Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

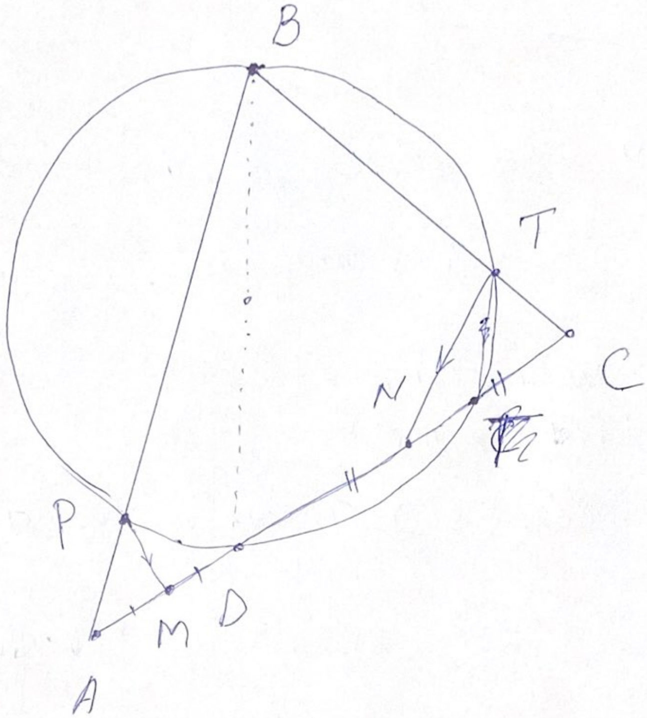
Шифр: **211007371**

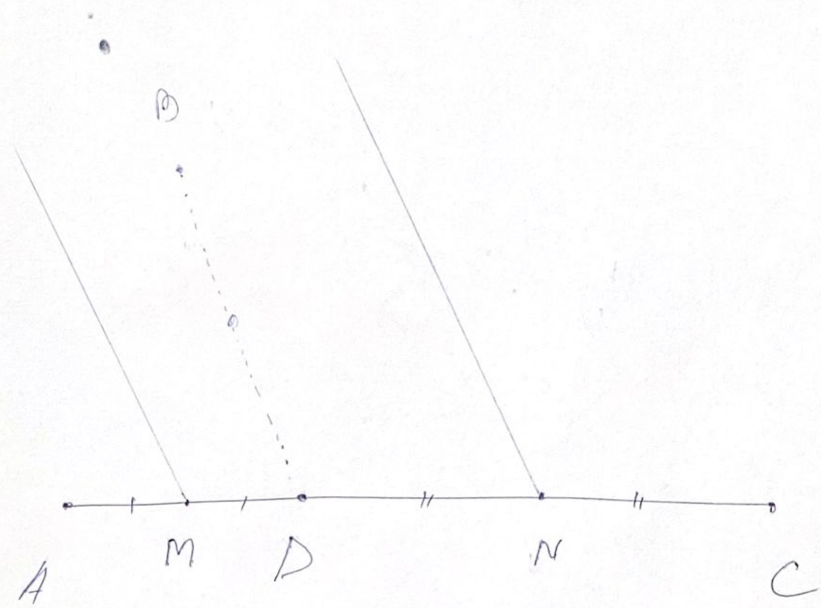
ID профиля: **873714**

Вариант 9

№1.

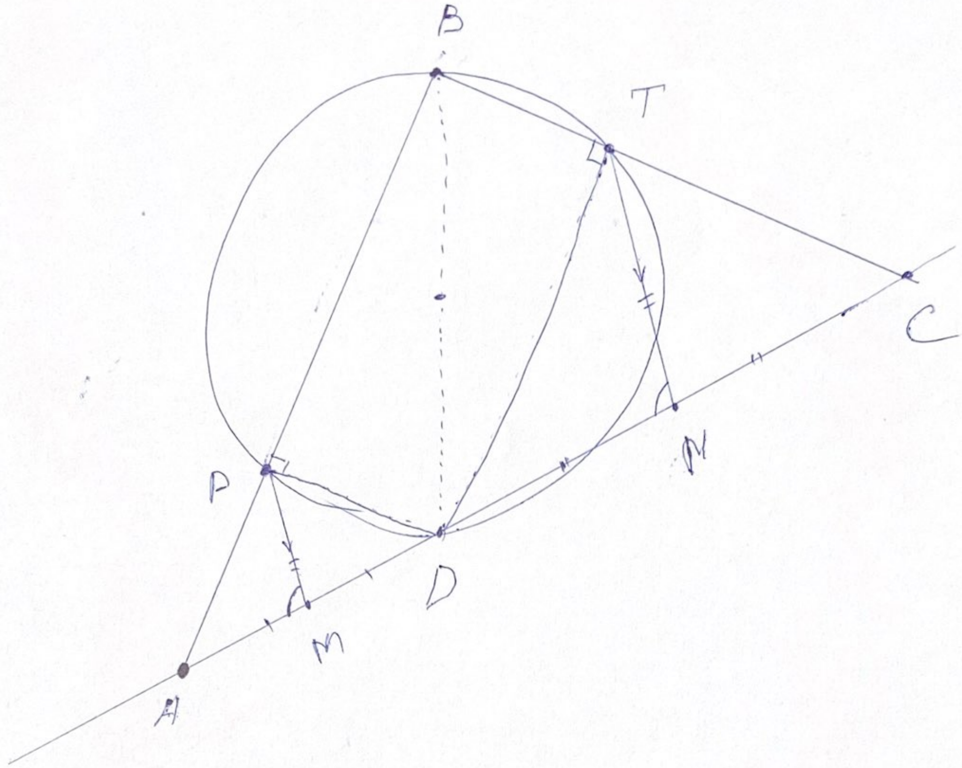
1 лист





№1.

2 лист



$\angle ABC = 90°$? – гипотеза.

$AP \cdot AB = AD \cdot AX$. – нет.

$\angle BTD = \angle BPD = 90°$ => $\triangle DTC$ и $\triangle DPA$ - прямоуг.

и $AM = MD = PM$,

$DN = NT = NC$.

$\triangle AMP \sim \triangle DNT$ => соотношение сторон и $\triangle ADP \sim \triangle ACT$ =>

=> $\angle D = \angle C$ и $PD \parallel BC$ и $ABC = 90°$

УРА.

№1 б.

3 лист.

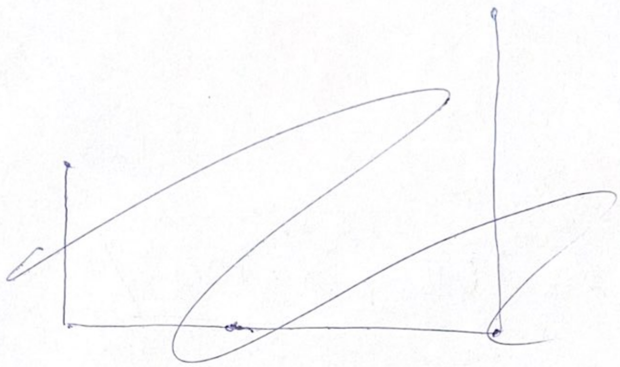
$AD = 1$

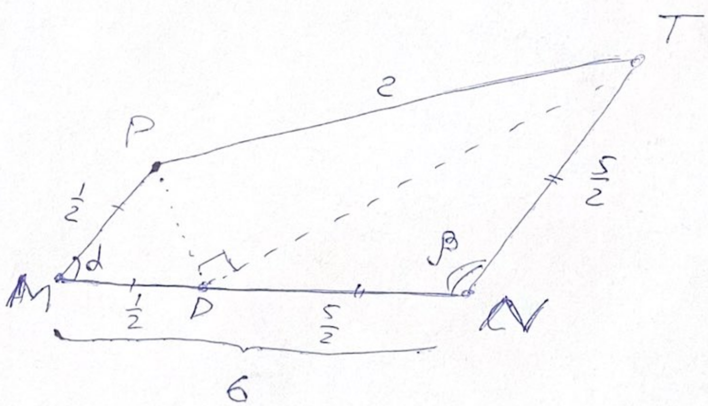
$DC = 5$

$AC = 6$, медиана в $\triangle ABC$: 3

$PT = 2$

$\angle DNT + \angle PMD = 180^\circ$





$PD^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$

$DT^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \cancel{2}\cdot\frac{5}{\cancel{2}}\cdot\frac{5}{2}\cos\beta = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} - \frac{25}{2}\cos\beta = \frac{25}{2}(1-\cos\beta)$

$\beta = \pi - \alpha \Rightarrow \cos\beta = \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

№ 8.

4 лист.

$PD^2 = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha),$

$DT^2 = \frac{5}{2}(1+\cos\alpha)$

$\Rightarrow PD^2 + DT^2 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{5}{2}\cos\alpha =$

$= 3 + 2\cos\alpha$

$3 + 2\cos\alpha = 2$

$2\cos\alpha = -1$

~~$\cos\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ (т.к $\alpha \in I \cup II$) $\boxed{\alpha = 120^\circ}$~~

$2\cos\alpha = 1$

$\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

$75 = 3 \cdot 25 = 3 \cdot 5^2 \Rightarrow \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

№2.

5 лист.

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$

~~24~~

$x^2-2x-24=0$

$\left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=-4; \end{array}\right.$ так $x^2-2x-24=(x+4)(x-6)$

$-x^2+2x+24=(x+4)(6-x)$

Замена: $u=x+4$, $v=6-x$; причём $u+v=10$

~~$\sqrt{u}=$~~

$\begin{cases} \sqrt{u}-\sqrt{v}+4=2\sqrt{uv}, & \Big|^2 \\ u+v=10 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{u}-\sqrt{v})^2+16+8(\sqrt{u}-\sqrt{v})=4uv, \\ u+v=10 \end{cases} \Rightarrow$

ООУ:

$x+4\geq 0 \Rightarrow x\geq -4$

$6-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 6$

$x\in[-4,6]$.

$\Rightarrow \begin{cases} u+v-2\sqrt{uv}+8\sqrt{u}-8\sqrt{v}+16=4uv, \\ u+v=10 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 26-2\sqrt{uv}+8\sqrt{u}-8\sqrt{v}=4uv \\ u+v=10 \end{cases} \Rightarrow$

~~$13-\sqrt{uv}+8\sqrt{u}-1$~~

$\Rightarrow \begin{cases} 13-\sqrt{uv}+4\sqrt{u}-4\sqrt{v}=2uv \\ v+u=10 \end{cases}$

Заметим:

$\sqrt{u}-\sqrt{v}=2\sqrt{uv}-4$

6 лист.

$13 - \sqrt{uv} + 4(2\sqrt{uv} - 4) - 2uv = 0$

$13 - \sqrt{uv} + 8\sqrt{uv} - 16 - 2uv = 0$

$13 + 7\sqrt{uv} - 16 - 2uv = 0$

$-3 + 7\sqrt{uv} - 2uv = 0$

$2uv - 7\sqrt{uv} + 3 = 0$

$$\sqrt{uv} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4\cdot 2\cdot 3}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} =$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ -24 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$= \frac{7 \pm 5}{4} \quad \left[\begin{array}{l} \sqrt{uv} = 3 \\ \sqrt{uv} = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$u = 10 - v$

$(10 - v)v = \frac{1}{4}$

$10v - v^2 - \frac{1}{4}$

$v^2 - 10v + \frac{1}{4} = 0 \qquad 4v^2 - 40v + 1 = 0 \rightarrow v = \frac{40 \pm \sqrt{40^2 - 4^2}}{8}$

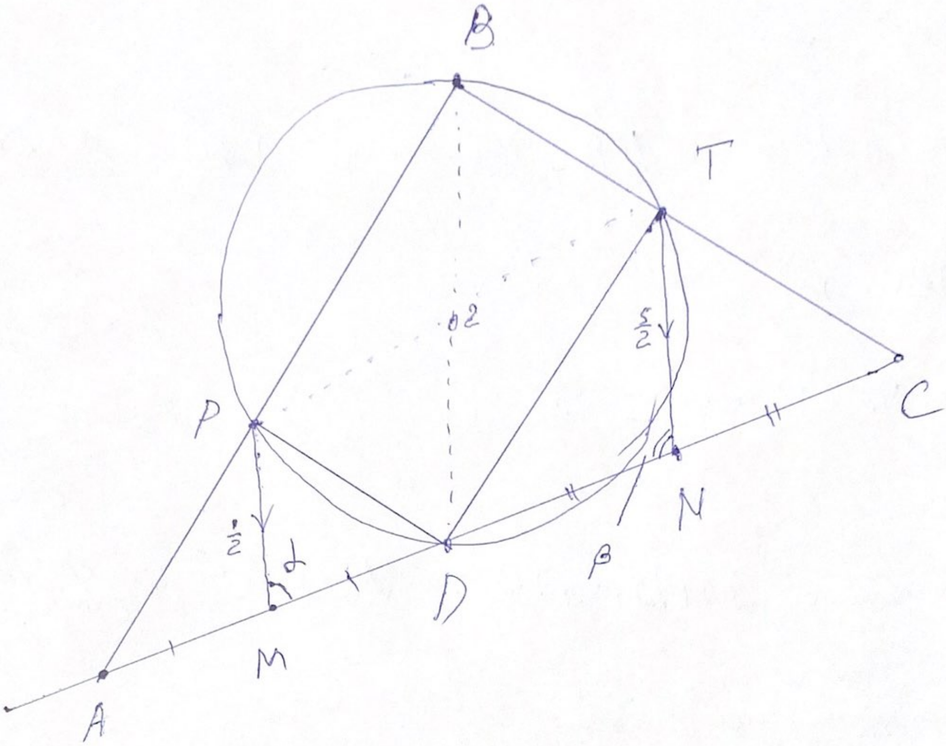
$\sqrt{(40-4)(40+4)} = \sqrt{36\cdot 44} = \sqrt{4\cdot 9\cdot 4\cdot 11} = \sqrt{4^2\cdot 3^2\cdot 11} = 12\sqrt{11}$

$$\left[\begin{array}{l} v = 5 - \frac{3}{2}\sqrt{11} \\ v = 5 + \frac{3}{2}\sqrt{11} \end{array}\right.$$

$1 - \frac{3\sqrt{11}}{2} \le 1 - \frac{3\cdot 3}{2} = 1 - 4{,}5 = -3{,}5$

Чистовик Часть 1.

Задача 1.



а) Найти: $\angle ABC$.

Решение.

BD - диаметр $\Rightarrow \angle BPD = \angle BTD = 90°$, поэтому $\triangle DTC$ и $\triangle DPA$ - прямоугольные.

M - середина AD, N - » DC $\Big\}$ $AM = MP = MD$, $DN = NT = NC$ по свойству прямоугольного треугольника.

$PM \parallel TN \Rightarrow \angle AMP = \angle DNT$, как соответственные $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AMP \sim \triangle DNT$ по двум сторонам (равнобедренные треугольники) и углу между ними. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{AP}{MA} = \dfrac{DT}{ND} \Rightarrow$ т.к. $AD = 2AM$ и $DC = 2DN$ $\dfrac{AP}{AD} = \dfrac{DT}{DC}$;

$\angle PAD = \angle TDC$ (как углы при основании подобный равнобедренных треугольников),

$$\left.\begin{array}{l} \angle PAD = \angle TDC \\ \dfrac{AP}{AD} = \dfrac{DT}{DC} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle APD \sim \triangle DTC \Rightarrow$$

$\Rightarrow \angle ADP = \angle ACB$ и $PD \parallel BC$, поэтому $\angle ABC = \angle APD = 90°$.

Ответ: $\angle ABC = 90°$

б) Известно: $MP = \frac{1}{2}$, $NT = \frac{5}{2}$, $BD = 2$

Найти: S_{ABC}

Заметим подобие $\triangle APD \sim \triangle ABC \sim \triangle DTC$ (о чём сказано ранее).

Запишем коэффициенты подобия:

$$\left.\begin{array}{l} AD = 2MP = 1, \\ DC = 2TN = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow AC = 6$$

$k_1 = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{6}$, $k_2 = \frac{DC}{AC} = \frac{5}{6}$;

Положим $\alpha = \angle PMD$, $\beta = \angle TND$; Заметим: $PM \parallel TN \Rightarrow \alpha + \beta = 180°$.

$\triangle PMD$: по т. косинусов:

$$PD^2 = MP^2 + MD^2 - 2MP \cdot MD \cos\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\alpha,$$

$\triangle DNT$: по т. косинусов:

$$DT^2 = DN^2 + NT^2 - 2DN \cdot NT \cos\beta = \frac{25}{2} + \frac{25}{2}\cos\alpha \text{ (т.к. } \cos\beta = -\cos\alpha)$$

$PBTD$ - прямоугольник $\Rightarrow \angle PDT = 90° \Rightarrow$

по т. Пифагора к $\triangle PDT$: $PT^2 = PD^2 + DT^2 = 3 + 2\cos\alpha$.

Чистовик Часть 1 | Лист 3

Задание 2.

п. 2б.

Итак,

$$2^2 = 3 + 2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{т.к. } \alpha \in (0, 180^\circ), \text{ то}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \alpha = 60^\circ \\ \hline \text{и } \beta = 120^\circ \end{array}}$$

Поэтому

$$PD^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow PD = \frac{1}{2};$$

$$DT^2 = \frac{25}{2} + \frac{25}{2}\cos\alpha = \frac{25}{2} + \frac{25}{4} = \frac{50+25}{4} = \frac{75}{4} \Rightarrow DT = \frac{5\sqrt{3}}{2};$$

из подобия:

$$\frac{DT}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{5}{6} \Rightarrow AB = \frac{6DT}{5} = \frac{15\sqrt{3}}{5} = 3\sqrt{3};$$

$$\frac{PD}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{6} \Rightarrow BC = 6PD = 3;$$

Итак,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2};$$

Ответ: $S_{ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Чистовик Часть 1. Лист 4

Задание 2.

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$.

О.О.Д.: $\left.\begin{array}{l} x+4 \geq 0, \\ 6-x \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x \in [-4, 6]$.

Заметим: $24+2x-x^2 = (x+4)(6-x)$

Произведём замену $u = x+4$, $v = 6-x$; так $u+v = 10$.

$\begin{cases} \sqrt{u} - \sqrt{v} + 4 = 2\sqrt{uv}, & |\uparrow 2 \\ u+v=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{u}-\sqrt{v})^2 + 16 + 8(\sqrt{u}-\sqrt{v}) = 4uv, \\ u+v=10 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} u+v-2\sqrt{uv} + 8(\sqrt{u}-\sqrt{v}) + 16 = 4uv, \\ u+v=10 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 26 - 2\sqrt{uv} + 8(\sqrt{u}-\sqrt{v}) = 4uv, & |:2 \\ u+v=10 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 13 - \sqrt{uv} + 4(\sqrt{u}-\sqrt{v}) = 2uv, \\ u+v=10 \end{cases} \Rightarrow$

Из первого уравнения системы видно, что

$\sqrt{u} - \sqrt{v} = 2\sqrt{uv} - 4$.

$\Rightarrow \begin{cases} 13 - \sqrt{uv} + 4(2\sqrt{uv} - 4) = 2uv, \\ u+v=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2uv - 7\sqrt{uv} + 3 = 0, \\ u+v=10 \end{cases} \Rightarrow$

Системы часть 1 — Лист 5

Задание 2.

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{uv} = \dfrac{7 \pm 5}{4}, \\ u+v=10 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{uv} = 3, \\ u+v = 10, \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{uv} = \dfrac{1}{2}, \\ u+v=10 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} uv = 9, \\ u+v=10, \end{cases} \\ \begin{cases} uv = \dfrac{1}{4}, \\ u+v=10 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=1, \\ v=9, \end{cases} \\ \begin{cases} v=1, \\ u=9, \end{cases} \\ \begin{cases} u=10-v, \\ (10-v)v = \dfrac{1}{4} \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=1, \\ v=9, \end{cases} \\ \begin{cases} v=1, \\ u=9, \end{cases} \\ \begin{cases} v = \dfrac{40 \pm \sqrt{40^2-4^2}}{8}, \\ u = 10-v \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} u=1, \\ v=9, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} v=1, \\ u=9, \end{cases} & (2) \\ \begin{cases} v = 5 - \dfrac{3\sqrt{11}}{2}, \\ u = 5 + \dfrac{3\sqrt{11}}{2}, \end{cases} & (3) \\ \begin{cases} v = 5 + \dfrac{3\sqrt{11}}{2}, \\ u = 5 - \dfrac{3\sqrt{11}}{2}; \end{cases} & (4) \end{array} \right.$$

Для каждой из (1, 2, 3, 4) решим систему отн. x.

(1): $\begin{cases} x+4=1, \\ 6-x=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3, \\ x=-3 \end{cases} \Rightarrow x=-3.$

(2): $\begin{cases} x+4=9, \\ 6-x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5, \\ x=5 \end{cases} \Rightarrow x=5.$

(3): $\begin{cases} 6-x = 5 - \dfrac{3\sqrt{11}}{2}, \\ x+4 = 5+\dfrac{3\sqrt{11}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6-5+\dfrac{3\sqrt{11}}{2} = 1+\dfrac{3\sqrt{11}}{2}, \\ x = 1+\dfrac{3\sqrt{11}}{2} \end{cases} \Rightarrow x = 1+\dfrac{3\sqrt{11}}{2}.$

(4): $\begin{cases} 6-x = 5+\dfrac{3\sqrt{11}}{2}, \\ x+4 = 5-\dfrac{3\sqrt{11}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-\dfrac{3\sqrt{11}}{2}, \\ x = 1-\dfrac{3\sqrt{11}}{2} \end{cases} \Rightarrow x = 1-\dfrac{3\sqrt{11}}{2};$

В ответ запишем те корни, которые содержатся в $[-4, 6]$, не лишним будет провести проверку.

Ответ: $x \in \left\{-3, 5, 1 \pm \dfrac{3\sqrt{11}}{2}\right\}$.

Черновик.

Проверка к заданию 2.

(7) ~~лист~~

лист № 6

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 \geq 0$ — когда?

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 0$

ООН: $x \in [-4, 6]$

$\sqrt{x+4} + 4 = \sqrt{6-x} \quad | \uparrow 2$

$x+4+16 + 8\sqrt{x+4} = 6-x$

$2x + 14 + 8\sqrt{x+4} = 0 \quad | :2$

$x + 7 + 8\sqrt{x+4} = 0$

$(x+4) + 8\sqrt{x+4} + 3 = 0$

при $x \in [-4, 6]$

Правая часть $2\sqrt{24+2x-x^2}$ всегда больше нуля

$\sqrt{x+4} = -4 \pm \sqrt{16-3} = -4 + \sqrt{13}$

$\sqrt{x+4} = \sqrt{13} - 4 < 0$

Итак по методу интервалов

Зафиксируем: все решения исходного уравнения лежат только в $[-4, 6]$ — это Область Возможных Решений.

Листовик:
Проверка к заданию 2

~~7 лист~~

лист 7

$1 - \frac{3\sqrt{11}}{2} > -4 \quad \Big| -1$

$-\frac{3\sqrt{11}}{2} > -5$

$\frac{3\sqrt{11}}{2} < 5 \quad \Big| \uparrow 2$

$\frac{9 \cdot 11}{4} < 25$

$\frac{99}{4} < 25$

$\frac{99}{4} < \frac{100}{4}$ — истина

Проверили, что $1 - \frac{3\sqrt{11}}{2} \in [-4, 6]$.

$1 + \frac{3\sqrt{11}}{2} < 6 \quad \Big| -1$

$\frac{3\sqrt{11}}{2} < 5$ — истина

Проверили, что $1 + \frac{3\sqrt{11}}{2} \in [-4, 6]$.

Поэтому ответ на листе 5 можно считать валидным.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007371**

ID профиля: **873714**

Вариант 9

№4.

1 лист.

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2, \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2, \\ (x^4+2x^2y^2+y^4)+x^2y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

Замена

$u = x^2+y^2;$

$v = x^2y^2$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{u} + v = 2, \\ u^2 + v = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{u} + v = 2, & (1) \\ u^2 - \dfrac{2}{u} = 3; & (2) \end{cases}$$

(2): $u^2 - \dfrac{2}{u} = 3 \quad | \cdot u \neq 0$

$u^3 - 2 - 3u = 0 \qquad u^3 - 3u - 2 = 0$

$\cancel{u^3 - 2u - u - 2 = 0} \qquad u^3 - 3u - 3 + 1 = 0$

$(u^3+1) - 3(u+1) = 0$

$(u+1)(u^2-u+1) - 3(u+1) = 0 \qquad [u^3 - u^2 + \cancel{u} + \cancel{u^2} - \cancel{u} + 1]$

$(u+1)(u^2-u+1-3) = 0$

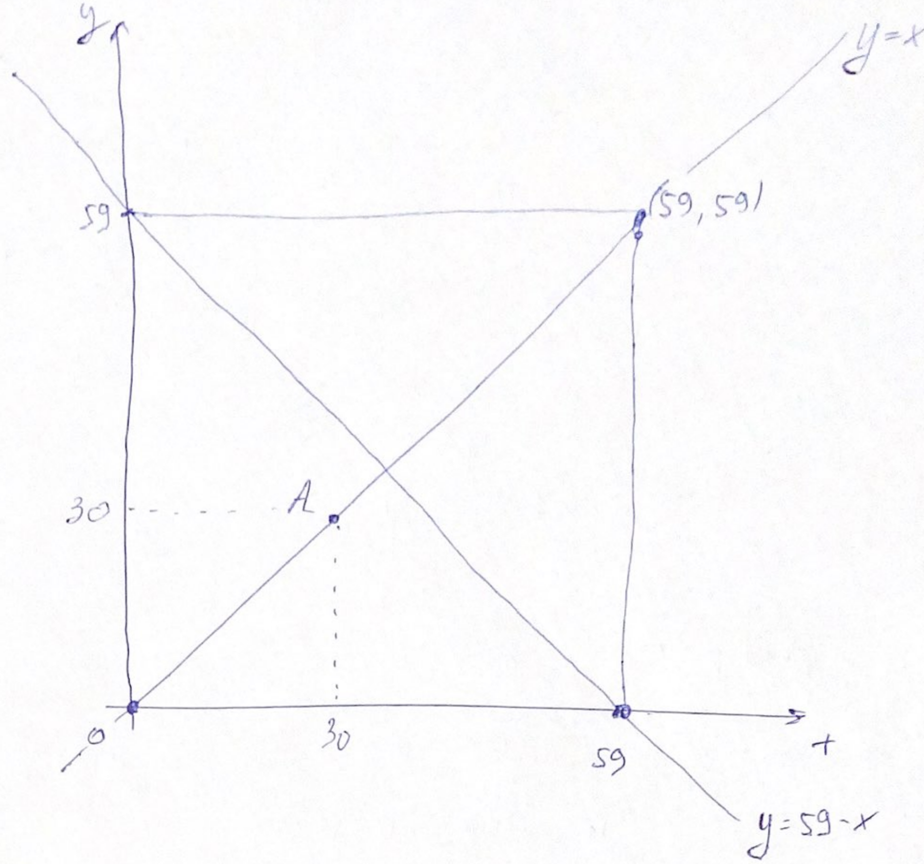
$(u+1)(u^2-u-2) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} u = -1, \\ \begin{cases} u = 2, \\ u = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u = -1, \\ u = 2 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\left[\begin{array}{l} u = 2 \\ u = -1 \end{array}\right.}$$

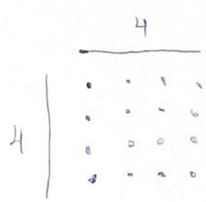
№5.

2 лист.



К дополнению:

Всего способов выбрать два узла сетки:



→ 2·2 варианта выбрать 1 узел в 4×4.

Выбрать в 59×59 : 57^2.

$\boxed{\text{два не узла: } 57^2(57^2-1)}$ ← НЕТ!

№5.

3 мест.

К доказательству:

Выберем один на диагонали: $57+56=113$

↑ минус центральная

$$\begin{array}{r} 57 \\ +\,56 \\ \hline 113 \end{array}$$

По горизонтали нельзя: 56 точек

» вертикали » : 56 точек

Можно: $57^2-56-56-1$. Выбираем одну из них.

$$\begin{array}{r} 58 \\ +\,58 \\ \hline 116 \end{array}$$

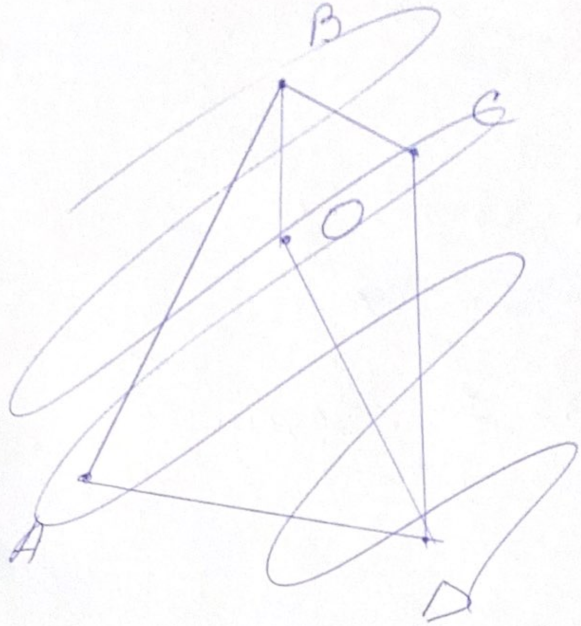
$$\begin{array}{r} 3364 \\ -\,115 \\ \hline 3249 \\ \times\,116 \\ \hline 19494 \\ +\,3249 \\ 3249 \\ \hline 376884 \end{array}$$

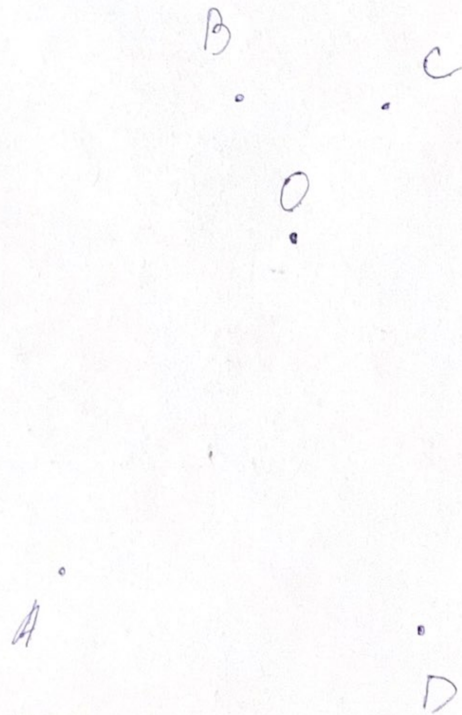
$$\begin{array}{r} 58 \\ +\,57 \\ \hline 115 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 58 \\ \times\,58 \\ \hline 464 \\ +\,290 \\ \hline 3364 \\ -\,117 \\ \hline 3247 \\ \times\,116 \\ \hline 19482 \\ +\,3247 \\ 3247 \\ \hline 376652 \end{array}$$

№6.

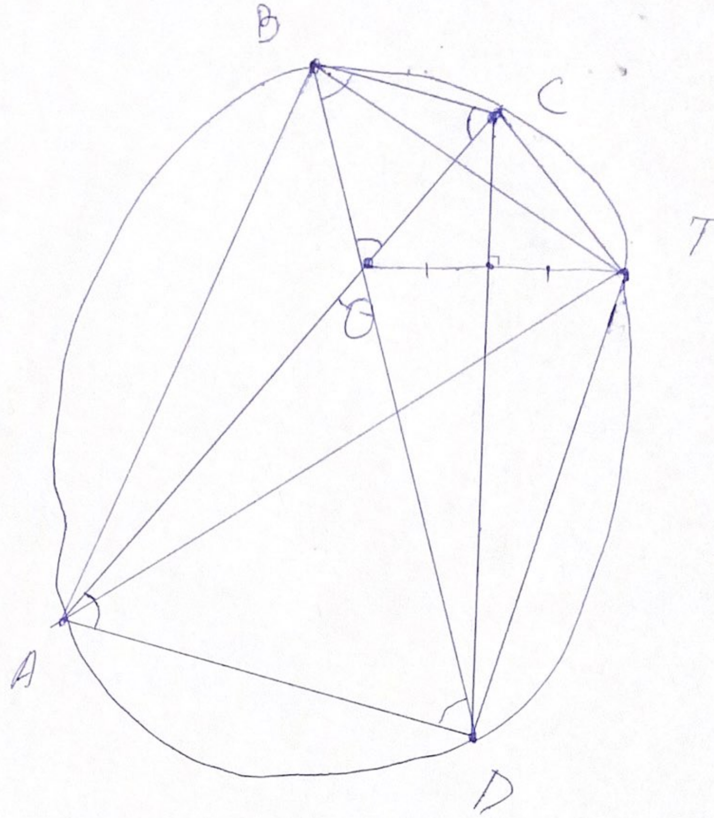
7 лист.

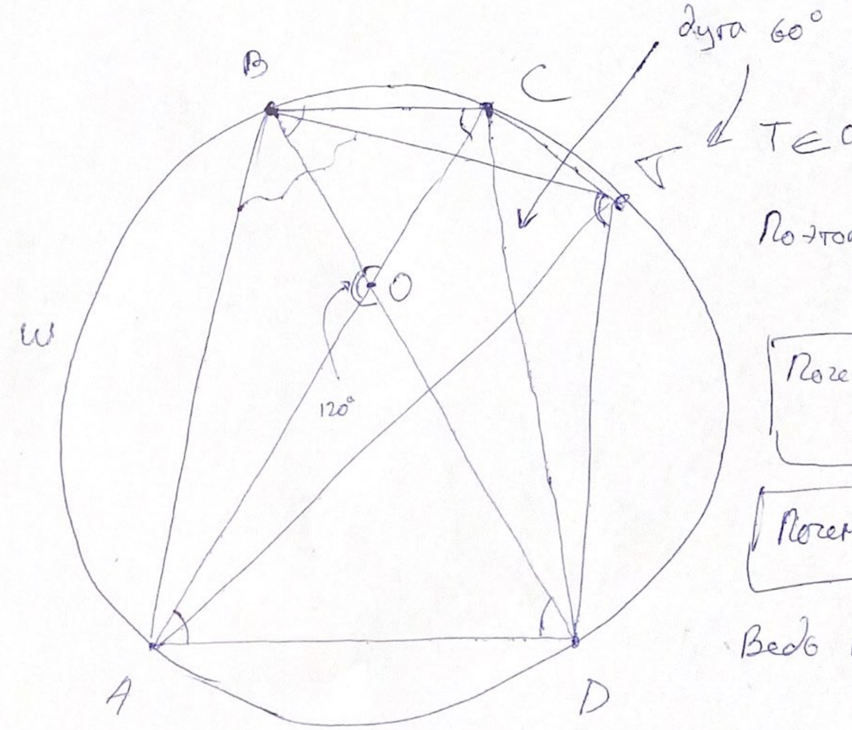




№6.

5 лист.





$T \in \omega$.

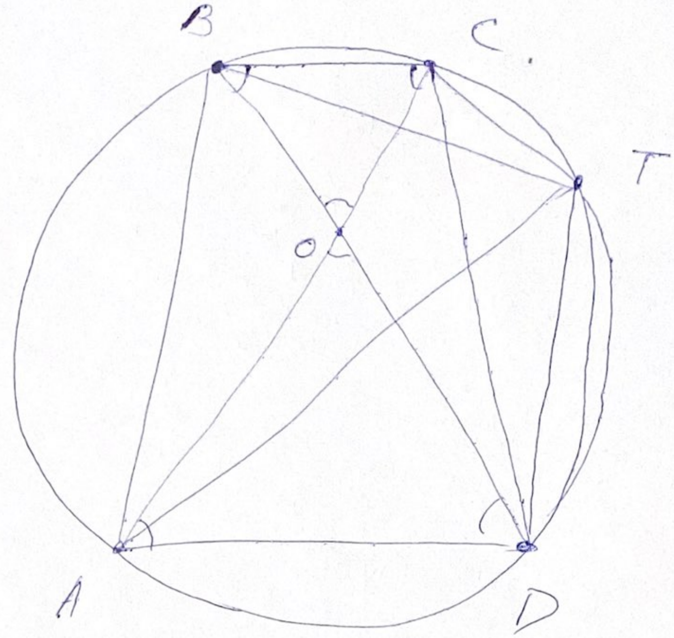
Поэтому $\angle BTA = 60°$.

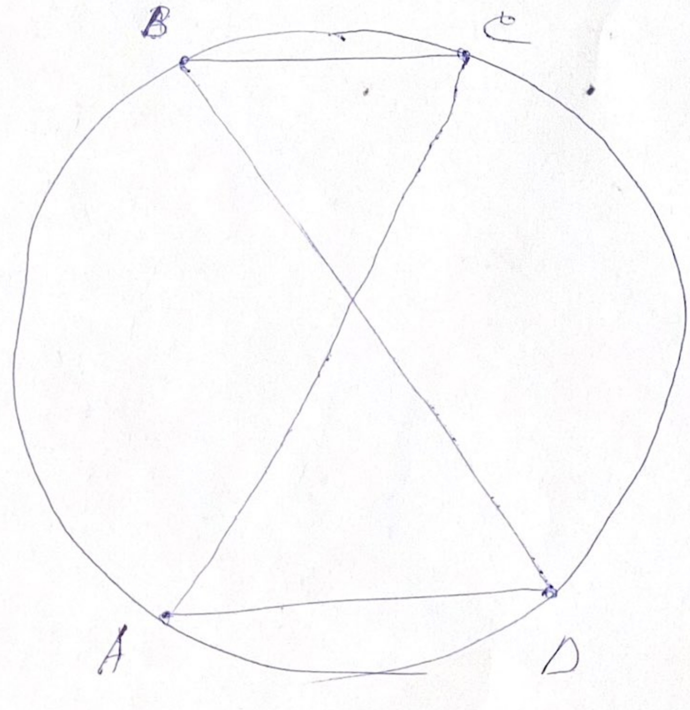
$\boxed{\text{Почему } \angle CBT = \angle ABD?}$

$\boxed{\text{Почему } CT = AD?}$

Ведь $CT = CO = BC$

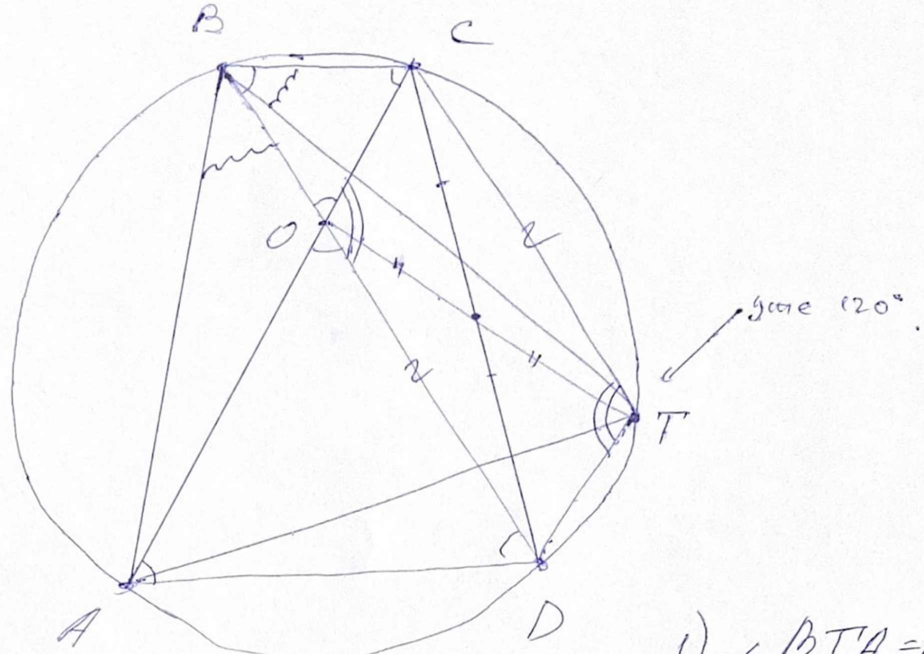
6 лист.





№6

7 лист.



1) $\angle BTA = 60^\circ$

2) $CT = OD = AD \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CBT = \angle ABD$

и $\angle ABT = 60^\circ$

ТОЖЕ!

AB - найдём

S_{ABCD} - найдём

S_{ABT} - найдём

$\frac{42}{2} = 21$

$21 + 9 = 30$

$49 + 30 = 79$

$$\begin{array}{r} 49 \\ +\ 9 \\ \hline 58 \\ +21 \\ \hline 79 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ +\ 9 \\ \hline 58 \\ +42 \\ \hline 100 \end{array}$$

Чистовик Часть 2 — 1 Лист

Задача 4.

ООС: $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$ одновременно не равны нулю

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2, \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2, \\ (x^2+y^2)^2+x^2y^2=5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2, \\ (x^2+y^2)^2-\frac{2}{x^2+y^2}=3; \end{cases}$$

Пусть $u=x^2+y^2$, $v=x^2y^2$, тогда

$$\begin{cases} \frac{2}{u}+v=2, \\ u^2-\frac{2}{u}=3; \end{cases}$$

Рассмотрим $u^2-\frac{2}{u}=3$

$u^2-\frac{2}{u}=3 \; \Big/ \cdot u \; (u\neq 0)$

$u^3-2-3u=0$

$u^3-3u-3+1=0$

$(u^3+1)-3(u+1)=0$

$(u+1)(u^2-u+1)-3(u+1)=0$

$$(u+1)(u^2-u-2)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=-1, \\ \begin{cases} u=-1, \\ u=2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=-1, \\ u=2; \end{array}\right.$$

Итак, $$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{2}{u}+v=2, \\ u=-1, \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{2}{u}+v=2, \\ u=2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=-1, \\ v=4; \end{cases} \\ \begin{cases} u=2, \\ v=1 \end{cases} \end{array}\right. \Longrightarrow$$

обр. замена

Чистовик Часть 2. 2 лист

$$\Rightarrow \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x^2+y^2=-1, \\ x^2y^2=4, \end{cases} \\ &\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ x^2y^2=1 \end{cases} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x^2=-1-y^2<0, \\ x^2y^2=4, \end{cases} \\ &\begin{cases} x^2=1, \\ y^2=1 \end{cases} \end{aligned}\right. \Rightarrow \begin{cases} x^2=1, \\ y^2=1 \end{cases} \Rightarrow$$

невозможно в $\mathbb{R}$.

по обр. т. Виетта.

$$\Rightarrow (x,y)\in\{(1,1),\ (1,-1),\ (-1,1),\ (-1,-1)\}.$$

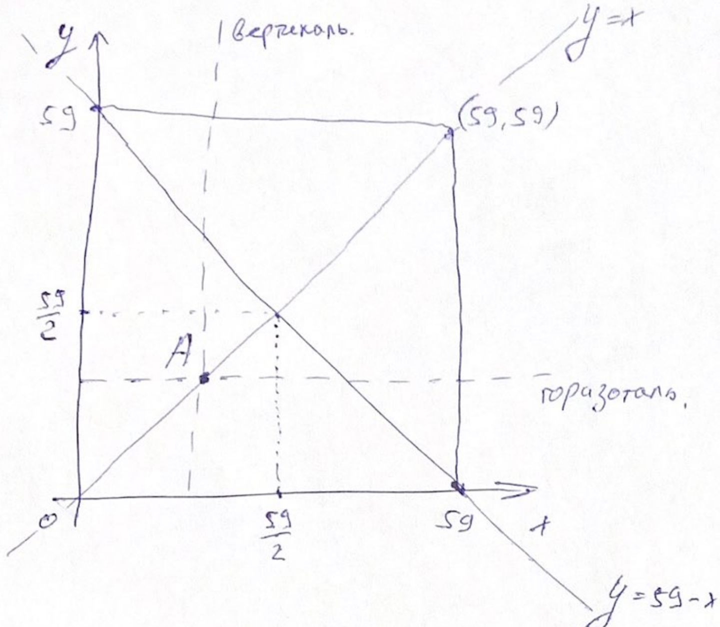
Ответ: $(x,y)\in\{(1,1),\ (1,-1),\ (-1,1),\ (-1,-1)\}$.

Чистовик. Часть 2

3 лист

Задача 5

Изобразим на плоскости:



Отметим точку пересечения прямых

$$\begin{cases} y=x, \\ y=59-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x, \\ 2x=59 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{59}{2}, \\ y=\frac{59}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x,y) \in \mathbb{Z}^2.$$

Сосчитаем количество точек на диагоналях внутри квадрата:

$$(60-2)+(60-2)=58+58=116$$

(общих „целых" (в $\mathbb{Z}^2$) точек диагонали не имеют).

1) Выберем какую-то точки на диагоналях:

116 способов.

2) ЗАТЕМ выберем вторую точку:

Для выбора запрещенно: $58+\cancel{58}\ {+57}$ точек с горизонтали и вертикали

Можно выбрать $58^2-\cancel{1}-\cancel{(58+58)}-(58+57)$ точек

$\cancel{58^2-1-58-58=3247}$, $58^2-58-57=3249$

Итак, по правилу произведения всего способов:

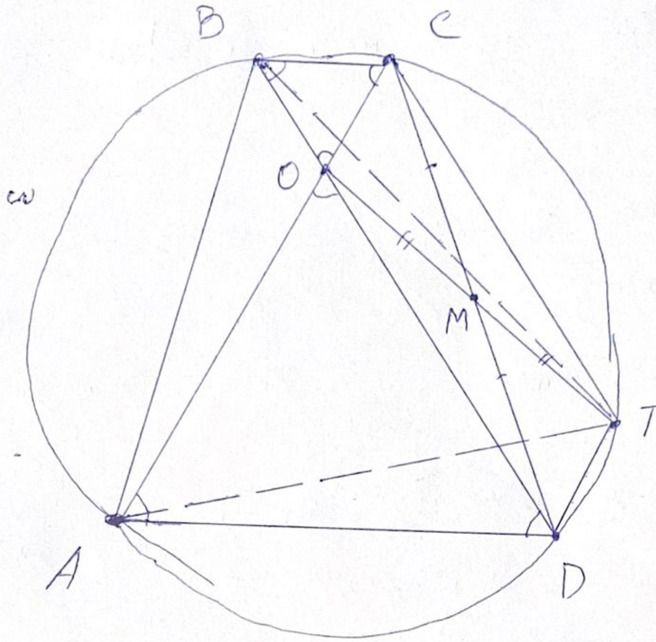
$116\cdot\cancel{3247}\ 3249=\cancel{376652}\ 376884$;

Ответ: ~~376652~~ 376884.

Чистовик Часть 2.

4 лист

Задача 6.



а) Докажем, что $\triangle ABT$ - правильный

б) известно:

$BC = 3$

$AD = 7$

Найти: $\dfrac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$.

а) Решение:

Положим M - середина CD, тогда $OCTD$ - параллелограм с центром M (O и T симметричны отн. M).

Поэтому $\angle CTD = \angle COD = 180° - \angle BOC = 180° - 60° = 120°$.

(поясним: $\angle BOC = 60°$, т.к. $\triangle BOC$ - правильный).

$\angle BCO = \angle OAD = 60° \Rightarrow BC \parallel AD$ (по признаку параллельности прямых).

$\triangle AOB = \triangle DOC$ по двум сторонам и углу между ними

(т.е. $AO = OD$, $BO = OC$, $\angle BOA = \angle COD$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = CD$.

Так $ABCD$ - равнобедренная трапеция, опишем около неё окружность ω.

~~$\breve{CD} = 2\angle CAD = 2 \cdot 60° = 120°$~~

$\left.\begin{array}{l}\angle CAD = 60°, \\ \angle CTD = 120°\end{array}\right\} \Rightarrow$ т.к. $\angle CAD + \angle CTD = 180°$, то $ACTD$ ~~опи~~ - вписанный четырёхуг.

Чистовик Часть 2 5 лист

8

по признаку вписанного четырёхугольника.

Так точки A, B, C, D и T лежат на одной окружности ω (т.к. ω описана около $\triangle ACD$).

$\smile BA = 2\angle BCA = 2\cdot 60° = 120°$;

$\angle BTA = \frac{1}{2}\smile BA = \frac{1}{2}\cdot 120° = 60°$ (как вписанный угол, отметим тот факт, что центр окружности ω и точка T лежат по одну сторону от прямой AB).

т.к. $DOCT$ - параллелограм, то $CT = OD$
т.к. $\triangle AOD$ - правильный, то $OD = AD$
$\Rightarrow CT = AD \Rightarrow$

$\Rightarrow \smile CT = \smile AD \Rightarrow \angle CBT = \angle ABD$, как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги.

$\angle ABT = \angle ABD + \angle DBT = \angle CBT + \angle DBT = \angle DBC = 60°$;

Итак, $\angle ABT = 60°$, $\angle BTA = 60°$ $\Rightarrow \triangle ABT$ - правильный #

*"Знаком „#" завершено доказательство.

Чистовик Часть 2 ∠6 лист

Задача 6б.

б) Решение:

$BO = BC = 3,$
$AO = AD = 7,$
$\angle BOA = 180° - \angle BOC = 180° - 60° = 120°$

воспользуемся т. косинусов для $\triangle BOA$:

$$AB^2 = BO^2 + OA^2 - 2BO \cdot OA \cos\angle BOA =$$
$$= 9 + 49 - 42\cos 120° = 9 + 49 + 42 \cdot \frac{1}{2} = 79.$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin\angle BOC = \frac{1}{2} \cdot BO^2 \sin\angle BOC = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \sin 60° =$$
$$= \frac{9\sqrt{3}}{4};$$

$$S_{AOD} = \frac{1}{2} AD^2 \cdot \sin\angle AOD = \frac{1}{2} \cdot 7^2 \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 7^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{4};$$

$$S_{BOA} = \cancel{S_{COD}} = \frac{1}{2} BO \cdot OA \cdot \sin\angle BOA = \frac{1}{2} BO \cdot OA \cdot \sin(180° - \angle BOC) =$$
$$= \frac{1}{2} BC \cdot AD \cdot \sin\angle BOC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{4};$$

$$S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{BOC} + S_{AOB} + S_{DOC} = S_{AOD} + S_{BOC} + 2S_{AOB} =$$

т.к. $S_{ADB} = S_{DOC}$

$$= \frac{49\sqrt{3}}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{21\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}(49 + 9 + 42) = 25\sqrt{3}.$$

$$S_{ABT} = \frac{1}{2} AB^2 \sin\angle ABT = \frac{1}{2} \cdot 79 \cdot \sin 60° = \frac{79}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{79\sqrt{3}}{4};$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \cancel{\frac{\frac{100\sqrt{3}}{4}}{\frac{79\sqrt{3}}{4}}} = \cancel{\frac{100}{49}} = \frac{\frac{79\sqrt{3}}{4}}{\frac{100\sqrt{3}}{4}} = \frac{79}{100};$$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{79}{100}$.