Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

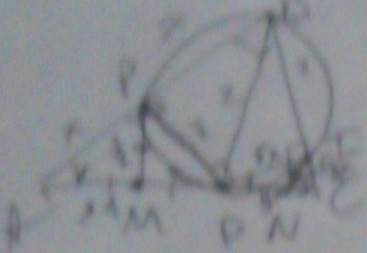
Шифр: **211007349**

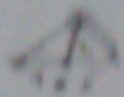
ID профиля: **90296**

Вариант 9

Математика

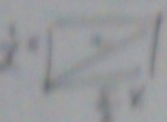
Черновик





$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = -3$

$\sqrt{x+4} + 3 = \sqrt{6-x}$



$x + 13 + 6\sqrt{x+4} = 6 - x$

$2x + 7 = 7\sqrt{x+4}$

$\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ $\quad 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{25x^2}{4} = 4$

$4x^2 + 28x + 49 = 7x + 4$

$4x^2 + 26x + 49 = 0$

$\sqrt{1-x^2}$

$4 - x^2 + 25x^2 = 16$

$D = 169 -$

$1 - x^2 + 25x^2 = 4$

$24x^2 = 3$

$24x^2 = 12$

$x^2 = \frac{1}{2}$

49

$1 - \frac{1}{8}$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{xy}{2} + \frac{25xy}{2} + 5xy = \frac{36xy}{2}$ $\quad \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$

$a^2 + a - 6 = 0$

$(a+3)(a-2) = 0$

$25x^2 + y^2 = 4$

$\frac{-2x+2}{\sqrt{24+2x-x^2}}$

$x^2 + y^2 = 1$ $\quad \cancel{28xy + 70x}$

$a + a^2 - 6 = 0$

$\cancel{25x^2 + 25y^2 = 25}$

$a + 4 =$

$y^2 = 1 - x^2$

$24x^2 = 3$

$x = \frac{1}{\sqrt{8}}$

$\frac{18 \cdot \sqrt{7}}{8} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$

$\sqrt{x+4} + 4 = \sqrt{6-x} + 2\sqrt{24+2x-x^2}$

$x + 4 + 6 - x$ $\quad 10$

$25 + 15$

$\underbrace{\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x}}_{a} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$

$144 - 49 = 95$

$36 \times 4 = 144$

$x \geq -4$

$x \leq 6$

$-x^2 + 2x + 24$

$95 \times 4 = 380$

$380 + 16 = 396$

$\cancel{a(a-b)}$

$-(x+4)(x-6)$ $\quad -4$ $\quad 6$

$a - b + 4 = 2ab$ $\quad \sqrt{\underset{a}{(x+4)}\underset{b}{(6-x)}}$

$a - b$

$a - 2ab - b + 4 = 0$ $\quad -\frac{7}{2}$

$a(1-2b) - b + 4$

$25 + 40 + 20\sqrt{10}$ $\quad 99$

396	2
198	2
99	3
33	

$2\sqrt{99}$

518×13

$1\,4\,y^2$

211007349 (U90296 M1276852)

$y = 3x - 4$

$26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

$(2y - 5a)^2 + (\sqrt{5}x - \frac{11a}{\sqrt{5}})^2$

$O(\frac{11a}{5}; \frac{5a}{2})$

$\frac{121}{5} = 24\frac{1}{5}$

$49\frac{1}{5}$ $23\frac{1}{5}$

$ax^2 + 2a^2x - ay + a^3 + 1 = 0$

$x_B = -\frac{2a^2}{2a} = -a$

$(\sqrt{5}x - \frac{11a}{\sqrt{5}})^2 + (2y - 5a)^2 = 23\frac{1}{5}$

$ax^2 + 2a^2x + a^3 + 1 = ay$

$\frac{5a^2 - 121a^2}{5}$

$y = x^2 + 2ax + a^2 + \frac{1}{a}$

$\frac{116a^2}{5}$

$x_B = -a$

$y_B = a^2 - 2a^2 + a^2 = \frac{1}{a}$

$B(-a; \frac{1}{a})$

$23\frac{1}{5}a^2$

$128 \cdot 41 = 5248$

$116 : 2 = 58$, $58 : 2 = 29$

$\cancel{26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2}$

$164 \cdot a^2 + 2^{12} - 128 \cdot 41a - 26 \cdot 65a^2 - 5200a + 4160$

$-59a^2$

$y = 3x - 4$

$(6x - \cancel{8} - 5a)^2$

$26a^2 - 22ax - 20a(3x-4) + 5x^2 + 8x(3x-4)$

$24 \cdot 4 = 96$

$26 \cdot 65 = 1690$, $1740 - 1681 = 59$

$65 \cdot 64 = 4160$

Математика, 10

Чистовик

№3

$26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$

$(2y-5a)^2+(\sqrt{5}x-\frac{11a}{\sqrt{5}})^2+26a^2-25a^2-\frac{121a^2}{5}=0$

$(\sqrt{5}x-\frac{11a}{\sqrt{5}})^2+(2y-5a)^2=\frac{116a^2}{5}$ – у-е окр. с центром $O(\frac{11a}{5};\frac{5a}{2})$ и радиусом $R=2\sqrt{29}$

$ax^2+2a^2x+a^3+1=ay$, $a\neq0$ – т.к.

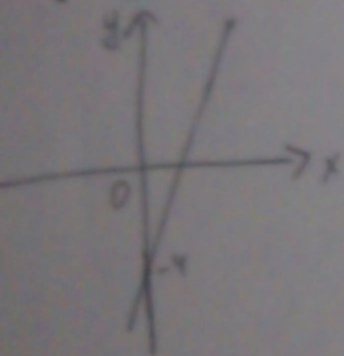
$x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}=y$ это у-е параболы, коэфф. при x^2 не равен 0

$x_B=\frac{-2a}{2}=-a$

$y_B=a^2-2a^2+a^2+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$

$B(-a;\frac{1}{a})$

$y=3x-4$



точка B может лежать только во II и IV четверти т.к. x_B и y_B – разных знаков

точка O в I и III т.к. x_O и y_O одного знака

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{11a}{5}<3x-4\\ \frac{5a}{2}<3x-4\\ -a>3x-4\\ \frac{1}{a}>3x-4\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{11a}{5}>3x-4\\ \frac{5a}{2}>3x-4\\ -a<3x-4\\ \frac{1}{a}<3x-4\end{cases}\end{array}\right.$$

при этом окр. не должна иметь с прямой общих точек.

$26a^2-22ax-20a(3x-4)+5x^2+8x(3x-4)+4(9x^2-24x+16)=0$

$26a^2-22ax-60ax+80a+5x^2+24x^2-32x+36x^2-96x+64=0$

$26a^2-82ax+80a+65x^2-128x+64=0$

$65x^2-2(41a-64)x+26a^2+64+80a=0$

$D<0$

3 из 3

211007349 (U90296 M1276852)

Чистовик

Математика, 10

№2

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$ & $x \in [-4;6]$

Замена: $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = a$, тогда $-2\sqrt{24+2x-x^2} = a^2 - 10$

$a^2 = x+4+6-x-2\sqrt{x^2+24+2x} =$ $\quad (x+4)(6-x)$

$= -2\sqrt{x^2+24+2x} + 10$

$a + a^2 - 10 + 4 = 0$

$a^2 + a - 6 = 0$

$(a-2)(a+3) = 0$

$\left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = -3 \end{array}\right.$

Обр. замена: $\left[\begin{array}{ll} \sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2 & (1) \\ \sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = -3 & (2) \end{array}\right.$

(1) $\sqrt{x+4} = 2 + \sqrt{6-x}$ $\uparrow^2$, $2+\sqrt{6-x} \geq 0$, $\sqrt{x+4} \geq 0$

$x + 4 = 4 + 6 - x + 4\sqrt{6-x}$

$2x + 6 = 4\sqrt{6-x}$

$x + 3 = 2\sqrt{6-x}$ $\uparrow^2$, $x+3 \geq 0$, $x \geq -3$

$x^2 + 6x + 9 = 24 - 4x$

$x^2 + 10x - 15 = 0$

$\frac{D}{4} = 25 + 15 = 40$

$\left[\begin{array}{l} x = -5 + 2\sqrt{10} \\ x = -5 - 2\sqrt{10} \end{array}\right.$

$-5 - 2\sqrt{10} < -3$

$-2\sqrt{10} < 2$

$-5 - 2\sqrt{10}$ не подходит

$-5 + 2\sqrt{10} > -3$

$2\sqrt{10} > 2$

$-5 + 2\sqrt{10} < 6$

$2\sqrt{10} < 11$

$40 < 121$

(2) $\sqrt{x+4} + 3 = \sqrt{6-x}$ $\uparrow^2$ обе части больше 0

$x + 13 + 6\sqrt{x+4} = 6 - x$

$6\sqrt{x+4} = -2x - 7$ $\uparrow^2$ $-2x - 7 \geq 0$

$x \leq -3{,}5$

$36x + 144 = 4x^2 + 49 + 28x$

$4x^2 - 8x - 95 = 0$

$\frac{D}{4} = 16 + 95 \cdot 4 = 396$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{4 + 2\sqrt{99}}{4} \\ x = \frac{4 - 2\sqrt{99}}{4} \end{array}\right.$

$\frac{4 + 2\sqrt{99}}{4} > 3{,}5$ не подходит

$4 - 2\sqrt{99} < -14$

$-2\sqrt{99} < -18$

$-\sqrt{396} < -\sqrt{324}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = -5 + 2\sqrt{10} \\ x = \frac{2 - \sqrt{99}}{2} \end{array}\right.$

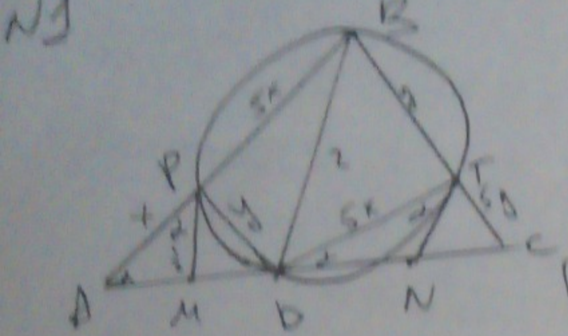
211007349 (U90296 M1276852)

2 из 3

Математика

Чистовик

№1



Дано: ΔABC, ω
BD - диаметр ω
$\omega \cap AB = P$, $\omega \cap BC = T$
M - сер. AD, N - сер. CD
$TN \parallel PM$, $MP = \frac{1}{2}$, $NT = \frac{5}{2}$
Найти: а) $\angle ABC$
б) S_{ABC}

Р-е:

а)

1. $\angle DPB = 90°$ т.к. BD - диаметр $\Rightarrow \angle APD = 90°$

Аналогично $\angle BTD = \angle DTC = 90°$

2. PM - мед $\underset{\text{по св пр }\Delta}{\Rightarrow}$ $PM = AM \Rightarrow$ по св р/б Δ $\angle MAP = \angle APM = \alpha$
$\angle PMD = 2\alpha$ как внешн.

3. $PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMD = \angle TNC = 2\alpha$

4. Аналогично п.2. $\angle NDT = \angle NTD \Rightarrow$ (п3 по св внешн) $\alpha = \angle NDT = \angle MDP$
$\angle TCD = 90° - \alpha$
$\angle ABC = 90°$ по сумме $\angle$ в Δ

б) 1. по св пр. Δ $PM = AM = MD = \frac{1}{2}$
$TN = DN = NC = \frac{5}{2}$

2. $\Delta APD \sim \Delta DTC$ по УУ ($\angle APD = \angle DTC = 90°$, $\angle PAD = \angle TDN = \alpha$)
$\frac{AD}{DT} = \frac{PD}{TC} = \frac{AD}{DC} = \frac{1}{5} \Rightarrow AP = x$, $DT = 5x$, $PD = y$, $TC = 5y$

3. $PBDT$ - впис, $\angle PBT = 90° \Rightarrow \angle PDT = 90°$ по св впис четырехуг.
$PBDT$ - прямоугольн
$BT = PD = y$
$DT = PB = 5x$

4. (ΔDBT) $4 = y^2 + 25x^2$
(ΔAPD) $x^2 + y^2 = 1$
$y^2 = 1 - x^2$
$4 = 1 + 24x^2$
$x^2 = \frac{1}{8}$
$x = \sqrt{\frac{1}{8}} \Rightarrow y^2 = \frac{7}{8}$, $y = \sqrt{\frac{7}{8}}$

5. $S_{\Delta ABC} = \frac{36xy}{2} = 18xy$
$S_{ABC} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$

Ответ: а) $90°$
б) $\frac{9\sqrt{7}}{4}$

1 из 3

Часть 2

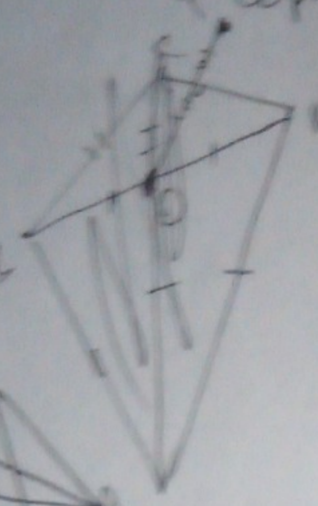
Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

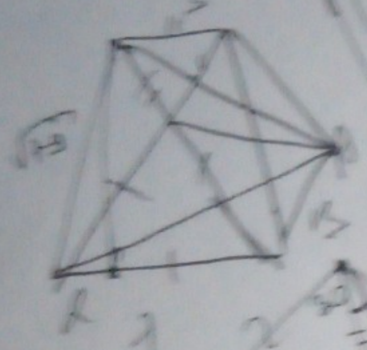
Шифр: **211007349**

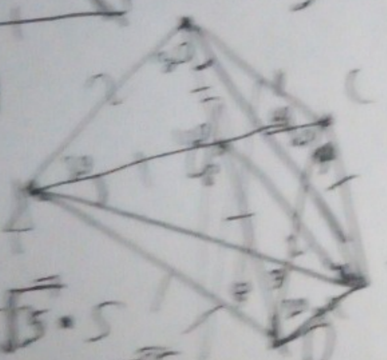
ID профиля: **90296**

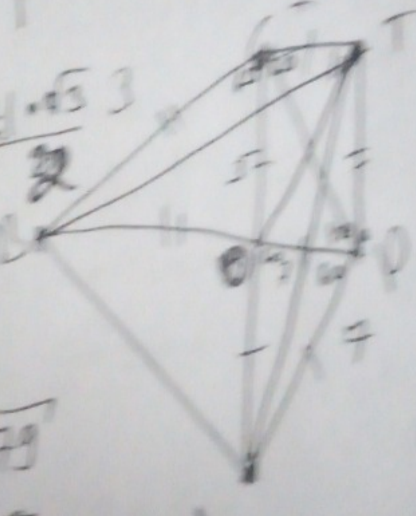
Вариант 9

сср2 Чертежи Математика, 10









$9+49+21$

$79-4$

75

$5\sqrt{3}\cdot 5$

$25\sqrt{3}$

$5\sqrt{2}$

$\frac{10\sqrt{3}}{4}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

$\frac{21\cdot\sqrt{3}}{2}$ 3

$25\sqrt{3}-\frac{21\sqrt{3}}{4}$

$\frac{100\sqrt{3}-21\sqrt{3}}{4}$

$\frac{79\sqrt{3}}{4}$

$\frac{41\sqrt{3}}{4}$

$25\sqrt{3}-\frac{21\sqrt{3}}{4}-3$ $9+49+21=\sqrt{79}$

$79-\frac{79}{4}$

$\frac{3\cdot 7\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 2}=\frac{21\sqrt{3}}{4}$

$\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\frac{21\sqrt{3}}{4}$

$a^2-\frac{a^2}{4}$

$\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$2\cdot y^2$

211007349 (U90296 M1276853)

сбрі Серпа...

$x^2+y^2=a$ $\quad \frac{2}{a}+b=2$

$x^2y^2=b$ $\quad b=2-\frac{2}{a}$ $\quad a>0$

$a^2-2b+3b=5$

$a^2+b=5$

$b=5-a^2$

$5-a^2=2-\frac{2}{a}$ $\quad (a^2+2a+1)(a-2)=$

$5a-a^3=2a-2$

$a^3-3a-2=0$ $\quad a^3-3a-2=0$

$a^3-a-2a-2=0$ $\quad a(a^2-1)-2(a+1)$

$a(a^2-1)-2(a+1)$ $\quad (a+1)(a(a-1)-2)=0$

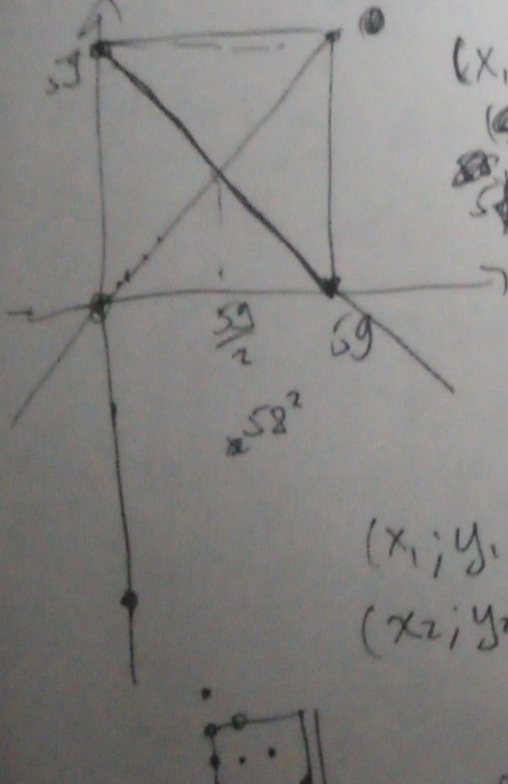
$(a+1)(a(a-1)-2)$ $\quad (a+1)(a^2-a-2)=0$

58

$(a+1)(a^2-a-2)=0$ $\quad (a+1)^2(a-2)=0$

$(1;1) \dots (58;58)$

$(a+1)^2(a-2)=0$ $\quad \frac{1-3}{2}=-1$



$(x_1;y_1)$ $\quad (a^2+2a+1)(a-2)$ $\quad \frac{1+3}{2}=2$ $\quad y^2=2-x^2$

$-2a^2+2a$

$a=-1$ – п.к.

$58(58^2-2\cdot58)$ $\quad a=2$

$\Rightarrow b=1$

$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2y^2=1 \end{cases}$

$58^2(58-2)$

$x=59-x$ $\quad 2x^2-x^4=1$

$2x=59$ $\quad x^4-2x^2+1=0$

$x=\frac{59}{2}$ $\quad t=x^2$ $\quad (x^2-1)^2$

$x=\pm1$

6

$(x_1;y_1)$ $\quad x_1\neq x_2$

$(x_2;y_2)$ $\quad y_1\neq y_2$

$\times\frac{58}{58}$ $\quad 464$ $\quad +290$ $\quad 3364$ $\quad \times 56$ $\quad 20184$ $\quad +16820$ $\quad 188384$ $\quad \times 2$ $\quad 376768$

$2\cdot58$ $\quad 58$ $\quad 364 \times 5 = 1820$

29×29: 261, 58, 841

$3364 \mid 2$, $1682 \mid 2$, 841

$29 \times 3 = 87$

$\frac{58}{2}=\frac{2\cdot53}{2}$

1 из 2

3 из 2

211007349 (U90296 M1276853)

Математика, 10

Чистовик
В 9.

№4.

Замена: $x^2+y^2=a$, $a>0$
$x^2y^2=b$, $b\geq 0$
$x^4+y^4=a^2-2b$

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{a}+b=2 & b=2-\frac{2}{a} \\ a^2+b=5 & b=5-a^2 \end{cases}$$

$2-\frac{2}{a}=5-a^2 \mid \times a$, т.к. $a\neq 0$

$2a-2=5a-a^3$

$a^3-3a-2=0$

$a(a^2-1)-2(a+1)=0$

$(a+1)(a(a-1)-2)=0$

$(a+1)(a^2-a-2)=0$

$(a+1)^2(a-2)=0$

$\left[\begin{array}{l} a=-1 \text{ — п.к.} \\ a=2 \quad \Rightarrow b=5-4=1 \end{array}\right.$

Обр. замен.
$a=2$, $b=1$

$$\begin{cases} x^2+y^2=2, \; y^2=2-x^2 \\ x^2y^2=1 \end{cases}$$

$x^2(2-x^2)=1$

$2x^2-x^4=1$

$x^4-2x^2+1=0$

$(x^2-1)=0$

$x=\pm 1$

$y=\pm 1$

Отв: $(1;1)$; $(1;-1)$; $(-1;1)$; $(-1;-1)$

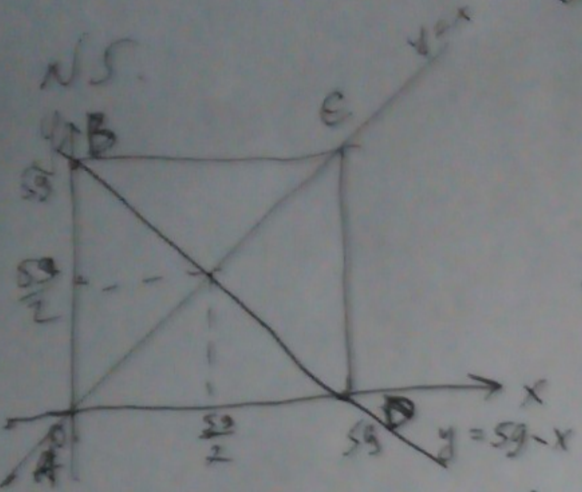
стр 1 из 3

Математика, 10

Чистовик

В9

№5.



O_1, O_2

$O_1(x_1; y_1)$

$O_2(x_2; y_2)$

Чтобы O_1O_2 не была параллельна осям координат: $\begin{cases} x_1 \neq x_2 \\ y_1 \neq y_2 \end{cases}$

$A(0;0)$, $B(0;59)$, $C(59;59)$, $D(59;0)$

на BD можно выбрать 58 узлов, на AC тоже, всего $58 \cdot 2 = 116$ - способов выбрать узел на данных прямых

Всего узлов 58^2, второй узел не может находится на той же абсциссе или ординате, на которой находится первый узел.

минус $2 \cdot 58$ вариантов для второго узла.

всего способов выбрать второй узел: $(58^2 - 58 \cdot 2)$

всего способов выбрать два узла: $58 \cdot 2(58^2 - 58 \cdot 2) = 58^2 \cdot 2(58-2) = 58^2 \cdot 56 \cdot 2 = 376768$

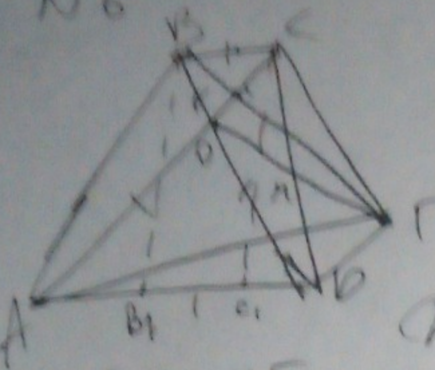
Ответ: 376768

2 из 3

Чистовик

математика

№6



Дано: ABCD, $BD \cap AC = O$, $\triangle BOC$ - р/с, $\triangle AOD$ - р/с
M - ср. CD, T: OM = MT
BC = 3, AD = 7
Д-ть: $\triangle ABT$ - р/с
Найти: $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$

Д-во:

1. OM = MT, CM = MD $\Rightarrow$ OCTD - паралл. по пр паралл. $\Rightarrow$ DT = OC, OD = CT, $\angle ODT = \angle OCT = 180^\circ - \angle DOC = 60^\circ$ (120° как смежн. с 60°)
2. $\angle BOA = 120^\circ$ как смежн. с $\angle 60^\circ$
$\angle ADT = \angle ADO = \angle OCT = 120^\circ = \angle BCT$ аналогично
3. $\triangle ABO = \triangle BCT = \triangle ADT$ по СУС (AO = AD = CT; BO = BC = ..., $\angle BOA = \angle ADT = \angle BCT = 120^\circ$) $\Rightarrow$ AB = BT = AT как соот. $\Rightarrow$ $\triangle ABT$ - р/с по опр.

Р-е:

1. $\angle BCO = \angle CAD = 60^\circ$ - накрест леж. $\Rightarrow$ BC ∥ AD по пр ∥ прям. $\Rightarrow$ (т.к. BA ∦ CD) $\cdot$ BA ∦ CD т.к. $\angle OBA = \angle OCD \neq \angle BOA$
ABCD - трапец по опр.
т.к. $\triangle ABO = \triangle COD = \triangle CTD$ по СУС $\Rightarrow$ ABCD - р/б трап.
2. $BB_1 \perp AD$, $CC_1 \perp AD$ BB_1C_1C - прямоуг. по опр. т.к. $BB_1 \parallel CC_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $\angle BB_1C_1 = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $B_1C_1 = 3$
3. $\triangle ABB_1 = \triangle CDC_1$ по гип. и кат $\Rightarrow$ $AB_1 = C_1D = 2$
4. $AB = \sqrt{9 + 49 - 2\cos 120^\circ \cdot 21} = \sqrt{79}$ по Т кос
5. $BB_1 = \sqrt{79 - 4} = 5\sqrt{3}$ по Т Пифагора
6. $S_{BCT} = S_{CDT} = S_{ADT}$ т.к. $\triangle$ равны
$S_{ABCD} = ~~5\sqrt{3}~~ \cdot 5\sqrt{3} \cdot \left(\frac{7+3}{2}\right) = 25\sqrt{3}$
7. $S_{CDT} = \frac{21 \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{4}$
$S_{ABT} = S_{ABCD} + S_{CDT} - S_{BCT} - S_{ADT} = S_{ABCD} - S_{CDT} = 25\sqrt{3} - \frac{21\sqrt{3}}{4} = \frac{79\sqrt{3}}{4}$
8. $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{79\sqrt{3}}{4 \cdot 25 \cdot \sqrt{3}} = \frac{79}{100}$

Ответ: $\frac{79}{100}$