

Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007341**

ID профиля: **306790**

Вариант 9

Умножаем

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$$

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \\ 24+2x-x^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 6 \\ (x+4)(x-6) \leq 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow x \in [-4, 6]$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{24+2x-x^2} - 4$$

$$x+4 + 6-x - 2\sqrt{(x+4)(6-x)} = 4(x+4)(6-x) + 16 - 16\sqrt{24+2x-x^2}$$

$$10 = 4(x+4)(6-x) + 16 - 16\sqrt{24+2x-x^2}$$

$$14\sqrt{(x+4)(6-x)} = 4(x+4)(6-x) + 6$$

$$\sqrt{(x+4)(6-x)} = t, t \geq 0.$$

$$14t = 4t^2 + 6$$

$$2t^2 - 7t + 3 = 0$$

$$D = 49 - 24 = 25.$$

$$t = \frac{7 \pm 5}{4} \approx 3, 370$$

$$t = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} > 0$$

$$\sqrt{(x+4)(6-x)} = 3$$

$$(x+4)(6-x) = 9$$

$$-x^2 + 2x + 24 = 9$$

$$-x^2 + 2x + 15 = 0$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$D = 4 + 60 = 64$$

$$x = \frac{2 \pm 8}{2} \approx 5 \in [-4, 6]$$

$$x = -3 \in [-4, 6]$$

$$\sqrt{(x+4)(6-x)} = \frac{1}{2}$$

$$-x^2 + 2x + 24 = \frac{1}{4}$$

$$-4x^2 + 8x + 96 = 1$$

$$4x^2 - 8x - 95 = 0$$

$$D = 64 + 16 \cdot 95 = 16(4 + 95) = 16 \cdot 99$$

$$x = \frac{8 \pm 12\sqrt{99}}{8} \approx 1 + \frac{3\sqrt{99}}{2} > 0.$$

$$x = 1 - \frac{3\sqrt{99}}{2} < 0$$

Проверяем:

$$\sqrt{5+4} - \sqrt{6-5} + 4 = 2\sqrt{(6-5)(5+4)}$$

$$3 - 1 + 4 = 2 \cdot 3$$

$$6 = 6 \rightarrow 5 \text{ не корень.}$$

$$\sqrt{-3+4} - \sqrt{6-(-3)} + 4 = 2\sqrt{(-3+4)(6-(-3))}$$

$$1 - 3 + 4 = 2 \cdot 3$$

$$2 \neq 6 \Rightarrow -3 \text{ не корень.}$$

$$1 + \frac{3\sqrt{99}}{2} \sqrt{6}$$

$$2 + 3\sqrt{99} \sqrt{12} \Rightarrow 1 + \frac{3\sqrt{99}}{2} \in [-4, 6]$$

$$3\sqrt{99} \sqrt{10}$$

$$99 < 100$$

$$1 - \frac{3\sqrt{99}}{2} \sqrt{-4}$$

$$2 - 3\sqrt{99} \sqrt{-8} \Rightarrow 1 - \frac{3\sqrt{99}}{2} \in [-4, 6]$$

$$10 \sqrt{3\sqrt{99}}$$

$$100 > 99$$

Проверяем

$$\sqrt{1 + \frac{3\sqrt{99}}{2}} + 4 - \sqrt{6 - 1 - \frac{3\sqrt{99}}{2}} + 4 = 2\sqrt{\left(5 + \frac{3\sqrt{99}}{2}\right)\left(5 - \frac{3\sqrt{99}}{2}\right)}$$

$$\sqrt{5 + \frac{3\sqrt{99}}{2}} - \sqrt{5 - \frac{3\sqrt{99}}{2}} + 4 = 2\sqrt{25 - \frac{99}{4}}$$

$$\frac{\sqrt{10 + 3\sqrt{99}}}{2} - \frac{\sqrt{10 - 3\sqrt{99}}}{2} + 4 = 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{10 + 3\sqrt{99}}}{2} - \frac{\sqrt{10 - 3\sqrt{99}}}{2} = -3$$

$$\text{заменим, } \frac{10 + 3\sqrt{99}}{2} > \frac{10 - 3\sqrt{99}}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{10 + 3\sqrt{99}}}{2} - \frac{\sqrt{10 - 3\sqrt{99}}}{2} > 0 \Rightarrow \neq -3. \quad (1)$$

Значит, $1 + \frac{3\sqrt{11}}{2}$ — не корень.

$$\sqrt{-\frac{3\sqrt{11}}{2} + 4} - \sqrt{6 - 1 + \frac{3\sqrt{11}}{2}} + 4 = 2\sqrt{5 - \frac{3\sqrt{11}}{2}} \left(5 + \frac{3\sqrt{11}}{2}\right)$$

$$\sqrt{5 - \frac{3\sqrt{11}}{2}} - \sqrt{5 + \frac{3\sqrt{11}}{2}} + 4 = 1, \text{ значит верно л.к.}$$

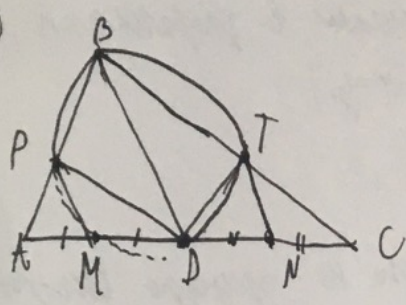
$$5 - \frac{3\sqrt{11}}{2} + 5 + \frac{3\sqrt{11}}{2} - 2\sqrt{\frac{100 - 99}{4}} = 9$$

$$10 - 1 = 9.$$

Ответ: $1 - \frac{3\sqrt{11}}{2}; 5.$

$5 + \frac{3\sqrt{11}}{2} > 5 - \frac{3\sqrt{11}}{2} \Rightarrow$
 на разности 6 разрядов
 разряды отрицательны.

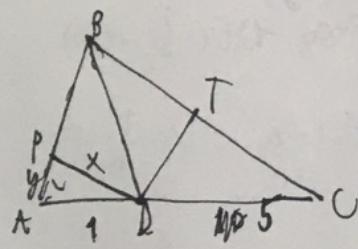
11)



BD — диаметр; $TN \parallel PM$; $AM = MD$; $DN = NC$.
 BD — диаметр; $\angle BPD$ — диаметр и опущенная на BD $\Rightarrow \angle BPD = 90^\circ \Rightarrow \angle APD = 90^\circ$ как диаметр.
 аналогично $\angle BTD = 90^\circ$ и $\angle DTC = 90^\circ$. $AM = MD \Rightarrow$
 PM — медиана к гипотенузе $\Rightarrow PM = AM = MD$

по об-бы медианам прямоугольного треугольника, аналогично
 $TN = DN = NC$. Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle APM = \alpha$ в к. $\triangle APM$ — равнобедр.
 $\Rightarrow \angle AMP = 180 - 2\alpha$. $PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMN = \angle TNP$, где MN — перпендикуляр к
 параллельным прямым. $\angle PMD = 180 - \angle AMP = 180 - 180 + 2\alpha = 2\alpha$. $\angle MPD =$
 $\angle MDP$ л.к. $PM = MD$; $\angle MDP = \frac{180 - 2\alpha}{2} = 90 - \alpha$. $\angle DPT = 180 - 2\alpha \Rightarrow \angle TDN = \angle DPN =$
 $= \frac{180 - (180 - 2\alpha)}{2} = \alpha$. $\angle PDT = 180 - \angle MDP - \angle TDN = 180 - (90 - \alpha) - \alpha = 90^\circ$. $\triangle BPD$ —
 равнобедренный катет. $\Rightarrow \angle PBT = 180 - \angle PDT = 180 - 90 = 90^\circ$. а) Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$.

б) если $PM = \frac{1}{2}$, то $AM = MD = \frac{1}{2} \Rightarrow AD = 1$. аналогично $DC = 5$.



$\angle PAD = \angle TDC$ (л.к. биссектр.) $= \alpha$; $\angle APD = \angle DTC = 90^\circ \Rightarrow$
 $\triangle APD \sim \triangle DTC$. если $AP = y$, то $DT = 5y$, если $PD = x$, то
 $TC = 5x$.

$\angle PAT = \angle BTD = \angle PDT = \angle DPB = 90^\circ$ (л.к. биссектр.) $\Rightarrow BPD$ —

прямоугольный $\Rightarrow BT = PD$; $DT = BP \Rightarrow BT = PD = x$.
 $AD^2 = AP^2 + DP^2 \Leftrightarrow 1^2 = y^2 + x^2$. $BD^2 = BT^2 + DT^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2 + 25y^2$. $x, y > 0$

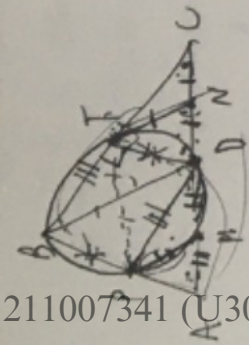
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + 25y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$x^2 + \frac{1}{5} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

2)

Умножен



$$(x+y)(6-x) = 6x - x^2 + 6y - xy$$

$$6x - x^2 + 6y - xy = 0$$

$$\sqrt{6-x} + \sqrt{6-y} = 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt{6-x} = 2\sqrt{6} - \sqrt{6-y}$$

$$2\sqrt{25-x^2}$$

$$\sqrt{\frac{10+3\sqrt{21}}{2}} - \sqrt{\frac{10-3\sqrt{21}}{2}} + 4 = 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt{6+b} - \sqrt{6-b} + 4 = 2\sqrt{6-b}$$

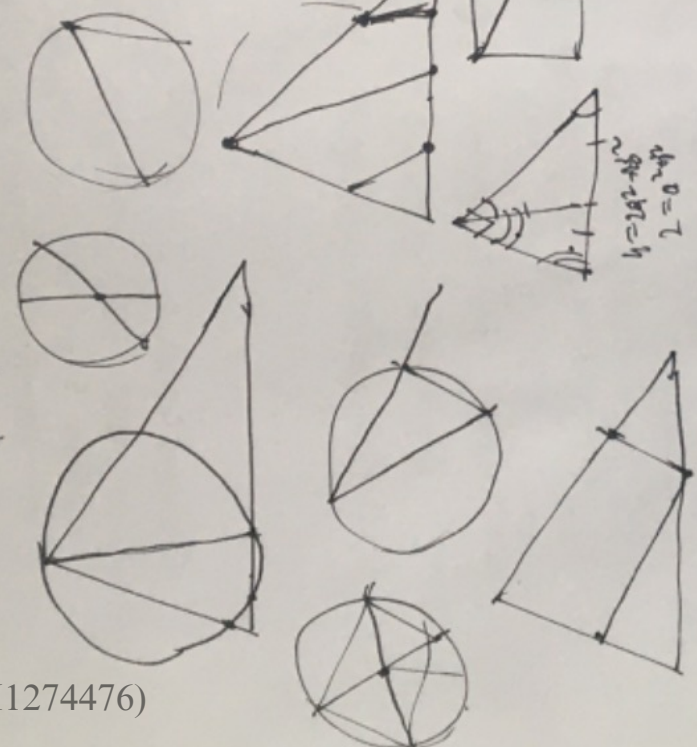
$$(0+1)^2 = 4$$

$$a+1=2$$

$$p=1$$

$$3-1+1=2$$

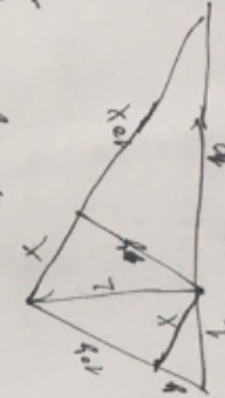
$$\sqrt{a-b} + \sqrt{a+b} =$$



$$\frac{2\sqrt{21}}{4\sqrt{21}} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

$$\frac{520}{434} = \frac{260}{217}$$



$$x^2 - y^2 = 1$$

$$6x^2 + 24x^2 - 0y + 0z = 0$$

$$\frac{830}{832} = \frac{52}{48}$$

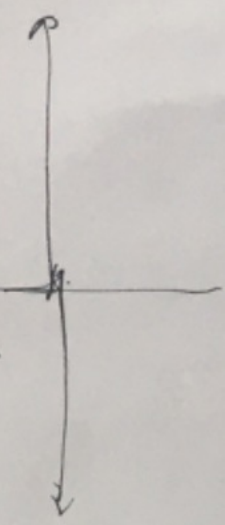
$$\frac{26}{16} = \frac{13}{8}$$

$$\frac{36x^2 - 46xy + 16y^2}{6}$$

$$26a^2 - 22ax - 20ay + 13x^2 + 3xy + 4y^2 = 0$$

$$D = (-22x - 20y)^2 - 4 \cdot 26(13x^2 + 3xy + 4y^2)$$

$$484x^2 + 400y^2 + 880xy - 520x^2 - 332xy$$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007341**

ID профиля: **306790**

Вариант 9

Memo book

(14)

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

$x^2+y^2 = a > 0$, $a \neq 0$
 $x^2y^2 = b > 0$.
 No $a \neq 0$
 No x and y
 No $a \neq 0$
 No x and y
 No $a \neq 0$

$$\begin{cases} \frac{2}{a} + b = 2 \Rightarrow b = 2 - \frac{2}{a} \\ a^2 + b = 5 \Rightarrow b = 5 - a^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2 - \frac{2}{a} &= 5 - a^2 \\ 2a - 2 &= 5a - a^3 \\ a^3 - 3a - 2 &= 0 \\ a &= -1 \\ a^3 - 0a^2 - 3a - 2 & \Big| a+1 \\ -a^3 + a^2 & \quad \underline{a^2 - a - 2} \\ -a^2 - 3a & \\ -a^2 - a & \quad \underline{-2a - 2} \\ -2a - 2 & \\ -2a - 2 & \quad \underline{} \\ 0 & \end{aligned}$$

$$(a-1)(a^2-a-2) = 0 = (1)$$

Mem. Bisher

$$(1) = (a+1)(a-2)(a+1) = 0.$$

$$(a+1)(a-2) = 0.$$

$$a = -1 \text{ um } a = 2$$

$$a \geq 0 \Rightarrow a \neq -1.$$

$$a = 2.$$

$$b = 5 - a^2 = 1 > 0.$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 2 - y^2 \\ x^2y^2 = 1 \end{cases}$$

$$(2 - y^2)y^2 = 1.$$

$$2y^2 - y^4 = 1$$

$$y^4 - 2y^2 + 1 = 0$$

$$(y^2 - 1)^2 = 0.$$

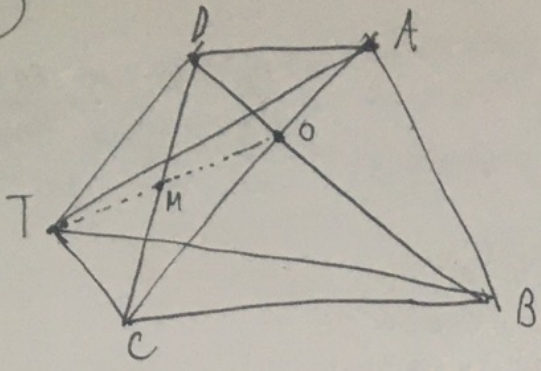
$$y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1.$$

$$x^2 = 2 - y^2 = 2 - 1 = 1.$$

$$x = \pm 1.$$

Jawaban: $(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1).$

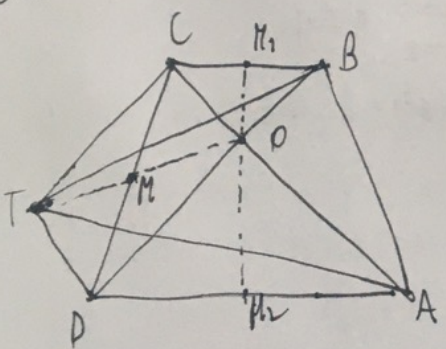
№6



угол: $\triangle AOB$ - равност.; $\triangle BOC$ равност.
 e) Т.т.т.т. - 0 отгол. $M (CM=MD, M \in CD)$
 $\angle ADO = 60^\circ = \angle OBC \Rightarrow AD \parallel BC$ и BD - ось сим.
 $\angle AOB = 180 - 60 = 120 = \angle BOC$; $AO=BO$ и
 $OB=OC \Rightarrow \triangle AOB = \triangle BOC$ по I кр.т.т.т.
 $\Rightarrow AB=BC$, значит - $ABCO$ - равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC .

рассмотрим $\triangle TDB$. Докажем $CT \parallel BD$. $(CM=MD$ и $TM=MO \Rightarrow CTDO$ - параллелограмм $\Rightarrow CT \parallel BD$).
 $TM=MO$. $TA=CO$ т.к. $CTDO$ - паралл., $CO=CB \Rightarrow TD=CB \Rightarrow CTDB$ - равнобедренная трапеция $\Rightarrow BT=CD$ как диагонали трапеции $BCD=AB \Rightarrow BT=AB$. Аналогично для $\triangle TDA$. $TD \parallel CO$ из $CTDO \Rightarrow TD \parallel AC$. $TC=AD$ из $CTDO$ и $OD=AO \Rightarrow CT=AD \Rightarrow \triangle TDA$ - равнобедренная трапеция. $CD=AT$ как диагонали $\Rightarrow AB=AT$, но $AB=BT \Rightarrow AB=AT=BT \Rightarrow \triangle ABT$ - равносторонний \triangle .

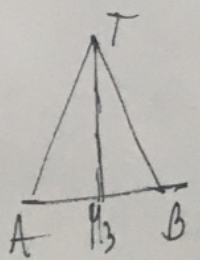
f)



$BC=3, AD=7$.
 $BC=OC=OB, OD=AO=AO, \angle BOA = 120^\circ$.
 $AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2 \cdot OB \cdot OA \cdot \cos 120^\circ$
 $AB^2 = 9 + 49 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \cos 120^\circ$
 $AB^2 = 58 + 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = 58 + 21 = 79$
 $AB = \sqrt{79} = AT = BT$.

$OM_1 = \sqrt{OB^2 - BM_1^2} = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
 $OM_2 = \sqrt{OA^2 - AM_2^2} = \sqrt{49 - \frac{49}{4}} = \frac{7\sqrt{3}}{2} \Rightarrow M_1M_2 = 5\sqrt{3}$ т.к. $OM_1 \perp BC$ и $OM_2 \perp AD$, где $BC \parallel AD$.

$S_{ABCO} = \frac{BC+AD}{2} \cdot M_1M_2 = \frac{3+7}{2} \cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$.

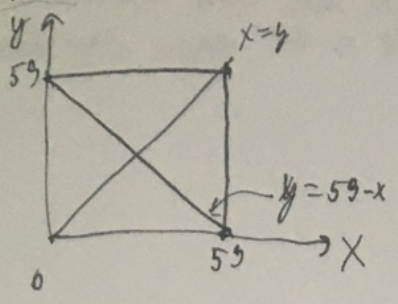


$BM_3 = \frac{\sqrt{79}}{2}$
 $TM_3 = \sqrt{(\sqrt{79})^2 - (\frac{\sqrt{79}}{2})^2} = \frac{\sqrt{79} \cdot \sqrt{3}}{2}$
 $S_{ABT} = \frac{AB \cdot M_3T}{2} = \frac{\sqrt{79} \cdot \frac{\sqrt{79} \cdot \sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{79\sqrt{3}}{4}$
 $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCO}} = \frac{\frac{79\sqrt{3}}{4}}{25\sqrt{3}} = \frac{79}{100}$

Ответ: $\frac{79}{100}$ (2)

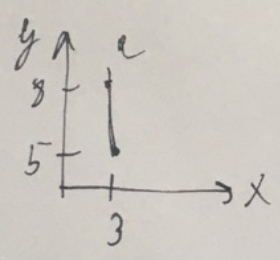
числом

N5



Задумав, що він 0 до 59 жартів сказав, коли
ко він 19060, то.е. 50. Ми взяли метод
виправки 2 точки - пара $(x_1, y_1); (x_2, y_2)$. Задумав
що будь-які x_i, y_i не менше ніж в межах
квадрата $\Rightarrow 1 \leq x_i, y_i \leq 58$. Зауважимо

ка-то методів взяли першою точкою на $x=y$. На ній було
с обмеження 58 члени мови (вн 19058), другим замінимо, то
на $x=y$ $x_i=y_i$. То.е. методів брали мову на $x=y$ було 58.
Задумав, що інші ми брали (a, a) , то ми не поміч
взяли (a, b) ми (a, a) ми (b, a) , то.е. мову саме дві коор-
дината обидва у мову мови будуть менше на відстані, першій
квіт. Ось. Приклад:



$(3,5)$ и $(3,8)$ менше на 3 оцінкою

Значить, ми одна координата не змінює обидва $(0, a)$. Було в
для x ; обидва $58-1=57$ значить, для y аналогічно. $58 \cdot 57 \cdot 57$
Для мову на $y=59-x$ аналогічно 59 варіантів на $y=59-x$ и
 $57 \cdot 57$ методів взяли ще одну мову, то $58 \cdot 57 \cdot 57$

раціональний випадок, коли одна точка дорівнює на $x=y$, друга на
 $y=59-x$. Першою мову ми 58 методів взяли, другою мовою. За-
думав, що ці значення не перекриваються в члени координатами.

$$y = 59 - x = x$$

$$59 = 2x$$

$$x = 29.5 = y \leftarrow \text{не член}$$

А значить, ми мали членими $58 \cdot 58$ и раціональний ка-то брали-
кми, повільно обидва, то в це випадку брали мову, менше
на, першій одна координата, значить. Повільно для
для: мову на $y=x$ ми 58 брали взяли, а на $y=59-x$ мову
56, тому що ми x , ми y обидва в один, то $58 \cdot 56$. (3)

mmmm

Uczno 2.58.57.57 - 58.56, mamy mo wyraz, kora jak ota mo ma na
x=y, a wyraz na y=59-x nie porownane gbadga w od nago bwrllona

$$2 \cdot 58(57^2 - 28)$$

$$\begin{array}{r}
 57 \\
 \times 57 \\
 \hline
 399 \\
 285 \\
 \hline
 3249
 \end{array}$$

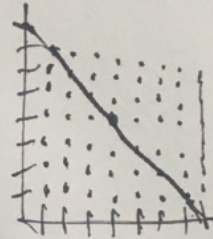
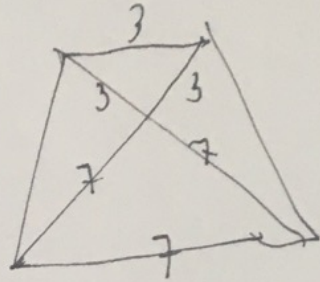
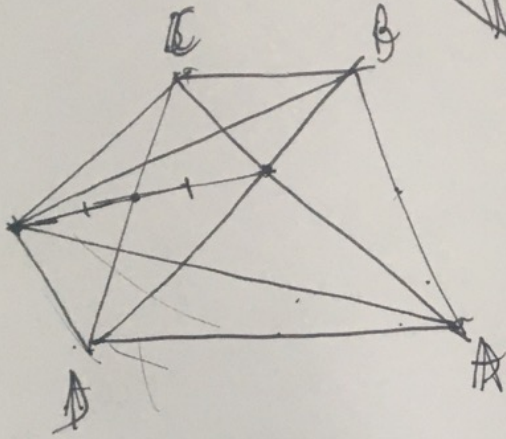
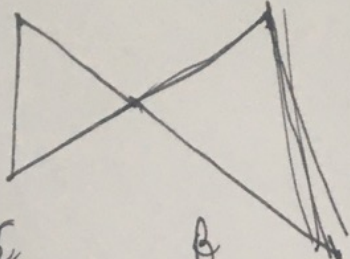
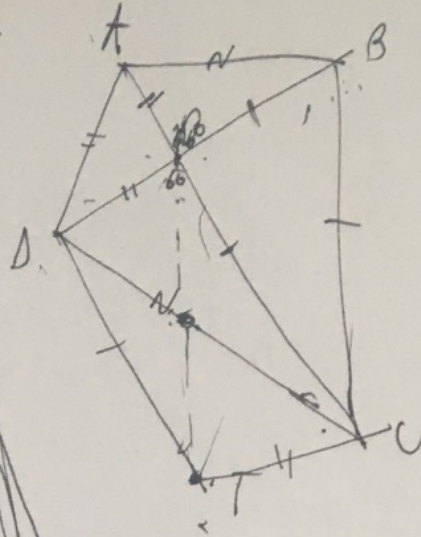
$$\begin{array}{r}
 3249 \\
 - 28 \\
 \hline
 3221 \cdot 2 = 6442 \\
 \times 57 \\
 \hline
 51536 \\
 32210 \\
 \hline
 373636
 \end{array}$$

Odpowiedź : 373636

репробна

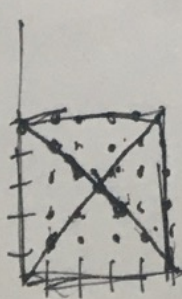
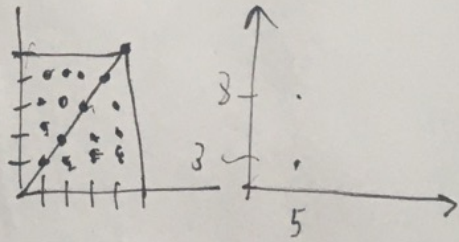
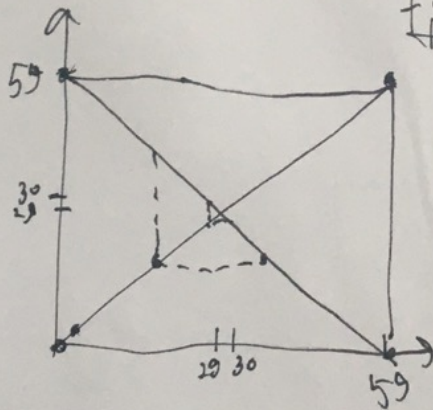
$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4 - y^4 + 3x^2y^2 = 5 \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{a} + b = 2 \\ a^2 + b = 5 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} x^2 &= 100 + 49 - 2 \cdot 10 \cdot 7 \cos 60 \\ x^2 &= 149 - 70 = 79 \end{aligned}$$

5 5



5-4
 $4 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 3 - 4 \cdot 2$

