Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007347**

ID профиля: **852935**

Вариант 9

Чистовик

№2.

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

ОДЗ:

$\begin{cases} x\geq -4 \\ x\leq 6 \\ (x+4)(6-x)\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\in[-4;6]$

Пусть $\sqrt{x+4}=a$; $\sqrt{6-x}=b \Rightarrow a\geq 0$ и $b\geq 0$.

$\Rightarrow a-b+4=2ab$

Заметим также, что $a^2+b^2=10$.

$\begin{cases} a^2+b^2=10 \\ a-b+4=2ab \end{cases}$ $\begin{cases} (a-b)^2+2ab=10 \\ a-b+4=2ab \end{cases}$

$(a-b)^2+(a-b)-6=0$

$\left[\begin{array}{l} a-b=-3 \\ a-b=2 \end{array}\right.$

1.) $\begin{cases} a-b=2 \\ a-b+4=2ab \end{cases}$ $\begin{cases} a-b=2 \\ ab=3 \end{cases}$ $\begin{cases} b=a-2 \\ (a-2)a=3 \end{cases}$

$a^2-2a-3=0$

$\left[\begin{array}{l} a=3 \Rightarrow b=1 \\ a=-1<0 - \text{противоречие.} \end{array}\right.$

$\begin{cases} \sqrt{x+4}=3 \\ \sqrt{6-x}=1 \end{cases} \Rightarrow x=5\in[-4;6]$

2) $\begin{cases} a-b=3\cdot(-1) \\ a-b+4=2ab \end{cases}$ $\begin{cases} a-b=-3 \\ 2ab=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=b-3 \\ 2b(b-3)=1 \end{cases}$

$2b^2-6b-1=0$

$\left[\begin{array}{l} b=\frac{3+\sqrt{11}}{2} \Rightarrow a=\frac{\sqrt{11}-3}{2} \\ b=\frac{3-\sqrt{11}}{2}<0 - \text{противоречие} \end{array}\right.$

$\begin{cases} \sqrt{x+4}=\frac{\sqrt{11}-3}{2} \\ \sqrt{6-x}=\frac{\sqrt{11}+3}{2} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{2-3\sqrt{11}}{2}\in[-4;6]$ $\left(\frac{2-3\sqrt{11}}{2}>-4;\ \Leftarrow 2-3\sqrt{11}>-8 \Leftarrow -3\sqrt{11}>-10\right.$

$\Uparrow$

$3\sqrt{11}<10$

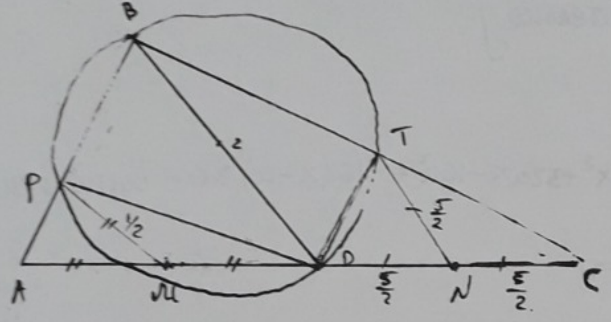
$\Uparrow$

$\left.99<100\right)$

Ответ: $x=5;\ \frac{2-3\sqrt{11}}{2}$

Чистовик.

№1.



1) Т.к. BD - диаметр, то $\angle BTD = \angle BPD = 90^\circ \Rightarrow \angle CTD = \angle APD = 90^\circ$.

Пусть $\angle DNT = \alpha \Rightarrow \angle AMP = \alpha$ (т.к. соответственные).

В прямоугольном треугольнике PTC TN - медиана $\Rightarrow TN = DN = CN$, аналогично

$PM = AM = DM \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\angle PAC = (180^\circ - \angle\alpha) : 2 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \\ \angle TDC = 90^\circ - \alpha/2\end{array}\right\} \Rightarrow \angle PAC = \angle TDC \Rightarrow AB \parallel TD \Rightarrow$

$\Rightarrow PBTD$ - прямоугольник $\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$

2) Пусть $PB = a = DT$; $BT = PD = b$

$AC = AM + DM + CN + DN = 6$

По теореме Пифагора для $\triangle PBD$:

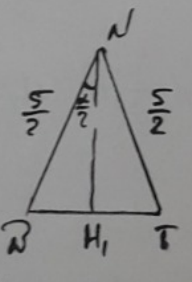
$a^2 + b^2 = 4$.

Рассмотрим $\triangle DNT$:

$DT = DN \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot 2$. ($NH_1$ - высота, медиана)

$DT = a = \frac{5}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \cdot 2 = 5\sin\frac{\alpha}{2}$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{5}$

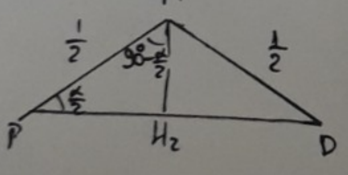


Рассмотрим $\triangle PMD$

$PD = PM\cos\frac{\alpha}{2} \cdot 2$ (MH_2 - высота, меди..)

$PD = \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \cdot 2 = \cos\frac{\alpha}{2} = b$

$\cos\frac{\alpha}{2} = b$.



$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2}{25} + b^2 = 1$

Итак,

$\begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ a^2 + 25b^2 = 25 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2 = \frac{75}{24} \\ b^2 = \frac{21}{24} \end{cases}$ $\begin{cases} a = \frac{5}{\sqrt{24}} \\ b = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{24}} \end{cases}$

$\sin\angle C = \frac{DT}{DC} = \frac{5}{\sqrt{24}} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{\sqrt{24}}$

$\cos\angle C = \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{24}}$

$AB = 6\sin\angle C = \frac{6}{\sqrt{24}}$

$BC = 6 \cdot \cos\angle C = \frac{6\sqrt{23}}{\sqrt{24}}$

$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{23}$

Ответ: 2) $\frac{3}{4}\sqrt{23}$; 1) 90°

211007347 (U852935 M1278120)

Чистовик

№ 3.

Найдем координаты т. A; для этого найдем дискриминант уравнения

$4y^2+8xy+5x^2-20ay-22ax+26a^2=0$ относительно y.

$4y^2+(8x-20a)y+5x^2-22ax+26a^2=0$

$D=(8x-20a)^2-4\cdot4(5x^2-22ax+26a^2)=-16x^2+32ax-16a^2=-16(x-a)^2\geq0$ – выполнено

только лишь для $x=a \Rightarrow 4y^2-12ay+9a^2=0$

$(2y-3a)^2=0$

$y=\frac{3}{2}a.$

Координаты т. $A\left(a;\frac{3}{2}a\right)$

Найдем координаты т. B:

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$

$ay=ax^2+2a^2x+a^3+1=0$

Т.к. $a\neq0$ (в противном случае второе уравнение не задает параболу) поделим на a.

$y=x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}=0$

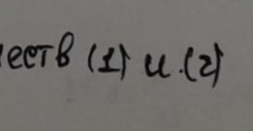
$x_B=-\frac{2a}{2}=-a$

$y_B=a^2-2a^2+a^2+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$

Координаты т. $B\left(-a;\frac{1}{a}\right)$

1) Предположим т. A лежит выше прямой $y=3x-4$, а т. B ниже нее; тогда

$\begin{cases}\frac{3}{2}a>3a-4\\ \frac{1}{a}<-3a-4\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{3}{2}a<4\\ \frac{3a^2+4a+1}{a}<0\end{cases}$ $\begin{cases}a<\frac{8}{3}\\ \frac{(a+1)(a+\frac{1}{3})}{a}<0\end{cases}$ $a\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{3};0\right)$ (1)



2) Предположим т. A лежит ниже прямой $y=3x-4$, а т. B выше нее, тогда

$\begin{cases}\frac{3}{2}a<3a-4\\ \frac{1}{a}>-3a-4\end{cases}$ $\begin{cases}a>\frac{8}{3}\\ a\in\left(-1;-\frac{1}{3}\right)\cup(0;+\infty)\end{cases}$ $a\in\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$ (2)

В ответе укажем объединение множеств (1) и (2)

Ответ: $a\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$

$4y^2+8xy+5x^2-20ay-22ax+26a^2=0$

$4y^2+8$

$(2y+x)^2$

$(4x+y)^2=16$

$(2x+2y)^2=4x^2+4y^2+8xy$

$4y^2+(8x-20a)y+5x^2-22ax+26a^2=0$

$\mathcal{D}=64x^2-320ax+400a^2-80x^2+352ax-416a^2=0$

$-16x^2+32x-16a^2=0$

$-(16(x^2-2x+1)=0$

$-16(x-1)^2\geq 0$

$x=1$

$\underline{x=a}$

$4y^2-12ay+9a^2=0$

$(2y-3a)^2=0$

$y=\frac{3a}{2}$

$A\ (a;\frac{3a}{2})$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 16 \\ \underline{22} \\ 32 \\ \underline{32} \\ 352 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ 26 \\ \underline{16} \\ 156 \\ \underline{26} \\ 416 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 352 \\ \underline{320} \\ 32 \end{array}$$

B(

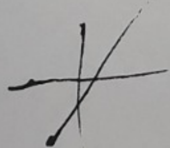
$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$

$ay=ax^2+2a^2x+a^3+1$

$y=x^2+2ax+\frac{a^3+1}{a}\quad a\neq 0$

$x_B=-a$

$y_B=\cancel{a^2-2a^2+a^2}+\frac{1}{a}$



$B\ (-a;\frac{1}{a})$

$\underline{y=3x-4}$

$y<3x-4$

$75+$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \underline{21} \\ 25 \\ \underline{50} \\ 525 \\ 25 \\ \hline 600 \\ \underline{48} \\ 120 \end{array} \qquad \frac{1.24}{25}$$

$\frac{1}{a}<-3a-4$

$\frac{1}{a}+3a+4<0$

$\frac{3a^2+4a+1}{a}<0$

$3a^2+4a+1=0$

$\mathcal{D}=16-12=4$

$a=\frac{-4\pm 2}{6}$

$a_1=-1$

$a_2=-\frac{1}{3}$

$\frac{\frac{6}{\sqrt{24}}\cdot\frac{6\sqrt{23}}{\sqrt{24}}}{2}=\frac{36\sqrt{23}}{2\cdot 24}$

211007347 (U852935 M1278120)

Условие.

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{23-(x+1)^2}.$

$\underbrace{\sqrt{x+4}}_{a}-\underbrace{\sqrt{6-x}}_{b}+4=\underbrace{2\sqrt{(x+4)(6-x)}}_{2\sqrt{ab}}$

$x\geq -4$

$x\leq 6$

$x^2-2x-24\geq 0$

$D=4+96=100$

$x=\frac{2\pm 10}{2}$

$x_1=6$

$x_2=-4$

$\begin{cases} 2\sqrt{ab}=a-b+4 \\ a^2+b^2=10 \end{cases}$

$2ab=a-b+4.$

$(a+b)^2-2ab=0$

$(a+b)^2-2(a-b+4)=0$

$\frac{2-3\sqrt{11}}{2}\vee -4$

$2-3\sqrt{11}\vee -8$

$-3\sqrt{11}\vee -10$

$3\sqrt{11}\wedge 10$

$1-3+4=2\sqrt{9}=6$

$a(2b-1)=4-b$

$a=\frac{4-b}{2b+1}$

$a^2+2ab+b^2-2a+2b\ldots=0$

$(x+4)(6-x)\geq 0$

$b^2+\frac{b^2-8b+16}{4b^2-4b+1}=10$

$4b^4-4b^3+b^2+b^2-8b+16=40b^2-40b+10.$

$\frac{4-6\sqrt{11}}{4}\vee -4$

$4-6\sqrt{11}\vee -16$

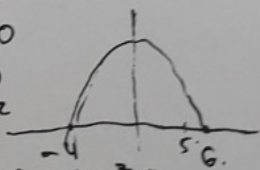
$-6\sqrt{11}\vee -20$

$6\sqrt{11}\wedge 20$

$36\cdot 11\wedge 20^2$

$t=a-b$

$t^2=a^2-2ab+b^2=10-2ab$



$\begin{cases} 2ab=a-b+4 \\ a^2+b^2=10 \end{cases}$

$26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$

$2ab=t^2.$

$4y^2+(8x-20a)y+5x^2-22ax+26a^2=0$

$D=64x^2-320ax+400a^2-20x^2+88ax$

$\begin{cases} x+4=\frac{11+9-6\sqrt{11}}{4}= \\ 6-x=\frac{11+6\sqrt{11}+9}{4} \end{cases}$

$\frac{20+6\sqrt{11}}{4}$

$=\frac{20-6\sqrt{11}}{4}$

$(a-b)^2+2ab=10$

$2ab=a-b+4.$

$t \quad z$

$D=36+8=44$

$x=\frac{20-6\sqrt{11}}{4}-4=\frac{4-6\sqrt{11}}{4}$

$\begin{cases} z^2+2t=10 \\ t=z+4 \end{cases}$

$x=\frac{6\pm\sqrt{44}}{4}=$

$=\frac{3\pm\sqrt{11}}{2}$

$x=6-\frac{20+6\sqrt{11}}{4}=$

$=\frac{4-6\sqrt{11}}{4}.$

$D=36+8=44$

$b=\frac{6\pm\sqrt{44}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{11}}{2}.$

$6-x=1$

$x+4=9$

$x=5$

$a=\frac{3+\sqrt{11}}{2}-3=\frac{3+\sqrt{11}-6}{2}=\frac{\sqrt{11}-3}{2}$

211007347 (U852935 M1278120)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007347**

ID профиля: **852935**

Вариант 9

№1. Чистовик

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ (x^2+y^2)^2-2x^2y^2+3x^2y^2=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ (x^2+y^2)^2+x^2y^2=5 \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое.

$$(x^2+y^2)^2-\frac{2}{x^2+y^2}=3$$

$$t=x^2+y^2\geq 0$$

$$t^2-\frac{2}{t}=3$$

$$\begin{cases} t^3-3t-2=0 \\ t\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t+1)(t^2-t-2)=0 \\ t\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t+1)(t+1)(t-2)=0 \\ t\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=2 \end{array}\right. \\ t\neq 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} t=-1<0 - \text{противоречие} \\ t=2 \end{array}\right.$$

$$x^2+y^2=2 \Rightarrow x^2y^2=2-\frac{2}{x^2+y^2}=1$$

Итого:

$$\begin{cases} x^2y^2=1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$$

При $x=0$, выходит из первого уравнения $0=1 \Rightarrow x\neq 0$

Поделили первое уравнение на x^2

$$\begin{cases} y^2=\frac{1}{x^2} \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=2 \quad \Big| \cdot x^2\neq 0$$

$$x^4-2x^2+1=0$$

$$(x^2-1)^2=0$$

$$x^2=1$$

$$\left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=\pm 1 \\ x=-1 \Rightarrow y=\pm 1 \end{array}\right.$$

Ответ: $(1;1)$; $(-1;1)$; $(1;-1)$; $(-1;1)$

211007347 (U852935 M1278121)

Чистовик

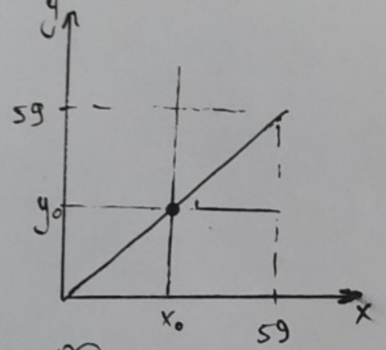
№2

Рассмотрим все возможные расположения, выбираемых нами узлов:

1. Один узел лежит на прямой $y=x$.

В этом случае второй узел может располагаться в любой точке, кроме тех, что имеют такую же абциссу или ординату:

В начале возьмем любой из 58 узлов, находящихся на прямой, $y=x$, а затем любой из узлов, кроме тех, что указаны выше. Таких всего $58^2-57-57-1$. (Всего узлов в квадрате 58^2, 57 – на прямой $x=x_0$, 57 – на прямой $y=y_0$ и 1 выбранный узел исключаем)



~~Т.к. порядок выбора узлов не важен, то в первом случае нужно разделить на два:~~

В результате получаем:

$\cancel{\frac{58(58^2-2\cdot57-1)}{2}}$

2. Один узел лежит на прямой $y=59-x$.

В силу симметрии в этом случае получаем столько же вариантов. $\cancel{\frac{58(58^2-2\cdot57-1)}{2}}$

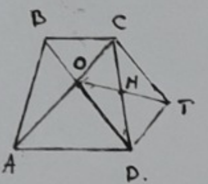
При таком подсчете два раза были учтены те пары узлов, что лежат на прямых $y=x$ и $y=59-x$ одновременно, поэтому стоит вычесть количество способов выбрать два узла, находящихся на прямых $y=x$ и $y=59-x$. Кол-во способов выбрать узел, находящийся на прямой $y=x$: 58, тогда на прямой $y=59-x$ можно выбрать 56 узлов, потому что 2 из них лежат на прямых с той же абциссой и ординатой: Здесь имеем: $58\cdot56$.

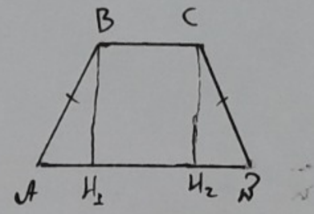
Итого:

$2\cdot58(58^2-2\cdot57-1)-58\cdot56=178424$

Чистовик

№3





1) Введем обозначения:

$AO = DO = AD = a$

$BO = CO = BC = b$

$\angle AOB = 180^\circ - \angle AOD = 120^\circ$ (как смежные)

По теореме косинусов для $\triangle AOB$

$$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2 - AO\cdot BO\cdot 2\cos\angle AOB} = \sqrt{a^2+ab+b^2}$$

Т.к. $OM = TM$, а $CM = MD \Rightarrow CODT$ - параллелограмм $\Rightarrow CO = DT$ (как противоположные стороны), $\angle ODT = 180^\circ - \angle COD = 60^\circ \Rightarrow \angle ADT = 120^\circ = \angle ADO + \angle ODT$

По теореме косинусов для $\triangle ADT$:

$$AT = \sqrt{AD^2 + DT^2 - 2AD\cdot DT\cos\angle ADT} = \sqrt{a^2+ab+b^2}$$

Ответ: $\frac{79}{50}$

Аналогично из $\triangle BCT$ по теореме косинусов:

$$BT = \sqrt{BC^2 + CT^2 - 2BC\cdot CT\cos\angle BCT} = \sqrt{a^2+ab+b^2}$$

Итак $AB = AT = BT \Rightarrow \triangle ABT$ - правильный

2) При $a = AD = 7$ и $b = BC = 3$ получаем $AB = \sqrt{7^2 + 3\cdot 7 + 3^2} = \sqrt{79}$

$$S_{ABT} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{79\sqrt{3}}{4}$$

Т.к. $\angle ADB = \angle CBO = 60^\circ \Rightarrow AD \parallel BC \Rightarrow ABCD$ - трапеция

$$\left.\begin{matrix} BO = CO \\ AO = DO \\ \angle AOB = \angle COD \end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle ABO = \triangle CDO \Rightarrow AB = CD \Rightarrow ABCD \text{ - равнобедренная трапеция}$$

Опустим высоты BH_1 и CH_2. ; $AH_1 = DH_2 = \sqrt{AB^2 - BH_1^2}$ $AH_1 = DH_2 = \frac{AD - BC}{2} = 2$

$BH_1 = \sqrt{AB^2 - AH_1^2} = 5\sqrt{3}$ (по т. Пифагора); $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2}\cdot BH_1 = \frac{25\sqrt{3}}{2}$; Искомое отношение $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{79}{50}$

A B

8 3

58·56

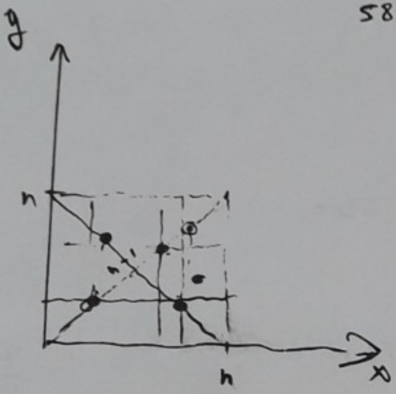
6

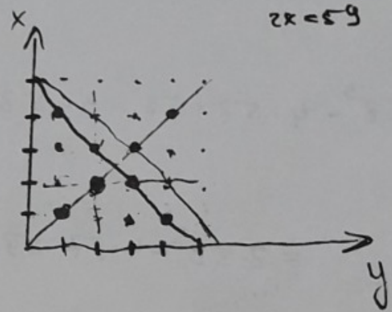
$4+4+4+4=16$

$\frac{58(58^2-2\cdot57-1)}{2}$

$x=59-x$

$2x=59$





$\frac{2+2+2+2}{8}$

$4^2=16-4-4=8$

$2\cdot\frac{(n-1)((n-1)^2-(n-1)-(n-1)-1)}{2}$

$\frac{4\cdot2}{2}$

1) $1-y=x$

$2-y=x$

$\frac{58\cdot57}{2}$

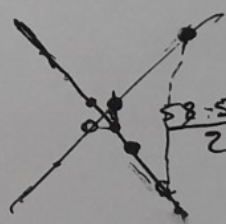
2) $1-y=x$

$2-y=59-x$

$\frac{58\cdot56}{2}$

3) $1-$

...



$\frac{58\cdot56}{2}$

1) $y=x$

$y=x$

$\frac{58\cdot57}{2}$

2) $y=x$

$y=59-x$

$\frac{58\cdot56}{\cancel{2}}$

3) $y=x$

нигде.

$\frac{58\cdot(58^2-57-57-1)}{2}$

4) $y=59-x$

нигде.

$\frac{58(58^2-57-57-1)}{2}$

5) $y=59-x$

$y=59-x$

$\frac{58\cdot57}{2}$

$(n-1)^2-2n-1=$

$=(n-1)^2-2(n-2)-1$

$16-6-1$

$\frac{4\cdot(16-3-3-1)}{2}$

$\frac{4\cdot9}{2}=18$

1) $y=x$

$2\cdot\frac{58\cdot(58^2-57-57-1)}{2}-\frac{58\cdot56}{2}$

$58\cdot57+58^3-2\cdot57\cdot58-58+58\cdot56$

$58\cdot57$

$58(58^2-57+56-1)$

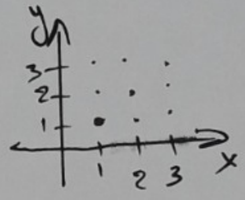
$(n-1)((n-1)^2-2(n-2)-1)-\frac{(n-1)(n-3)}{2}$

$\frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2$

$x^4y^4+3x^2y^2=5.$

$\frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2$

$(x^2+y^2)^2+x^2y^2=5.$



2.

$t^2-\frac{2}{t}=3$

$\frac{t^3-3t-2}{t}=0$

$t^3-3t-2 \mid t+1$

$t^3-t \mid t^2$

$t^3+0t^2-3t-2 \mid t+1$

$t^3+t^2 \mid t^2-t-2.$

$-t^2-3t$

$-t^2-t$

$-2t-2$

$-2t-2$

$58\cdot(58^2-57-57-57)=58(58^2-3\cdot57)$

$\frac{58\cdot57}{2}$

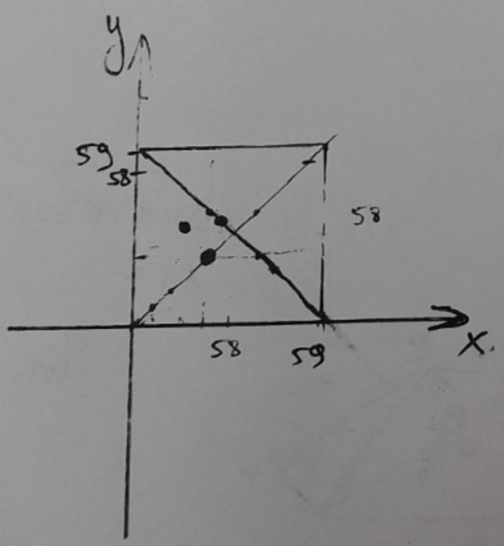
$58\cdot56$

$2\cdot\frac{58(58^2-58-59)}{2}$

A B

а в.

а · в.



2 узла:

хотябы $y=x$ один

$y=59-x$

1) 2 узла:

один лешит на прямой $y=x$,

а другой не лешит ни на одной прямой

2) 2 узла:

один лешит на прямой $y=x$,

другой – на прямой $y=x$

3) 2 узла:

один лешит на прямой $y=x$,

другой на прямой $y=59-x$