $TN = \frac{1}{2}CD$

(св-во медиан в прям. тр)

2) $PM \parallel CB$, ~~Aгде~~ тогда $\angle PMD = \angle TNC = \beta$ и $\angle AMP = \angle TND = \alpha$

как соответственные

3) $\triangle MPD$ и $\triangle DTC$ - равнобедр $\Rightarrow$ по Т о сумме углов

$\angle PDM = \frac{180° - \beta}{2}$ и $\angle TDN = \frac{180 - \alpha}{2}$.

$\angle PDM + \angle TDN = \frac{360 - (\alpha + \beta)}{2} = 90°$ ($\alpha + \beta = 180°$ как смеж)

4) в четыр.-ке BTDP $\angle BPD = \angle PDT = \angle DTB = 90° \Rightarrow$ это прямоуг

$\Rightarrow \angle PBT = 90°$.

Ответ: 90°

б) $PM = \frac{1}{2} \Rightarrow AD = 2PM = 1$ $TN = \frac{5}{2} \Rightarrow DC = 2TN = 5$.

$\cos\angle BAD = \frac{AB}{AC} = \frac{x}{6}$.

По Т косинусов $\triangle ABD$ $\cos\angle BAD = \frac{-BD^2 + AD^2 + AB^2}{2\,AB \cdot AD}$

$\cos\angle BAD = \frac{-4 + 1 + x^2}{2x} = \frac{-3 + x^2}{2x}$

Чистовик

№1 продолжение:

$$\frac{x^2-3}{2x} = \frac{x}{6}$$

$6x^2 - 18 = \cancel{2}\ 2x^2$

$\cancel{4}4x^2 = 18$

$x = \sqrt{\frac{18}{4}}$

$x = \frac{3}{\sqrt{2}} = AB$

По т. Пифагора $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$

$BC = \sqrt{36 - \frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{63}{2}} = 3\sqrt{\frac{7}{2}}$.

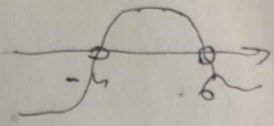
$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot 3\sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$.

Ответ: $9\frac{\sqrt{7}}{4}$.

5

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2} = 2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

$(x^2-2x-24) = -(x-4)(x-6)$



$D = 1+24 = 25$

$1+5=6$ $\quad 4$

ОДЗ: $x \in [-4; 6]$

$4 + \sqrt{x+4} = 2\sqrt{(x-4)(6-x)} + \sqrt{6-x}$

$16 + x + 4 + 8\sqrt{x+4} = (6-x)(2\sqrt{x-4}+1)^2$

$16 + x + 4 + 8\sqrt{x+4} = (6-x)(4x-16-4\sqrt{x-4}+1)$

$16 + x + 4 + 8\sqrt{x+4}$

$\sqrt{24}$

$6x^2 - 18 = 2x^2$

$\frac{x^2-3}{2x} = \frac{1}{6x}$

~~$24+2x-x^2 = -(x^2-2x+24)$~~

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

$D = 1+24 = 25$

$x_1 = \frac{1+5}{1} = 6 \quad x_2 = -4$

$\sqrt{x+4} = a; \sqrt{6-x} = b$

$a - b + 4 = 2ab$

$\sqrt{x+4} - 2\sqrt{(x+4)(-x+6)} - \sqrt{x-6} = -4$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

$\sqrt{6-x} + 2\sqrt{(x+4)(-x+6)} - \sqrt{x+4} = 4$

$\sqrt{x+4} + 4 = 2\sqrt{(x+4)(6-x)} + \sqrt{6-x}$

$\sqrt{x+4} + 4 = \sqrt{6-x}\,(2\sqrt{x+4}+1)$

$2x^2 + 4x - 41$

$D_1 = 4 + 82 = 86$

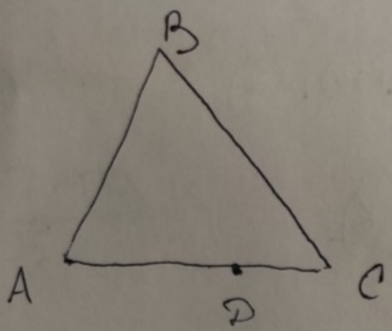
$x + 20 + 8\sqrt{x+4} = (6-x)(4x+16+1+4\sqrt{x+4})$

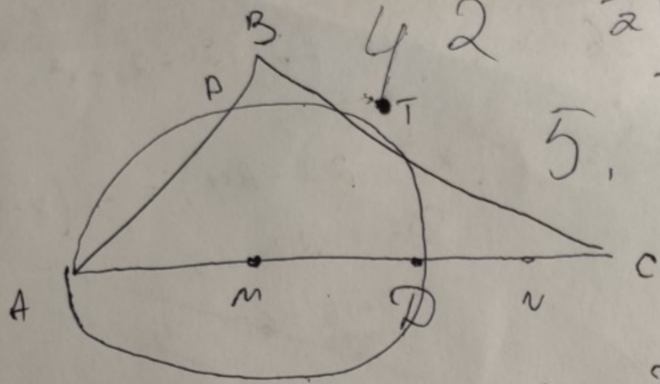
$x + 20 + 8\sqrt{x+4} = 24x + 96 + 6 + 24\sqrt{x+4} - 4x^2 - 17x - 4x\sqrt{x+4}$

$4x^2 + 8x - 82 - 4(4-x)\sqrt{x+4}$

1

2) 1 - 374 2 2





4 2

$\frac{8}{2}$ $\sqrt{15}$

$\frac{y}{6} = -\frac{4-25-y^2}{10y}$

5.

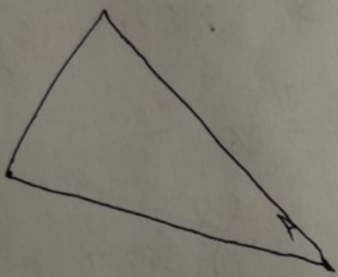
4

$10y^2 = 21 \cdot 6 + 6y^2$

$4y^2 = 21 \cdot 6.$

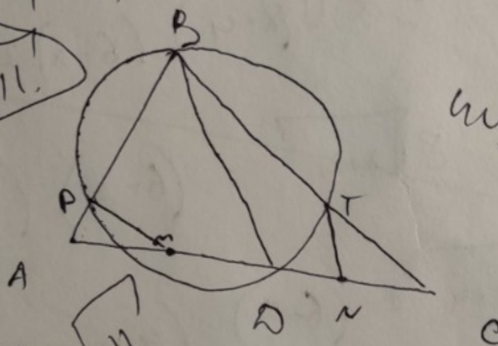
$y^2 = \frac{21 \cdot 3}{2}$ $\frac{3 \cdot 7 \cdot 3}{2}$

$y =$

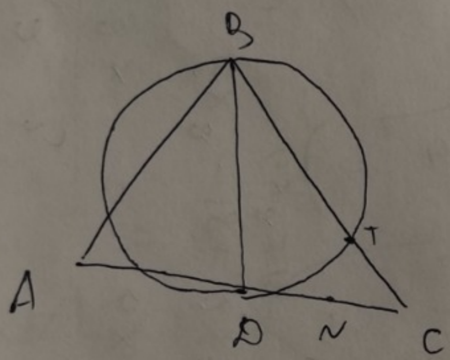


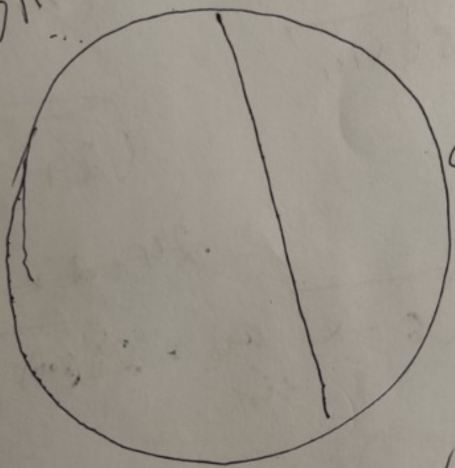
100 - 1 99

$3\sqrt{11}$



$3\sqrt{11}$



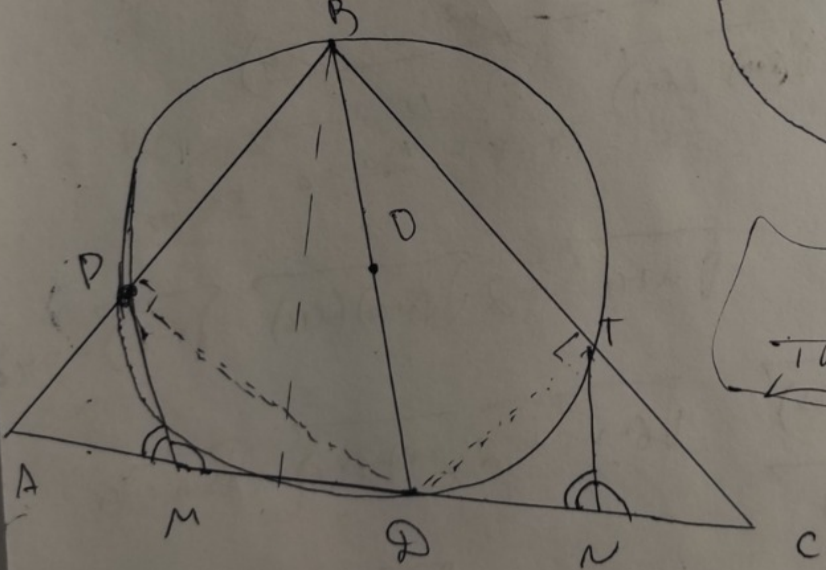


$\sqrt{36 \cdot 11}$ $\sqrt{91}$

$36 \cdot 11$ 91

16

$6\sqrt{11}$ 4



$24 + 2x - x^2 = \frac{1}{4}.$

$x^2 - 2x - 23\frac{3}{4} = 0$

$4x^2 - 8x - 95 = 0$

$D_1 = 16 + 380 = 396.$

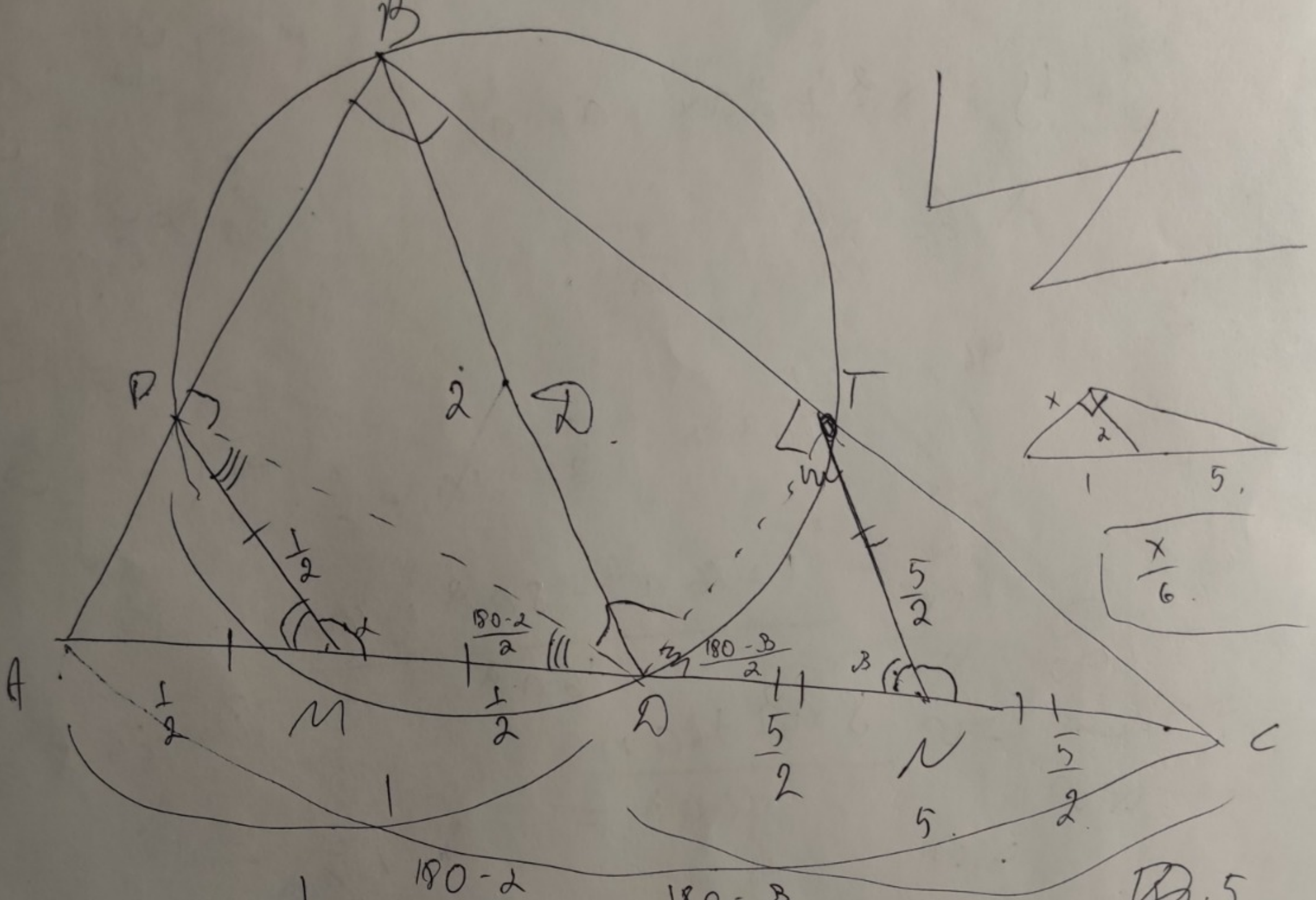
$6\sqrt{11}$

$4 + 6\sqrt{11}$ $\frac{4 - 6\sqrt{11}}{4}$

$4 \cdot 99$; $4 \cdot 9 \cdot 11 = 2\sqrt{11}$

$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 4 \\ \hline 92 \end{array}$ $\begin{array}{r} 95 \\ \times\ 4 \\ \hline 380 \end{array}$

$\frac{3}{2}^2\sqrt{15}^2 + \frac{3}{2}^2 = \frac{9}{4}\cdot 16 = 36.$ $90-\pi.$ $\pi.$



1 $\quad \frac{180-\alpha}{2} + 6.\ \frac{180-\beta}{2} = 180 - \frac{\alpha+\beta}{2}.$ $\quad$ 5.

$\sqrt{AM \cdot AD}$ $\quad$ 6 $\quad \frac{180-\alpha+180-\beta}{2} =$ $\quad \alpha+\beta = 180$ $\quad 90$

$\sqrt{\frac{1}{2}\cdot 1}$

$\alpha+\beta = 180$ $\quad \frac{360-(\alpha+\beta)}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}.$ $\quad 1$

$2 \frac{3}{2} \cdot 36 - \frac{9}{4} =$

$3-x^2$

$\frac{3}{2}\sqrt{15}!$ $\quad \frac{x}{6} = \frac{4-1-x^2}{2x}.$

$6-$

$36 - \frac{9}{4} =$ $\quad 2x^2 = 24 - 6 - 6x^2.$ $\quad 18$

$\frac{9\sqrt{15}}{4}$ $\quad \frac{36\cdot 4 - 9}{4}$ $\quad 8x^2 = 18.$

$ay = ax^2 + 2a^2x + a^3 + 1$

$a = 0$

$y = x^2 + 2ax + a + \frac{1}{a}$

$x_6 = \frac{-1}{4a} = \boxed{-\frac{1}{4a}}$

$-\frac{6}{2a}$

$y_6 = \frac{1}{16a^2} \cdot 4 - \frac{1}{2} + a + \frac{1}{a}$

$\frac{1 + 16a^2 - 8a^2 + 16a}{16a^2}$

$\frac{8a^2 + 16a + 1}{16a^2} =$

$\sqrt{9\left(4 - \frac{1}{4}\right)} = 9$

$\frac{36 \cdot 9 \cdot 4}{9} = 8 \cdot 80$

$\frac{4(81-1)}{9} =$

$\frac{4}{9}\left(\frac{81}{9} - 1\right) = \frac{4}{9} \cdot 80$

$D_1 = 64 - 8 = 56$

$\sqrt{6-x} - \sqrt{x+4} \geq 0$

$10 - 2\sqrt{(6-x)(x+4)} \geq 0$

$\sqrt{(6-x)(x+4)} \leq 5$

$(6-x)(x+4) \leq 25$

$24 + 2x - x^2 \leq 25$

$x^2 - 2x + 1 \geq 0$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 1$

$x \leq 1$

$\frac{y}{6} = \frac{4 - 25 - 4y^2}{2 \cdot 5 \cdot y}$

$10y^2 = -21 \cdot 6 - 6y^2$

$16y^2 = -\frac{21 \cdot 6}{16}$

$y^2 = \frac{63}{4}$

$y = \frac{3}{2}\sqrt{7}$

$4a^2 - 4a - 16 + 10 - 2a = 0$

$4a^2 - 6a - 6$

$4a^2 - 16a + 16 - 2a + 10$

$4a^2 - 18a + 26 = 0$

$2a^2 - 9a + 13 = 0$

$D = 81 - 26 \cdot 4 < 0$

$x^2 - 3$.

$$\frac{x^2-3}{2x} = \frac{x}{6}.$$

$\Rightarrow$ $6x^2 - 18 = 2x^2$.

$4x^2 = 18$.

$x^{\cancel{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

$BC =$

$$\frac{72-9}{2} = \frac{63}{2} = 3\sqrt{\frac{7}{2}}$$

$3\sqrt{3,5}$.

$\Rightarrow$ $3\sqrt{\frac{7}{2}}^{\,2} < \frac{3}{\sqrt{2}}^{\,2}$

$$\frac{9 \cdot 7}{2} < \frac{9}{2} \div \frac{9 \cdot \cancel{8}^{4}}{\cancel{2}} = 36.$$

211007434 (U885607 M1273381)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007434**

ID профиля: **885607**

Вариант 9

Чистовик

вариант 9
часть 2

№4. $\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 5 \end{cases}$

Пусть $x^2+y^2 = a$; $x^2 \cdot y^2 = b$, тогда:
$a \geq 0$; $b \geq 0$

$\begin{cases} \frac{2}{a} + b = 2 \\ a^2 + b = 5 \end{cases}$ " – "

$a^2 - \frac{2}{a} = 3$

$a^3 - 3a - 2 = 0$

$\underline{a = 2}$; $b = 1$

$$\begin{array}{r|l} a^3 - 3a - 2 & a - 2 \\ -\ a^3 - 2a^2 & a^2 + 2a + 1 \\ \hline 2a^2 - 3a & \\ -\ 2a^2 - 4a & \\ \hline a - 2 & \\ -\ a - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$(a-2)(a^2+2a+1) = 0$

$a^2 + 2a + 1 = 0$

$a = -1$
не удв.

$\begin{cases} x^2+y^2 = 2 \\ x^2y^2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 = 2 - x^2 \\ (2-x^2)x^2 = 1 \end{cases}$

$2x^2 - x^4 = 1$

$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

$x^2 = t$, $t \geq 0$

$t^2 - 2t + 1 = 0$

$t = 1$

$x^2 = 1$; $x = 1$.

$y = 1$.

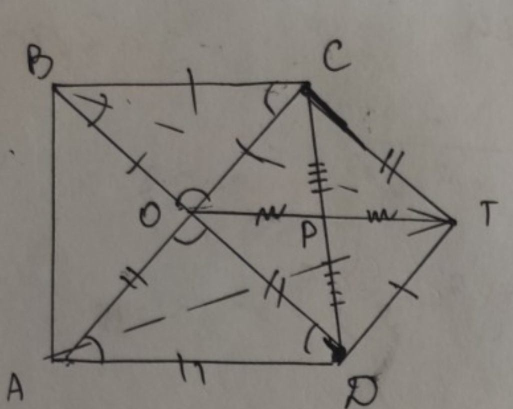
Ответ: $(1; 1)$

211007434 (U885607 M1273382)

1

Чистовик

№6 а)



Д-ть, что △ABT - прав.

Д-во:

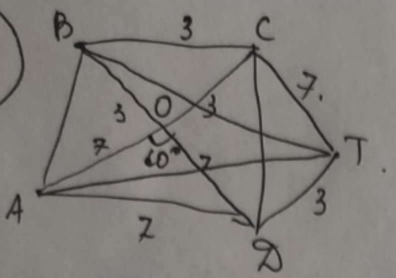
1) OP = PT и CP = PD по усл ⇒ OCTD - парал-м.
Тогда по св-ву парал-ма OC = TD и CT = OD.
CT ∥ BD и BC = CO = TD ⇒ BCTD - ~~прав~~ равнобед. трапеция
⇒ BT = CD. (св-во равн. трапец)
TD ∥ CA и AD = OD = CT ⇒ ACTD - равноб. трапеция ⇒
и CD = AT = BT. ⇒ △BTA - равнобедр.

2) ∠COD = 180° - ∠BOC = 120° (смеж) = ∠CTD (св-во парал-ма)
△BCD = △ATD по 3 сторонам ⇒ ∠CTB = ∠TAD и ∠CBT = ∠ATD.
∠CTB + ∠ATD = ∠CTB + ∠CBT = 180° - ∠BCT = 60° (Т о сумме углов)
∠BCT = ∠BCA + ∠OCT = ∠BCA + 180° - ∠COD = 120°.
Тогда ∠CTB + ∠ATD = ∠CTD - ∠BTA ⇒ ∠BTA = 120° - 60° = 60°.
⇒ ABT равн. тр с углов 60° в верш ⇒ △ABT - прав.
Чтд.

2

Чистовик.

№6 б)



Найти: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$.

Решение:

1) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\angle AOD$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$.

2) в △ BCT по т. косинусов $BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2\cos 120° \cdot BC \cdot CT$.

$BT^2 = 9 + 49 + \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{21}{7 \cdot 3} = 79$.

$BT = \sqrt{79}$.

$S_{ABT} = \frac{1}{2} BT^2 \cdot \sin\angle BTA = \frac{1}{2} \cdot 79 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{79}{4}\sqrt{3}$.

3) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{79\sqrt{3}}{100\sqrt{3}} = \frac{79}{100}$

Ответ: 79 : 100.

3

N 5°

Чистовик.

Ответ: $104 \cdot (57^2 - 105)$

1) Прямые $y = x$ и $y = 59 - x$ ~~прохо~~ диагонали квадрат и проходят через узлы сетки, они не пересекаются ни в одном из узлов (59 - нечет), поэтому $57 \cdot 2$ - кол-во узлов, которые принадлежат заданным прямым.

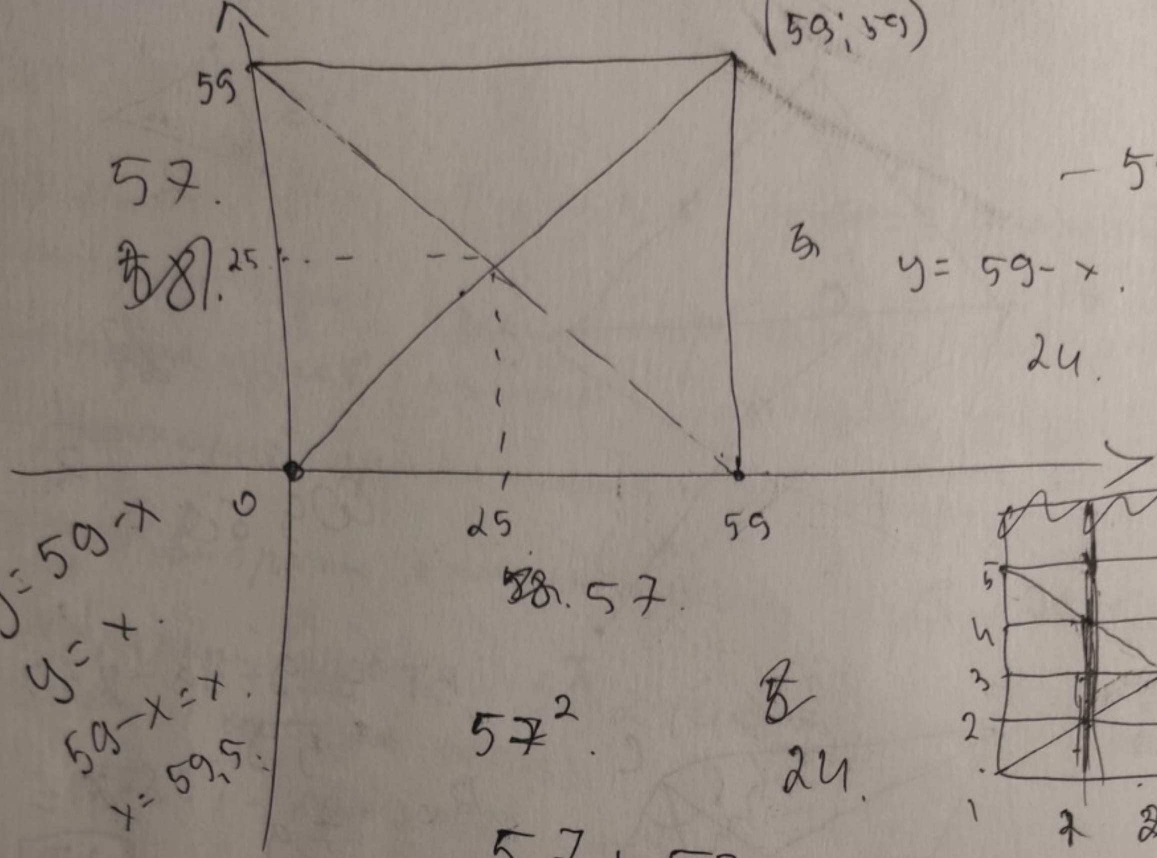
Вариантов выбрать вторую точку $57 \cdot 57$ (кол-во узлов) - 1 (уже выбранный узел) - $56 \cdot 2$ (иначе точки лежат на прямой || системе коорд)

$\Rightarrow 57 \cdot 57 - 1 - 104 = 57^2 - 105$.

$104 \cdot (57^2 - 105)$ - вариантов.

211007434 (U885607 M1273382)

4



$(59;59)$

57.

38.

$-59+x=59-x$

$y=59-x$ $x=59$

24. 24

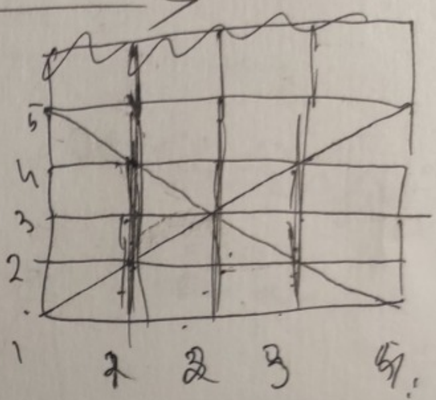
$y=59-x$

$y=x$

$59-x=x$

$x=59,5$

$\cancel{28}.57$



57^2.

24.

$57+57-1$.

57.

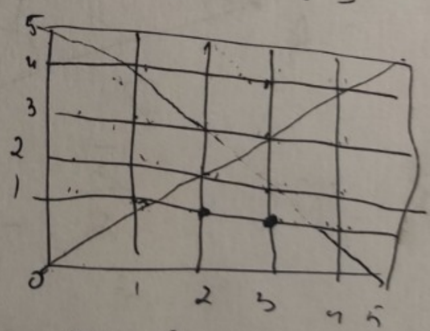
$x=y$

$y=5-x$.

$104-1 = 103$ узла.

$\boxed{57+57-1}$

$57+57$



$57^2-1-56\cdot 2$

$57^2-56\cdot 2$ $3\cdot 2$.

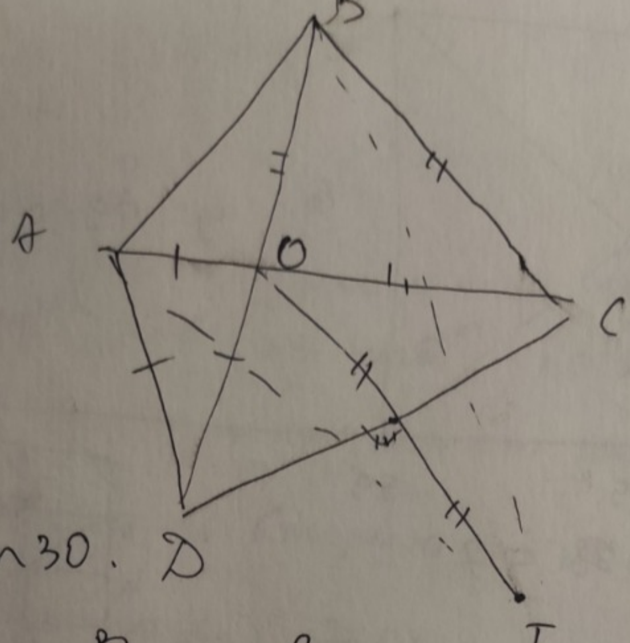
$104\cdot(57^2-56\cdot 2-1)$

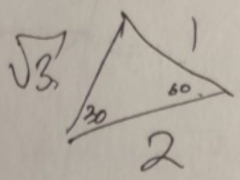
$104\cdot(\boxed{57^2}-1-56-56$

$104\cdot(57^2-105.)$

$$\begin{array}{r} \times\ 57 \\ 57 \\ \hline 399 \\ +\ 285 \\ \hline 3249 \\ -\ 105 \\ \hline 3144 \\ \times\ 104 \end{array}$$

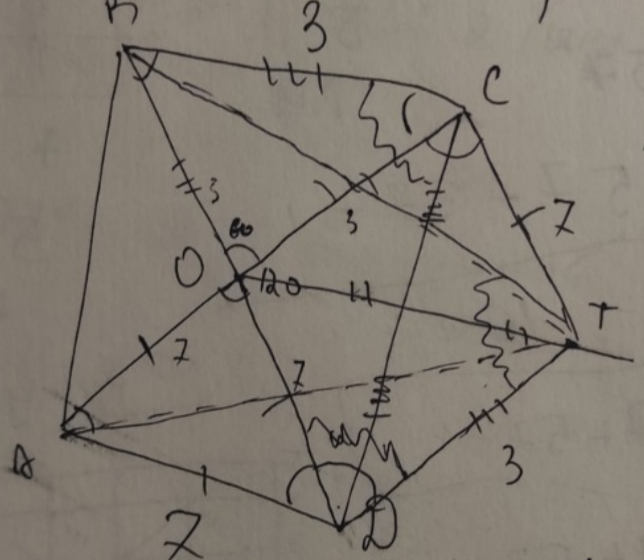
211007434 (U885607 M1273382)





$\cos 60$ $\quad \frac{1}{2}$

$\sin 120 = \sin 30.$



120

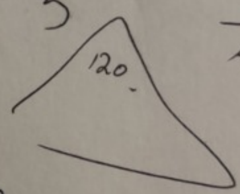
$BT^2 = 9 + 49 + \cancel{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$ $\quad 21$

58

$58 - 21 =$

79.

$\sqrt{37}$



$\sqrt{37}$

$\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. — $\frac{100\sqrt{3}}{\cancel{4}}$ $\quad \frac{1}{2} \cdot \sqrt{37} \cdot \sqrt{37} \cdot \sin 60 :$

$\frac{37 \sqrt{3}}{\cancel{4}}$

$25\sqrt{3}$ $\quad \frac{37\sqrt{3}}{4}$

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ (x^2+y^2)^2+x^2y^2=5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{a}+b=2 \\ a^2+b=5. \end{cases}$$

$a^2-\frac{2}{a}=3.$

$a^3-2-3a=0.$

$a^3-3a-2=0$

$(a-2)(a^2+2a+1)=a^3+\cancel{2a^2}+a-\cancel{2a^2}-4a-2.$

$a^2+2a+1=0$

$D_1=1-1=0$

$a_2=\frac{-1}{1}=-1.$

$x^2+y^2=-1$

$\varnothing$

$\underline{a=2}$

$$\begin{cases} x^2+y^2=2. \\ x^2y^2=\underline{1}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2=-x^2+2 \\ (2-x^2)x^2=1. \end{cases}$$

$2x^2-x^4=1.$

$x^4-2x^2+1=0.$

$D_1=1-1=0.$

$x_1=\frac{+1}{1}=1.$

$\underline{x=1. \quad y=1.}$

№4.

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2. \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 5. \end{cases}$$

$x^2y^2 = a$

$x^2+y^2 = b$

$$\begin{cases} \frac{2}{a} + b = 2 \\ a^2 + b = 5 \end{cases}$$

$a^2 - \frac{2}{a} = 3$

$\frac{a^3-2}{a} = 3$

$a^3 - 2 = 3a$

$\cancel{a^3 - 3a = 2}$

$a^3 - 3a - 2 = 0$

$a = 2.$

$$\begin{array}{l|l} a^3 - 3a - 2 & a-2 \\ -\,a^3 - 2a^2 & a^2+2a+1 \\ \quad 2a^2 - 3a & \\ -\,2a^2 - 4a & \\ \quad a - 2 & \\ -\,a - 2 & \\ \quad 0. & \end{array}$$

$(a-2)(a^2+2a+1) = 0$

$a = 2$ или $a^2 + 2a + 1 = 0$

$b = 1$ $D.$ $a_1 = -1$ $a_2 = -1.$

неудв.

~~Ответ: $a = -1$; $a = 2$.~~

$$\begin{cases} x^2y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$(-y^2+1)\,y^2 = 2.$

$-y^4 + y^2 = 2.$

$\cancel{(x-y)^2 = -1.}$

$\cancel{y^4 - y^2 - 2 = 0}$

$\cancel{t^2 - t - 2 = 0}$

$\cancel{t_1 = -1}$ $\cancel{t_2 = 2.}$

$\cancel{y^2 = -1}$ $\cancel{y^2 = 2}$

$y = \sqrt{2}$ $x =$

$y^4 - y^2 + 2 = 0.$

$t^2 - t + 2 = 0.$

$D = 1 - 8 < 0.$