Часть 1

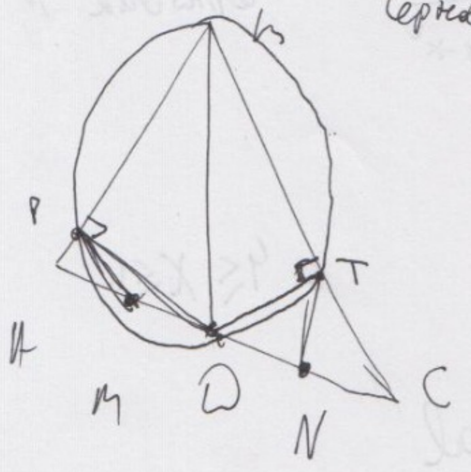
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007413**

ID профиля: **807124**

Вариант 9

Черновик №1



$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

384

$x = \frac{\cancel{4+288}}{\cancel{1111}} = 29.2 =$

$= 9273 \quad 4 \cdot 37$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2} = 2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{6-x}$$

$-4 \leq x \leq -6$

$$\begin{array}{r} 144 \\ -49 \\ \hline 95 \end{array} \qquad 95\cdot 4 = 380$$

$$\underset{a}{\underset{\parallel}{\sqrt{x+4}}} - \underset{b}{\underset{\parallel}{\sqrt{6-x}}} + 4 = 2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{6-x}$$

1° $\sqrt{6-x} = \sqrt{x+4} + 3$

$6-x = x+4 + 6\sqrt{x+4} + 9 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow -6\sqrt{x+4} = 2x+7$

$36(x+4) = 4x^2 + 28x + 49$

$4x^2 - 8x - 144 = 0$

$x^2 - 2x - \cancel{..}\,36 = 0$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 4 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\begin{cases} a - b + 4 = 2ab,\ a, b > 0 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 4 = 2ab + 10 \Rightarrow 2a(b-1) = -6 \\ 2b - 4 = 10 - 2ab \Rightarrow 2b(1+a) = 14 \end{cases}$$

$\cancel{(a+b)^2 = 100 \ldots a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow a - b + 4 = 100 - (a^2 + b^2)}$

$$a - b + 4 + 10 = (a+b)^2 \Rightarrow a - b + 14 = (a+b)^2$$

$$b - a + 6 = (a-b)^2 \Rightarrow (b-a)^2 = b - a + 6 \Rightarrow (b-a)(b-a-1) = 6$$

$b - a = 3$ или $b - a = -2$

$b - a + 3$ … $b - a - 1 = -3$

211007413 (U807124 M1273403)

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$ Черновик №2

$\cancel{\sqrt{a} - \sqrt{b} + 4 = 2\sqrt{ab}}$

$\cancel{\sqrt{a} - \sqrt{b} + 4 = 2\sqrt{ab}}$ $-4 \le x \le 6$

$a+b=10$ $a-b+4=2ab$

$a^2+b^2=10$

$\cancel{a-b+4-10=}$

$10-4-(a-b)=a^2+b^2-2ab$

$6+b-a=(b-a)^2$

$6=(b-a)(b-a-1)$

$\begin{array}{cc} \shortparallel & \shortparallel \\ 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{array}$

$\cancel{8}$ 1° $\sqrt{6-x}-\sqrt{x+4}=3 \Rightarrow \sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=-3 \Rightarrow 2\sqrt{24+2x-x^2}=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{24+2x-x^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow 24+2x-x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x^2-2x-23\frac{3}{4}=0$

$D=4+95=99$

$x=\frac{2\pm\sqrt{99}}{2}$ $23\cdot4=95$

399

211007413 (U807124 M1273403)

Черновик №3

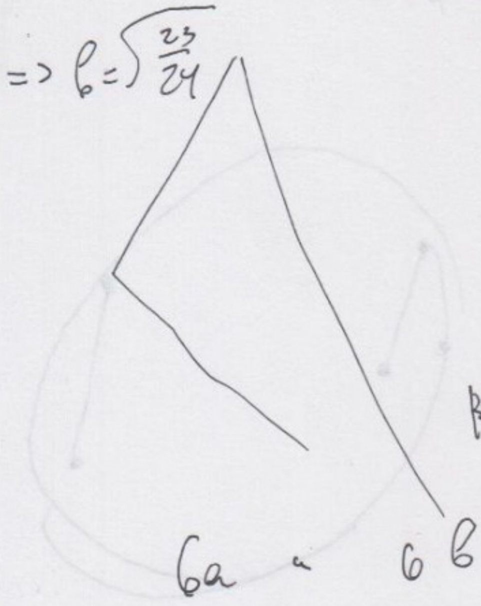
$24b^2=23 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $9a^2+35b^2=32$

$\Rightarrow$ $25a^2+b^2=4$

$\Rightarrow b=\sqrt{\frac{23}{24}}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$



~~30~~ab

$\frac{5}{2}$

$36a^2+36b^2=36 \Rightarrow a^2+b^2=1$

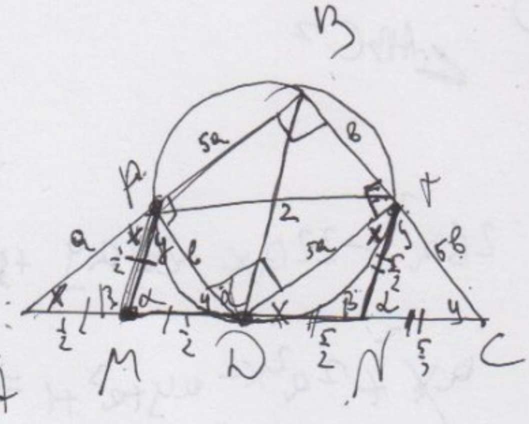
$\angle ABC=\pi-\angle BAC-\angle BCA=x+y$

$x=\cancel{90^\circ}\ \pi-\beta-\left(\frac{\pi}{2}-(\pi-\alpha-\angle BCA)\right)=$

$=\pi-\beta-\left(\alpha+\angle BCA-\frac{\pi}{2}\right)=$

$=\frac{3}{2}\pi-\angle BCA-\alpha+\beta=$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}-\angle BCA$



$2y+\alpha=2x+\beta=180^\circ$

$2(x+y)+\alpha+\beta=360^\circ$

$2(x+y)=180^\circ \Rightarrow (x+y)=90^\circ \Rightarrow \angle ABC=90^\circ$

$AB^2\cdot BC^2=(29\cdot5)(29\cdot5\cdot\cos\alpha-$

$-29\cdot8\cos\alpha$

$\cancel{(AB\cdot BC)^2=(29\cdot5)(20\cdot5\cos\alpha-}$

-29

8) $AD=1$

$DC=5$

$BD=2$

$1+4-2\cos\alpha\cdot4=AB^2$

$5-8\cos\alpha=AB^2$

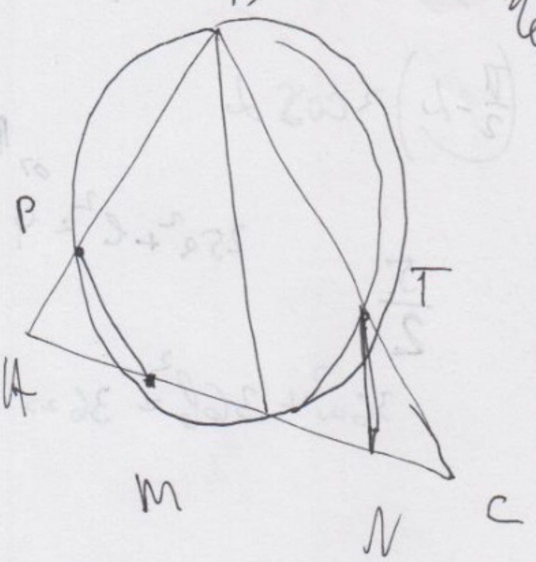
$25+4+2\cos\alpha\cdot5\cdot2=BC^2$

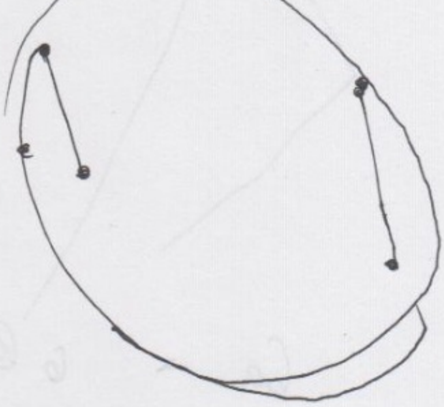
$29+20\cos\alpha=BC^2$

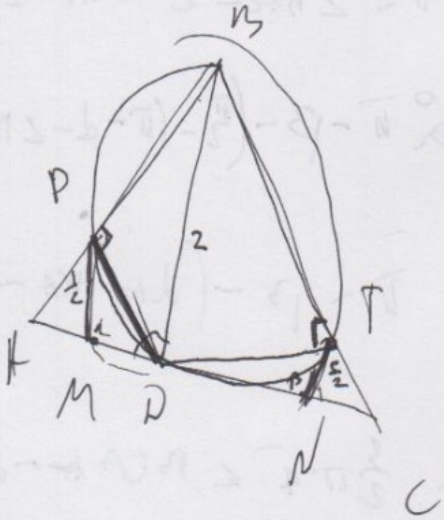
$\cancel{48+12}\cos\alpha=$

211007413 (U807124 M1273403)

Черновик №4







540

$\angle ABC = ?$

$$26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$$

$$ax^2 + 2a^2x - ay + a^3 + 1 = 0$$

$$-\frac{b}{2a}$$

$b = 2a^2$

$$\frac{-2a^2}{2a} = -a$$

$$\frac{4a^3+1}{a} <$$

$a^3 + 2a^3 - ay + a^3 + 1 = 0$

$4a^3 - ay + 1 = 0$

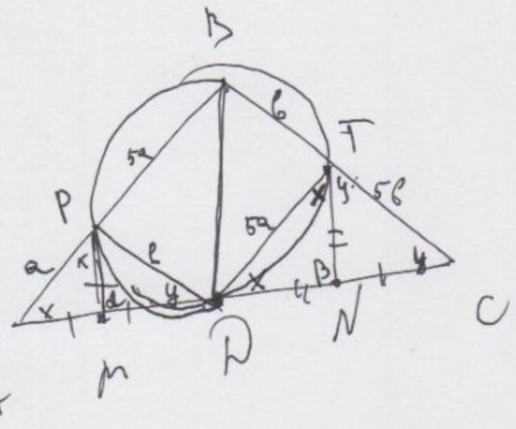
$$y = \frac{4a^3+1}{a}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 22 \\ \hline 32 \\ 32 \\ \hline 352 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 \\ \times 26 \\ \hline 96 \\ 32 \\ \hline 416 \end{array}$$

211007413 (U807124 M1273403)

Чистовик ~~Черн~~. Лист №1

№1



а) По условию $PM \parallel TN \Rightarrow AC$ – их секущая $\Rightarrow \angle PMD + \angle TND = 180^\circ$. Пусть $\angle PMD = \alpha$, $\angle TND = \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ$

Заметим, что раз BD – диаметр, то $\angle BPD$ и $\angle BTD$ опираются на диаметр окр-ти $\Rightarrow$ равны по $90^\circ \Rightarrow$ смежные с ними углы $\angle DPA$ и $\angle DTC$ тоже равны по $90^\circ \Rightarrow PM$ и TN – медианы в прямоуг. треугольниках $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ соотв. $\Rightarrow TN = \frac{1}{2} DC = DN = NC$ и $PM = \frac{1}{2} AD = AM = MD$. Пусть $\angle PDM = y$, $\angle TDN = x$. Тогда раз $TN = ND$, то $\angle NTD = x$ и раз $PM = MD$, то $\angle MPD = \angle MDP = y \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в $\triangle$-ах PMD и TND углы равны по α, y, y и β, x, x соотв. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha + 2y = \beta + 2x = 180^\circ \Rightarrow (\alpha+\beta) + 2(x+y) = 360^\circ$. $\alpha+\beta = 180^\circ \Rightarrow 2(x+y) = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y = 90^\circ$. $\angle ABC = 360^\circ - \angle BPD - \angle BTD - \angle PDT$. $\angle BPD = \angle BTD =$

$= 90^\circ \Rightarrow \angle ABC = 180^\circ - \angle PDT = \angle PDA + \angle TDC = x + y = 90^\circ \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$

б) Пусть $AP = a$, $PD = b$. Заметим, что $\angle TNC = \angle CTN = \frac{\beta}{2} = y$

Аналогично $\angle PAD = \angle MPA = x \Rightarrow \triangle APD \sim \triangle DTC$, причём $5PM = NT \Rightarrow$

$\Rightarrow TD = 5AP$ и $TC = 5PD \Rightarrow TD = 5a$, $TC = 5b$. Заметим, что раз

PM – медиана в прямоуг $\triangle APD$ и т.д. $AM = MD = PM = \frac{1}{2} \Rightarrow AD = 1 \Rightarrow$ по Т. Пифагора

211007413 (U807124 M1273403)

$a^2 + b^2 = 1$. Заметим, что раз $\angle ABC = 90^\circ$, то 4х уг-к $DPBT$ – прямоугольник

Чистовик. Лист №2

№1

б) (продолжение) 4^х-уг-к DPBT – прямоугольник, т.к. $\angle$ ~~PB~~ $BPD = \angle BTD =$

$= 90°$, т.к. они опираются на диаметр, $\angle ABC = 90° \Rightarrow$ по сумме

углов в 4^х-уг-ке $\angle PDT$ – тоже прямой $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $PD = BT$ и

и $DT = PB$, т.е. $BT = b$, а $DT = 5a$. По т. Пифагора

$BT^2 + DT^2 = BD^2$, т.е. $b^2 + 25a^2 = 4$, а $a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow 24a^2 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = \frac{3}{24} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{3}{24}} \Rightarrow b^2 = \frac{21}{24} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{21}{24}} \Rightarrow ab =$

$= \frac{3\sqrt{7}}{24} \Rightarrow 6a \cdot 6b = 36ab = \frac{\overset{3}{\cancel{36}} \cdot 3 \cdot \sqrt{7}}{\underset{2}{\cancel{24}}} = \frac{9\sqrt{7}}{2} = AB \cdot BC = 2S_{ABC} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$

Ответ: а) $90°$ б) $\frac{9\sqrt{7}}{4}$

211007413 (U807124 M1273403)

Чистовик. Лист №3

Задача №2

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2} = 2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{6-x}$.

ОДЗ: $-4 \le x \le 6$, чтобы подкоренные выражения были ≥ 0

$]\ \sqrt{x+4} = a \ge 0$

$\sqrt{6-x} = b \ge 0$

Тогда ① $a - b + 4 = 2ab$ и ② $a^2+b^2=10$

~~[illegible]~~ в ①

Вычтем из ② выражения ①, ~~Получим~~ $\cancel{a^2+b^2}$ перевернув равенство в ①, т.е. $a^2+b^2-2ab = 10-(a-b+4) = 10+b-a-4 = 6+b-a$,

т.е. $\cancel{(a-b)^2=}\ (b-a)^2 = 6+b-a \Rightarrow (b-a)(b-a-1)=6$

~~Первый случай.~~

a ~~[illegible]~~ $]\ b-a=t \Rightarrow t(t-1)=6. \Rightarrow t^2-t-6=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (t+2)(t-3)=0 \Rightarrow$ корни $t=-2$, $t=3$

Первый случай.

$t=-2 \Rightarrow b-a=-2 \Rightarrow \sqrt{6-x}-\sqrt{x+4}=-2 \Rightarrow \sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=6=$

$=2\sqrt{24+2x-x^2} \Rightarrow \sqrt{24+2x-x^2}=3 \Rightarrow 24+2x-x^2=9 \Rightarrow x^2-2x-15=0$

$D=64 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm 8}{2}=1\pm 4$ – оба варианта подходят под ОДЗ

Второй случай

$t=3 \Rightarrow b-a=3 \Rightarrow \sqrt{6-x}-\sqrt{x+4}=3 \Rightarrow \sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=1=2\sqrt{24+2x-x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 24+2x-x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x^2-2x-23\frac{3}{4}=0$. $D=4+4\cdot 23\frac{3}{4}=99 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{99}}{2}$

$\sqrt{99}<10 \Rightarrow \frac{2+\sqrt{99}}{2} < \frac{2+10}{2}=12 \Rightarrow$ подх. под ОДЗ, а $\frac{2-\sqrt{99}}{2} > \frac{2-10}{2} \geq -4$ – подх. под ОДЗ

$\Rightarrow$ Ответ: $x=5$, $x=-3$, $x=\frac{2+\sqrt{99}}{2}$, $x=\frac{2-\sqrt{99}}{2}$

Чистовик. Лист №4

Задача №3

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$ - парабола. Вершина параболы по оси Ox это $-\frac{b}{2a}=-\frac{2a^2}{2a}=-a$ => по ~~оси Oy~~ это

~~a^3-2a^3~~ подставим в ур-е. Получим $a^3-2a^3-ay+a^3+1=0$ =>

=> $1-ay=0$ => $y=\frac{1}{a}$ (1)

$26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$, ∃ это ур-е по y

$D=(8x-20a)^2-4\cdot4\cdot(5x^2-22ax+26a^2)=64x^2-320ax+400a^2-$

$-80x^2+252ax-416a^2=-(16x^2-68ax-16a^2)$ =>

=> $y_{1,2}=\frac{20a-8x\pm\sqrt{-(16x^2-68ax-16a^2)}}{8}$ (2) => ~~Далее~~ вещи

(1) и (2) должны быть по разные стороны от

$3x-y=4$.

211007413 (U807124 M1273403)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007413**

ID профиля: **807124**

Вариант 9

черновик №1

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4 + 3x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

$\exists\ x^2=a$
$y^2=b$

$a+b=-1$

$ab=4 \Rightarrow a=\frac{4}{b}$

$\frac{4}{b}+b=-1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{2}{a+b} + ab = 2 \Rightarrow \frac{2}{2} \\ a^2+b^2+2ab+ab=5 \end{cases}$$

$\frac{2}{a+b}+ab=2$

$(a+b)^2+ab=5$

$\Rightarrow b^2+b+4=0$

$\Rightarrow$

1) $ab=4$

2) $ab=1$

1) $a+b=-1$

2) $a+b=2$

$\Rightarrow \frac{2}{a+b} + 3 = (a+b)^2$

$\exists\ a+b=x$

$3 = \cancel{2(a+b)+(a+b)}\ (a+b)^2 - \frac{2}{a+b}$

$\cancel{1}+3-2=-4$

$-1, 2$

$3 = t^2 - \frac{2}{t} \Rightarrow t^3-3t-2=0$

$t=-1$ — решение

$(t+1)^2=(t^2+2t+1)(t-2)=$

$=t^3+2t^2+t-$

$-2t^2-4t-2=$

$=t^3-3t-2$

$t^3+t+2=0$

$D=1^2-8=-7<0$

$t^3-3t-2\ |\ t-1$

$-t^3-t^2 \quad\ |\ t^2+t+2$

t^2-3t

$-t^2-t$

$4t-2$

$-2t-2$

0

$t^2-t-2=0$

$D=1+8=9$

$\frac{1\pm3}{2}$, $t_1=2$

$t_2=-1$

$t^3-3t-2\ |\ t+1$

$-t^3+t^2 \quad\ |\ t^2-t-2$

$-t^2-3t$

$-t^2-t$

$-2t-2$

211007413 (U807124 M1273404)

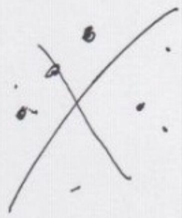
Черновик №2

$$\frac{BC^2\cdot\sin 60^\circ}{2}+\frac{BC\cdot AD\cdot\sin 120^\circ}{2}+\frac{AD^2\cdot\sin 60^\circ}{2}+\frac{BC\cdot AD\cdot\sin 120^\circ}{2}=$$

$$=\frac{9\cdot\sin 60^\circ}{2}+\frac{21\cdot\sin 120^\circ}{2}+\frac{49\cdot\sin 60^\circ}{2}+\frac{21\cdot\sin 120^\circ}{2}=$$

$$=\frac{9\cdot\sqrt{3}}{4}+\frac{21\cdot\sqrt{3}}{2}+\frac{49\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{100\sqrt{3}}{4}=25\sqrt{3}$$

$$\frac{(9+49-21)^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{(37)^2\cdot\sqrt{3}}{4}$$



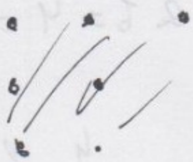
C_{113} $\quad 113\cdot(57\cdot57-113)+\frac{113\cdot112}{2}$ $\quad (57\cdot57-224)113+\frac{113\cdot112}{2}$

$57\cdot57-113-$

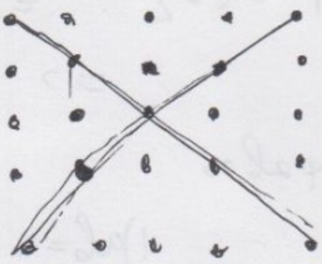
$$\begin{array}{r} 57\\ \times 57\\ \hline 399\\ 285\\ \hline 3249\\ -\ 113\\ \hline 3136\\ -\ 110\\ \hline 3026 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3092\\ \times 113\\ \hline 9276\\ 3092\\ 3092\\ \hline 349396 \end{array}$$

Черновик №3

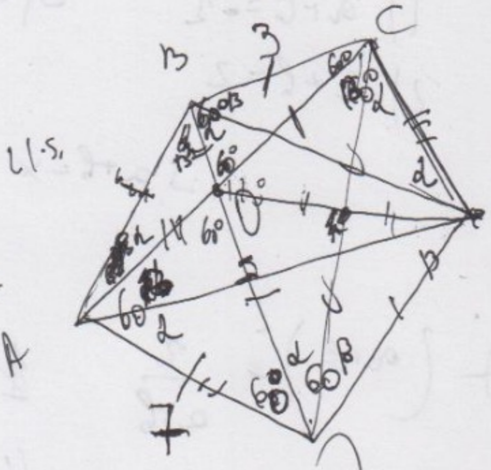


57x57



$$\frac{57\times57-57-56-56}{2}$$

$CT = OD,\ DT = CO$



$\alpha+\beta=60^\circ$

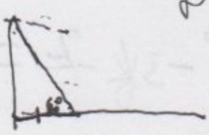
$\exists\ \angle TCD=\alpha$

$\angle TDC=\beta$

$$\frac{9\cdot\sin 60^\circ}{2}+$$

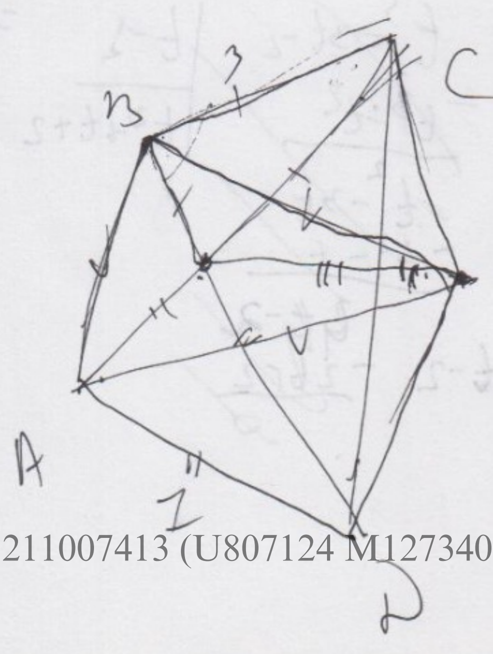
$\parallel$

$$\frac{BC^2\cdot\sin 60^\circ}{2}+$$



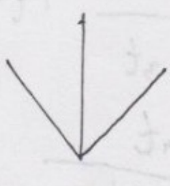
$$\frac{BC\cdot CT\cdot\sin 120^\circ}{2}+\frac{CT^2\cdot\sin 60^\circ}{2}+\frac{BC\cdot CT\cdot\sin 120^\circ}{2}$$

$\Rightarrow \angle DCO=\beta,\ \angle CDO=\alpha,\ \angle TAD=\alpha,\ \angle ATD=\beta$, т.к. все подобны!



$BT^2=BC^2+CT^2-2\cos 120^\circ\cdot BC\cdot CT$

$=BC^2+CT^2-BC\cdot CT$



$$\frac{(BC^2+CT^2-BC\cdot CT)\cdot\sin 60^\circ}{2}$$

~~Чистовик~~ Черновик №4

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times 37 \\ \hline 259 \\ 111 \\ \hline 1369 \end{array}$$

$$\frac{1369\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{37\sqrt{3}}{4} : 25\sqrt{3} = \frac{37}{100}$$

211007413 (U807124 M1273404)

Чистовик. Лист №1

№4

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

$] \; x^2 = a$

$y^2 = b$

ОДЗ: $x^2+y^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{a+b} + ab = 2 \\ a^2+b^2+2ab+ab = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{a+b} + ab = 2 \; (1) \\ (a+b)^2 + ab = 5 \; (2) \end{cases}$$

Вычтем (1) из (2)

$(a+b)^2 - \frac{2}{a+b} = 3 \; \cancel{\Leftrightarrow (a+b)^2}$ $\;] \; a+b = t \; (\Rightarrow t = x^2+y^2) \Rightarrow t^2 - \frac{2}{t} = 3 \Leftrightarrow t^3 - 2 = 3t$, т.к.

$t \neq 0$ по ОДЗ $\Rightarrow t^3 - 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t+1)^2(t-2) = 0 \Rightarrow$ корни

$t_1 = -1, \; t_2 = 2.$

Первый случай. $t = -1 \Rightarrow a+b = -1 \Rightarrow (a+b)^2 + ab = 5 \Rightarrow 1 + ab = 5 \Rightarrow ab = 4$

$\Downarrow$

$a \neq 0$

$b \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = -1 \\ ab = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{b} \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{b} + b = -1 \Rightarrow b^2 + 4 = -b \Rightarrow b^2 + b + 4 = 0. \Rightarrow$$

$\Rightarrow D = 1 - 16 = -15$

$y = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{15}i}{2}}$

$\Uparrow$

$\Rightarrow b_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2} \Rightarrow b_1 = \frac{-1+\sqrt{15}i}{2}$; $b_2 = \frac{-1-\sqrt{15}i}{2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{-1-\sqrt{15}i}{2}}$

$\Downarrow$

$a_1 = \frac{4}{b_1} = \frac{8}{-1+\sqrt{15}i} = \frac{8(-1-\sqrt{15}i)}{1+15}$ $\; \frac{-1-\sqrt{15}i}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-1-\sqrt{15}i}{2}}$

$a_2 = \frac{4}{b_2} = \frac{8}{-1-\sqrt{15}i} = \frac{8(-1+\sqrt{15}i)}{1+15} = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{15}i) \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{15}i}{2}}$

Второй случай

$t = 2 \Rightarrow a+b = 2$. $(a+b)^2 + ab = 5 \Rightarrow ab = 1 \Rightarrow \begin{cases} a+b = 2 \\ ab = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{b} \end{cases} \Rightarrow b + \frac{1}{b} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 - 2b + 1 = 0 \Rightarrow (b-1)^2 = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$, $b = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

211007413 (U897124 M1273404)

Ответ: ...

Чистовик. Лист №2

№4 (продолжение)

Ответ: $\left(\pm\sqrt{\frac{-1-\sqrt{15}i}{2}}; \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{15}i}{2}}\right), \left(\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{15}i}{2}}; \pm\sqrt{\frac{-1-\sqrt{15}i}{2}}\right), (\pm 1; \pm 1)$

211007413 (U807124 M1273404)

Задача №5 Чистовик. Лист №3

] Точка = узел.

Заметим, что точек лежащих на прямых $y=x$ и $y=57-x$ ~~ровно~~ и находящихся внутри квадрата ровно 113, т.к. это все точки, лежащие на главных диагоналях.

Нам нужно выбрать две точки, одна из которых лежит на этих диагоналях => способов её выбрать 113.

Кол-во способов выбрать вторую точку это кол-во способов выбрать точку не лежащую в одной строке/столбце с первой или на главной диагонали ~~с первой~~ + кол-во способов выбрать точку лежащую на одной из главных диагоналей. Первое слагаемое равно $57 \cdot 57 - 113 - 110$, т.к. всего точек внутри квадрата $57 \cdot 57$, на диагоналях лежат 113, в одном столбце и строке вместе с первой точкой лежат 113 узлов, два из них ~~в одном~~ лежат на главной диагонали и еще 1 это первая точка которую мы отмечали => $113 - 3 = 110$ => таких способов $113 \cdot (57 \cdot 57 - 113 - 110)$. Кол-во способов выбрать две точки на диагоналях это $\frac{113 \cdot 112}{2}$, пополам, т.к. считаем два раза

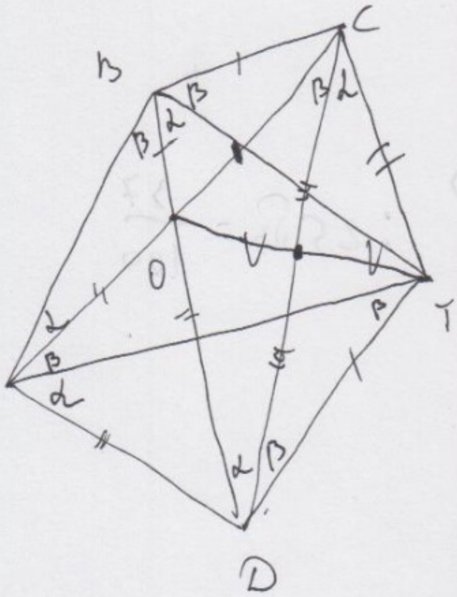
Итого способов $113 \cdot (57 \cdot 57 - 113 - 110 + 66) = 349396$

Ответ: 349396

211007413 (U807124 M1273404)

Чистовик. Лист №4

Задача №6



а) Проведём CT и DT. Заметим, что $4^х$-уг-к $OCTD$ — ||мм, т.к. диагонали точкой пересеч. делятся пополам $\Rightarrow CT = OD$, $DT = OC$

$\angle COD = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, т.к. ΔBOC — равносторон. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OCT = 60^\circ \Rightarrow \angle ODT = 60^\circ$,

$\angle CTD = \angle DOC = 120^\circ$.] $\angle TCD = \alpha$

$\angle TDC = \beta \Rightarrow \alpha + \beta + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle DCO = \beta$, $\angle ODC = \alpha$. Заметим, что $\angle ADT = \angle ADO + \alpha + \beta = 60^\circ + \alpha + \beta =$ $= 120^\circ$, т.к. ΔAOD — равносторонний $\Rightarrow \Delta ADT = \Delta DTC$ по двум сторонам и углу между ними ($CT = OD = AD$, DT — общая, $\angle ADT =$ $= \angle CTD = 120^\circ$) $\Rightarrow \angle TAD = \alpha$, $\angle ATD = \beta$. $\angle OAD = \angle OAT + \angle TAD =$ $= \angle OAT + \alpha = 60^\circ = \alpha + \beta \Rightarrow \angle OAT = \beta$. Заметим, что $\Delta BCT = \Delta CTD$ по 2м сторонам и углу между ними (CT — общ, $BC = CO = DT$, $\angle BCT =$ $= \angle CTD$ (аналогично $\angle ADT$)) $\Rightarrow \angle CBT = \beta \Rightarrow$ раз $\angle CBO = 60^\circ$, то $\angle TBO = \alpha$. Теперь заметим, что $\Delta ABO = \Delta CDO$ по двум сторонам и углу между ними ($BO = OC$, $AO = OD$, $\angle AOB = \angle COD$, как вертикальные) $\Rightarrow \angle OBA = \beta$, $\angle OAB = \alpha \Rightarrow \angle TBA = \angle TAB = \alpha + \beta = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABT$ — правильный

211007413 (U807124 M1273404)

Чистовик. Лист №5

Задача №6

б) $S_{ABT} = \dfrac{BT^2 \cdot \sin 60°}{2}$. По т. косинусов $BT^2 = BC^2 + CT^2 -$

$- 2 \cdot \cos \angle BCT \cdot BC \cdot CT$, раз $\angle BCT = 120°$, а $CT = AD$, то

$BT^2 = BC^2 + AD^2 - 2 \cdot \cos 120° \cdot BC \cdot AD = BC^2 + AD^2 - BC \cdot AD$

$S_{ABCD} = S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} + S_{AOB} = \dfrac{BC^2 \cdot \sin \overset{\angle BOC}{60°}}{2} + \dfrac{CO \cdot OD \cdot \sin \overset{\angle COD}{120°}}{2} +$

$+ \dfrac{AD^2 \cdot \sin \overset{\angle AOD}{60°}}{2} + \dfrac{AO \cdot OB \cdot \sin \overset{\angle AOB}{120°}}{2} = \dfrac{BC^2 \cdot \sin 60°}{2} + \dfrac{BC \cdot AD \cdot \sin 120°}{2} +$

$+ \dfrac{AD^2 \cdot \sin 60°}{2} + \dfrac{BC \cdot AD \cdot \sin 120°}{2}$

Раз $BC = 3$, $AD = 7$, то $S_{ABT} = \dfrac{(3^2 + 7^2 - 3 \cdot 7) \cdot \sin 60°}{2} = \dfrac{37 \cdot \sqrt{3}}{4}$

$S_{ABCD} = \dfrac{3^2 \cdot \sin 60°}{2} + \dfrac{7^2 \cdot \sin 60°}{2} + 3 \cdot 7 \cdot \sin 120° =$

$= \dfrac{9\sqrt{3}}{4} + \dfrac{49\sqrt{3}}{4} + \dfrac{42\sqrt{3}}{4} = \dfrac{100\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \dfrac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \dfrac{37\sqrt{3}}{4} : \dfrac{100\sqrt{3}}{4} =$

$= \dfrac{37}{100}$. Ответ: б) $\dfrac{37}{100}$