Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

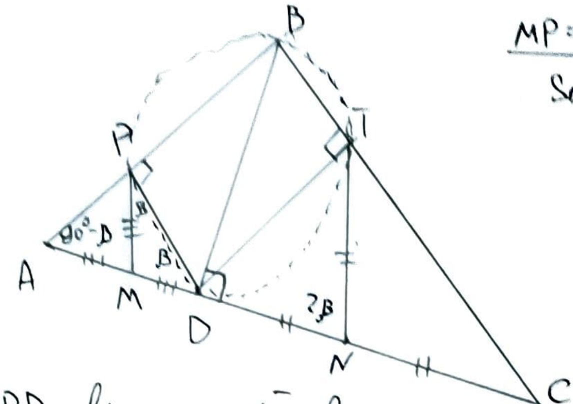
Шифр: **211007308**

ID профиля: **296015**

Вариант 9

Чистовик

№1



$MP=0{,}5$; $NT=2{,}5$; $BD=2$

$S_{\triangle ABC}$ - ?

а) 1) $\angle BPD$ - вписанный в окружность с диаметром BD и опирается на него, значит $\angle BPD=90^\circ$
Аналогично, $\angle BTD=90^\circ$

2) $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ - прямоуг., т.к. $\angle DTC=90^\circ$ и $\angle APD=90^\circ$

3) PM и TN - медианы, проведенные к гипотенузам в прямоуг. $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ соответственно, значит $AM=PM=MD$ и $DN=CN=TN$

4) Пусть $\angle PDM=\beta$, тогда $\angle MPD=\beta$, т.к. $\triangle PMD$ - равноб. ($PM=MD$)

5) $\angle APM=90^\circ-\beta$, т.к. $\angle APD=90^\circ$, значит $\angle AMP=$ ~~по~~ 2β (~~по сумме~~ т.к. он - внешний угол $\triangle MPD$ при вершине M) и $\angle MAP=90^\circ-\beta$

6) По условию $PM \parallel TN$, значит $\angle AMP=\angle DNT$, как соответственные

7) $\angle TNC=180^\circ-2\beta$ (по сумме смежных углов); т.к. $\triangle NTC$ - равноб ($NT=NC$), то $\angle NTC=\angle NCT=\frac{2\beta}{2}=\beta$ (как углы при основании)

8) $\angle ABC=180^\circ-(90^\circ-\beta)-\beta=\underline{\underline{90^\circ}}$

б) 1) из п. а) 3. : $AM=PM=MD=0{,}5$ и $DN=CN=TN=2{,}5$
Отсюда $AC=AM+MD+DN+NC=6$

2) AC - касательная к окружности с диаметром BD, значит $BD\perp AC$

3) Из п. 1 и 2 следует, что $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=6$

Ответ: 90°; 6

№2

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

ОДЗ: $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases}$ (условие)

$x \in [-4; 6]$

$24+2x-x^2=0$

$x^2-2x-24=0$

$D=100$

$x_1 = \frac{2+10}{2} = 6$

$x_2 = \frac{2-10}{2} = -4$

$24+2x-x^2 = (x+4)(6-x)$

Если условие выполняется, то $x+4 \geq 0$ и $6-x \geq 0$, значит

$\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{6-x} = \sqrt{(x+4)(6-x)}$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

Пусть $\sqrt{x+4} = a$; $\sqrt{6-x} = b$ тогда

$a - b + 4 - 2ab = 0$

Разложим данное выражение на множители:

Корень может быть только один, вследствие убывания и возр. функций. Это корень

$x = 5$

Ответ: 5.

Чистовик

№3

1) $A(x_A; y_A)$

$26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

2) $B(x_B; y_B)$

$ax^2 + 2a^2x - ay + a^3 + 1 = 0$

3) Найдем координаты т. A:

$26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

$5x^2 + x(8y - 22a) - 20ay + 4y^2 + 26a^2 = 0$

$D = (8y - 22a)^2 + (80ay - 16y^2 - 104a^2) \cdot 5 = 64y^2 - 352ay + 484a^2 + 400ay$
$- 80y^2 - 520a^2 = -(4y - 6a)^2 \leq 0$, т.к. $(4y - 6a)^2 \geq 0$

Отсюда, $D = 0 \Rightarrow 4y = 6a \Rightarrow y = \frac{6a}{4} = 1{,}5a$, тогда

$x_A = \frac{-8y + 22a}{10} = \frac{10a}{10} = a$

4) Найдем координаты т. B:

$ax^2 + 2a^2x - ay + a^3 + 1 = 0$, т.к. $a \neq 0$, то

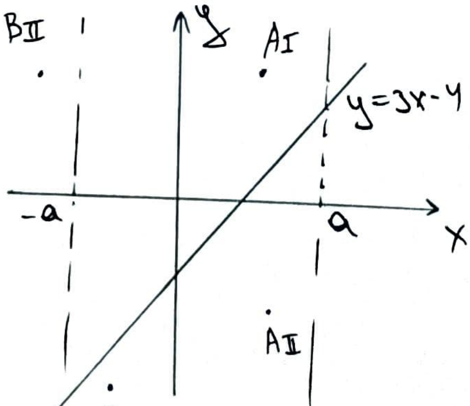
$x^2 + 2ax + a^2 + \frac{1}{a} = y$

Отсюда, $x_B = \frac{-2a}{2} = -a$

$y_B = a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$

5) $A(a; 1{,}5a)$

$B\left(-a; \frac{1}{a}\right)$



Возможны II случая:

I) A выше прямой, B ниже, тогда:

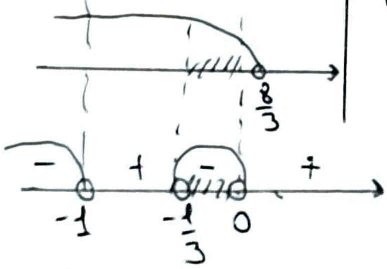
$$\begin{cases} 1{,}5a > 3a-4 \\ \frac{1}{a} < -3a-4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 1{,}5a < 4 \\ \frac{3a^2+4a+1}{a} < 0 \end{cases}$$

$3a^2+4a+1=0$

$a+b+c=0$

$$\left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

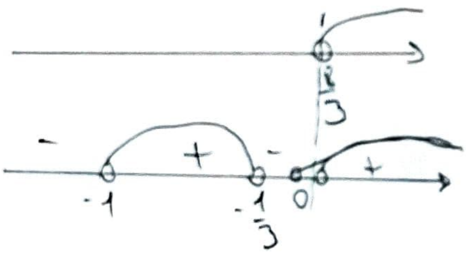
$$\begin{cases} a < \frac{8}{3} \\ \frac{(a+1)(a+\frac{1}{3})3}{a} < 0 \end{cases}$$



$a \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; 0)$

II) A ниже прямой, B выше, тогда

$$\begin{cases} 1{,}5a < 3a-4 \\ \frac{1}{a} > -3a-4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} a > \frac{8}{3} \\ \frac{(a+1)(a+\frac{1}{3})3}{a} > 0 \end{cases}$$



$a \in (\frac{8}{3}; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; 0) \cup (\frac{8}{3}; +\infty)$

Черновик

2. $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

$x+4 \geq 0 \quad 6-x \geq 0$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 - 2\sqrt{x+4}\sqrt{6-x}$

$\cancel{\sqrt{x+4}\,(1+\sqrt{6-x})}$

$\underbrace{\sqrt{x+4}}_{a} - \underbrace{\sqrt{6-x}}_{b} + 4 - 2\underbrace{\sqrt{x+4}}_{a}\underbrace{\sqrt{6-x}}_{b} = 0$

$x-1=y$

$\cancel{a+b+4+2ab=0}$

$a-b+4-2ab=0$

$(a-ab)+(b-ab)+4=0$

$a(1-b)-b(1+a)+4=0$

$24+2x-x^2=0$

$x^2-2x-24=0$

$D = 4+96=10^2$

$x_1 = \frac{2+10}{2} = 6$

$x_2 = \frac{2-10}{2} = -4$

$-(x+4)(x-6)$

$\sqrt{y+4} - \sqrt{-y+4} = 2\sqrt{y+4}\sqrt{4-y}$

$a-b+4-2ab=0$

$\boxed{\begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 6 \end{cases} \quad ОДЗ \quad x \in [-4;6]}$

$a(1-2b)+(1-2b)+(3+b)$

$a-b+4-2ab=0$

$a-b+4+2ab=0$

$\frac{a}{b}-1+\frac{4}{b}-2a=0$

$\frac{1}{b}(a+4)-2(a+\frac{1}{2})$

$a(\frac{1}{b}-2)+4(\frac{1}{b}-\frac{1}{4})$

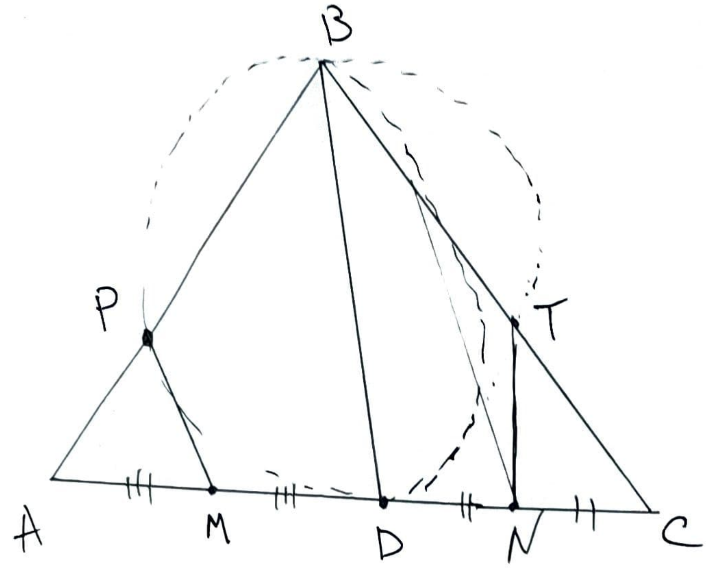
$\frac{1}{b}(a+4)-1-2a$

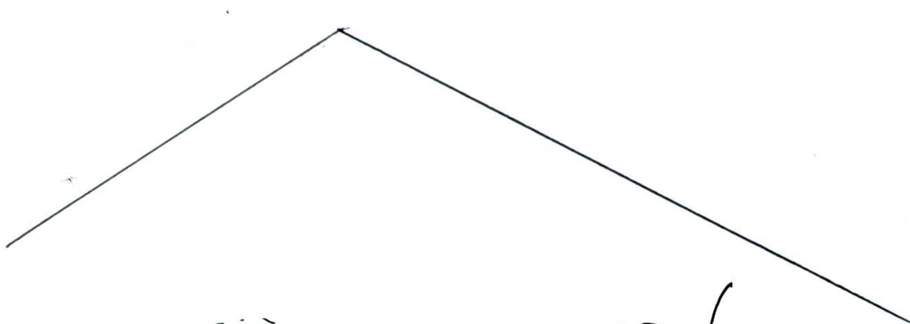
$4\cdot\frac{2}{3}$

$1-3+4=2\cdot 3$

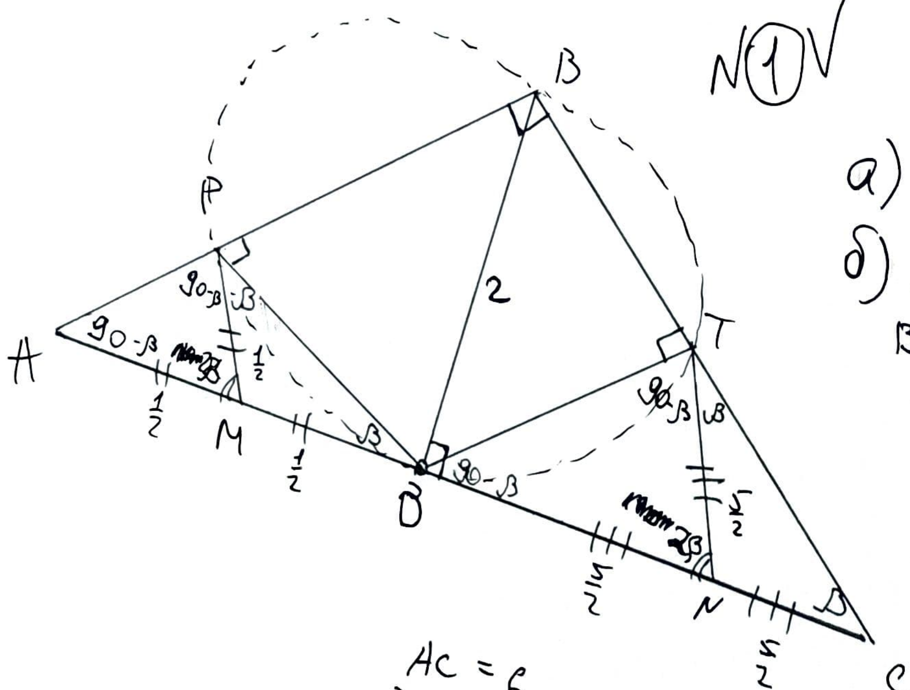
$3-1+4=2\cdot 3$

1





N(1)√



a) √ $\angle ABC = 90°$

б) $MP = \frac{1}{2}$; $NT = \frac{5}{2}$

$BD = 2$

$AC = 6$

$BD = 2$

$S = 6$

Черновик

3. $A(x_A; y_A)$

~~26a²4~~ $26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

$B(x_B; y_B)$

$ax^2 + 2a^2x - ay + a^3 + 1 = 0$ $\qquad y = 3x - 4$

~~x_B~~ $y = x^2 + 2ax + a + \frac{1}{a}$

$x_B = \frac{-2a}{2} = -a$

$y_B = a^2 - 2a^2 + a + \frac{1}{a} = -a^2 + a + \frac{1}{a}$

$A\left(a; \frac{3a}{2}\right)$ $\qquad \boxed{B\left(-a; -a^2 + a + \frac{1}{a}\right)}$

$\begin{array}{r} 44 \\ \times 8 \\ \hline 352 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{r} 22 \\ \times 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 484 \end{array}$

$5x^2 + 8xy,$

$5x^2 + x(8y - 22a) - 20ay + 4y^2 + 26a^2 = 0$

$D = (8y-22a)^2 + (80ay - 16y^2 - 104a^2)5$

$64y^2 - 352ay + 484a^2 + 400ay - 80y^2 - 520a^2$

$-16y^2 + 48ay - 36a^2$

$-(16y^2 - 48ay + 36a^2)$

$-(4y - 6a)^2 = 0$

1) $\begin{cases} \frac{3a}{2} > 3a - 4 \\ -a^2 + a + \frac{1}{a} < -3a - 4 \end{cases}$

$\begin{cases} 1{,}5a < 4 \\ \end{cases}$

~~$-8y+22a$~~

~~$x_1 =$~~ $\qquad x = \frac{-8y + 22a}{10} = a \qquad 4y = 6a \qquad y = \frac{6a}{4} = \frac{3a}{2}$

$x_2 =$

3

1) $\begin{cases} 1{,}5a<4 \\ a^2-4a-4-\frac{1}{a}>0 \end{cases}$

$a(a-4)-\frac{1}{a}(\cdot \quad a(a^2-4)$

$\frac{a^3-4a^2-4a-1}{a}>0$

$\sqrt{6-x}\left(2\sqrt{x+4}+1\right)=\sqrt{x+4}+4$

$(6-x)\left(2x+8+1+ +4\sqrt{x+4}\right)$

$x+4+(8\sqrt{x+4})+$

16

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{x+4}\sqrt{6-x}$

$a-b+4=2ab$

$2ab+b=a+4$

$a-b+4-2ab=0$

$b(2a+1)=a+4$

$a(1-2b)+4-b$

$(a^2-2ab+b^2)-a^2-b^2+2a-2b+4-a+b$

$-(a^2+2a+1)-(b^2+2b+1)-a+b+2$

$(a-b)^2-(a+1)^2-(b+1)^2-(a$

$a-b+4-2ab=0$

$\frac{a}{b}-8+\frac{4}{b}-2a\overset{+7}{=}0$

$a\left(\frac{1}{b}-2\right)+4\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{4}\right)$

$\frac{1}{b}(a+4)-2(a+4)$

$(a+4)\left(\frac{1}{b}-2\right)=-7$

$(2x+4\sqrt{x+4}+9)$

$x+20+8\sqrt{x+4}$

$(6-x)(2x+8+1+4\sqrt{x+4})=x+4+16+8\sqrt{x+4}$

$12x+24\sqrt{x+4}+54-2x^2$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007308**

ID профиля: **296015**

Вариант 9

Чистовик

№4

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \quad (1) \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 5 \quad (2) \end{cases}$$

Из (2) вычтем (1):

$$(x^2+y^2)^2 - \frac{2}{x^2+y^2} = 3$$

$$(x^2+y^2)^3 - 3(x^2+y^2) - 2 = 0$$

Пусть $t = x^2+y^2, t \geq 0$

$t^3-3t-2=0$. Подбором находим, что один из корней равен 2.

$$\begin{array}{r|l} t^3-3t-2 & t-2 \\ \cline{2-2} -\;t^3-2t^2 & t^2+2t+1 \\ \cline{1-1} 2t^2-3t & \\ -\;2t^2-4t & \\ \cline{1-1} t-2 & \\ -\;t-2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Отсюда, $t^3-3t-2=(t+1)^2(t-2)=0$

$$\left[\begin{array}{l} t=-1 \; (t\geq 0) \\ t=2 \end{array}\right.$$

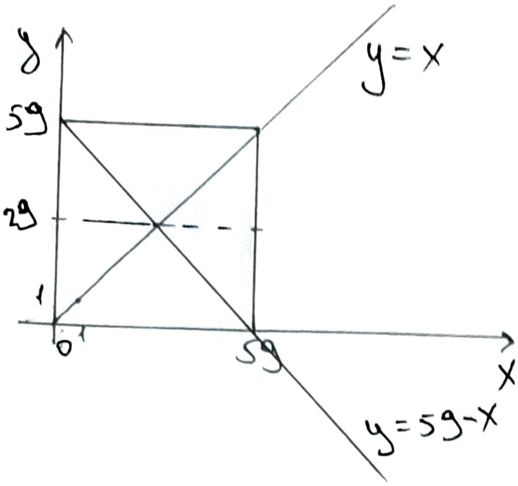
Вернемся к замене:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2y^2=1 \\ x^4+y^4=2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2y^2=1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ y^2=\frac{1}{x^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+\frac{1}{x^2}=2 \\ y^2=\frac{1}{x^2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x^4-2x^2+1=0, x\neq 0 \\ y^2=\frac{1}{x^2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y=\cancel{\pm}\sqrt{\frac{1}{x^2}} \\ y=-\sqrt{\frac{1}{x^2}} \end{array}\right. \end{cases} ; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(1;-1);(1;1);(-1;1);(-1;-1)$

№5



1) Всего узлов внутри квадрата (не считая узлы на его сторонах): 58^2.

2) Посчитаем кол-во способов для узла (1;1):
Все узлы с ~~осями~~ ординатой 1 не подходят, значит остается 57^2 узлов.

Для точки (2;2): 57^2-1, т.к. вариант выбора узла (1;1) и (2;2) уже был посчитан.

Общее кол-во способов для прямой $y=x$:

$$\sum_{i=1}^{58}\left(57^2-(i-1)\right)=58\cdot57^2-\frac{(1+57)57}{2}=58\cdot57^2-57\cdot29$$

3) Посчитаем кол-во способов для прямой $y=59-x$ с учетом кол-ва способов для прямой $y=x$:
Для узла (58; 1): 57^2-57, например.
Заметим, что для узла (29;29) мы уже посчитали кол-во способов, поэтому общее кол-во способов для прямой $y=59-x$:

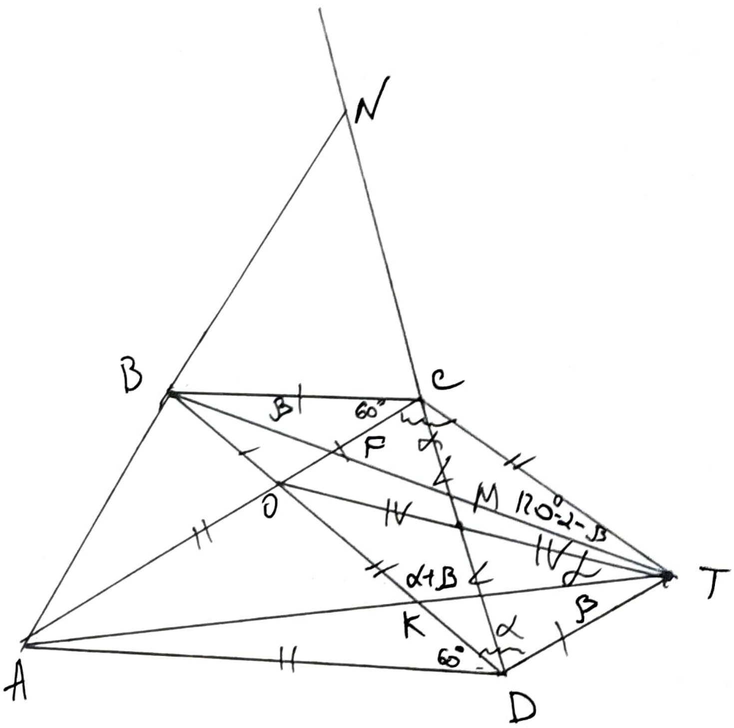
$$(57^2-57)+(57^2-57-1)+\ldots+(57^2-57\cdot27)+\ldots+(57^2-57-29)+\ldots+(57^2-57\cdot2)=$$
$$=57^3-57^2-\frac{(1+27)27}{2}-\frac{(29+57)\cdot29}{2}=57^3-57^2-14\cdot27-43\cdot29$$

4) Объединяя способы, получим: $58\cdot57^2-57\cdot29+57^3-57^2-14\cdot27-$
$-43\cdot29=2\cdot57^3-14\cdot29-14\cdot27=2\cdot57^3-14\cdot56$

<u>Ответ: $2\cdot57^3-14\cdot56$</u>

Чистовик

№6



а) 1) $\angle OBC = \angle ODA = 60°$ (по условию), а они соответственные, значит $BC \parallel AD \Rightarrow ABCD$ − трапеция

2) $\triangle AOB = \triangle COD$ (по I признаку рав-ва):

1) $\angle O$ − общ.

2) $OB = OC$ (т.к. $\triangle OBC$ − равност)

3) $OA = OD$ (т.к. $\triangle AOD$ − равност.)

Из рав-ва: $AB = CD \Rightarrow ABCD$ − равноб. трапеция

3) В четырехуг $DOCT$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, значит $DOCT$ − параллелограмм. Отсюда, $\angle OCT = \angle ODT = \alpha$ и $OC = DT$ и $OD = CT$

4) $\triangle BCT = \triangle ADT$ (по I признаку рав-ва):

1) $\angle BCT = \angle ADT = 60° + \alpha$

2) $BC = DT$

3) $CT = AD$

Из рав-ва: $BT = AT \Rightarrow \triangle ABT$ − равнобедренный.
и $\angle TBC = \angle ATD = \beta$

5) По сумме углов в $\triangle BCT$: $\angle CTB = 120^\circ - \alpha - \beta$
т.к. COTD - параллелограмм, а $\angle COD = 120^\circ$, то $\angle CTD = 120^\circ$

6) $\angle CTD = 120^\circ = 120 - \alpha - \beta + \beta + \angle BTA \Rightarrow \angle BTA = \alpha$

7) $\angle OKT = \alpha + \beta$ (по сумме внешних углов)

8) $\angle OFT = 120^\circ - \alpha - \beta + \alpha = 120^\circ - \beta$ (как внешний угол при вершине F $\triangle FCT$)

9) Сумма углов в четырехуг. равна 360°, тогда для четырехуг OFTK:
$360^\circ = \angle OFT + \angle FTK + \angle TKO + \angle KOC = 120^\circ - \beta + \alpha + \alpha + \beta + 120^\circ = 240^\circ + 2\alpha$
Отсюда, $240^\circ + 2\alpha = 360^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ \Rightarrow \angle BTA = 60^\circ$

10) $\angle BTA = 60^\circ$ и $BT = AT$, отсюда в $\triangle ABT$ все углы по 60° градусов, значит $\triangle ABT$ - правильный

б) 1) $S_{ABCD} = S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOD} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle AOB} = \frac{3^2\sqrt{3}}{4} + \frac{7^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 120^\circ \cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 58 + \frac{21\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$

2) $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, с одной стороны
с другой: $S_{\triangle AOB} = \sqrt{p(p-3)(p-7)(p-AB)} =$
$= \sqrt{\frac{10+x}{2} \cdot \frac{x+4}{2} \cdot \frac{x-4}{2} \cdot \frac{10-x}{2}} = \frac{\sqrt{(10-x^2)(x^2-16)}}{4} = \frac{21\sqrt{3}}{4}$

$21\sqrt{3} = \sqrt{(100-x^2)(x^2-16)}$

$21 \cdot 3 = (100-x^2)(x^2-16)$

$63 = 100x^2 - 1600 - x^4 + 16x^2$

$116x^2 - x^4 - 1600 = 63$

$x^4 - 116x^2 + 1663 = 0$

$t^2 - 116t + 1663 = 0$

Чистовик

$D = 116^2 - 4\cdot 1663 = 6804$

Отсюда, $AB =$

Находим AB, и $S_{\triangle ABT} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$

$$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}}{25\sqrt{3}} = \frac{AB^2}{100}$$

Ответ: $\frac{AB^2}{100}$

Черновик

4. $\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases}$

$\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{matrix}$

$x^2y^2=1$

$\boxed{(1;1)\ (1;-1)\ (-1;1)\ (-1;-1)}$

$x^2+y^2=2$ $\quad x^4+y^4=2$

$x^2+y^2=x^4+y^4$

$\begin{cases} 2+x^4y^2+x^2y^4=2x^2+2y^2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases}$

$(x^2+y^2)^2+x^2y^2=5$

$(x^2+y^2)^2-\frac{2}{x^2+y^2}=3$

$(x^2+y^2)^3-3(x^2+y^2)-2=0$

$t^3-3t-2=0$

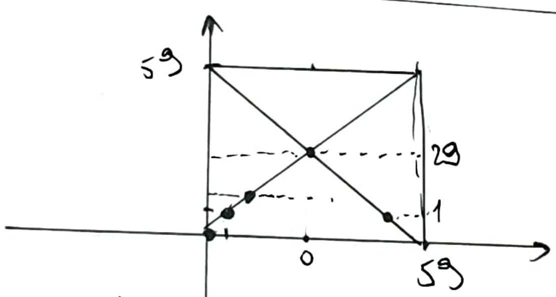
$(t-2)(t+1)^2=0$

$(x^2+y^2-2)(x^2+y^2+1)^2=0$

$x^2+y^2=2$

$\begin{array}{l|l} t^3-3t-2 & t-2 \\ \underline{-\,t^3-2t^2} & t^2+2t+1 \\ \quad 2t^2-3t & \\ \quad \underline{-\,2t^2-4t} & \\ \qquad\quad t-2 & \end{array}$

5.



$(5\cancel{8}^2-1)\ldots(5\cancel{7}^2-58)$

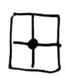
$(57^2-\cancel{0}-57)(57^2-2-57)$

$(57^2-3$

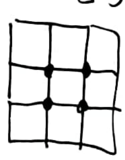
$57^2+(57^2-1)+\ldots+(57^2-57)$

$(57^2-57)+\ldots+(57^2-57-28)+$

$+(57^2-57-30)+(57^2-57-57)$



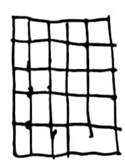
1



4

9

$86\,|\,\underline{2}\ \ 43$



16 4^2

$58\cdot57^2-\frac{(1+57)\cdot57}{2}$

$29\cdot57$

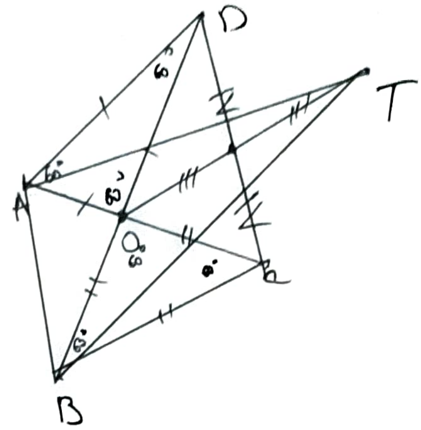
$\begin{array}{r} 57 \\ +29 \\ \hline 86 \end{array}$

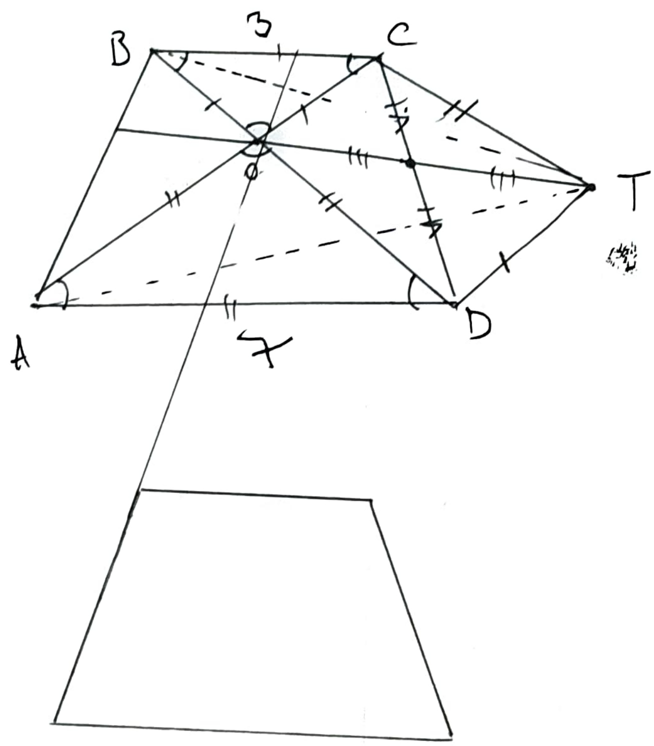
$57^3-57\cdot57^{2}-\frac{(1+28)\cdot28}{2}-\frac{(30+57)\cdot28}{2}$

14

1

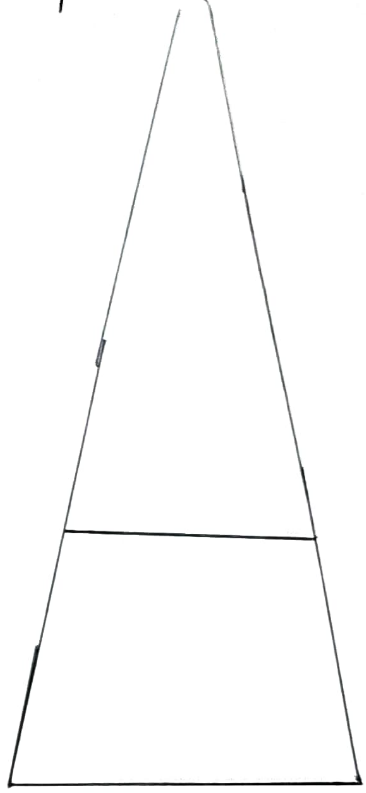
6





2.

Черновик



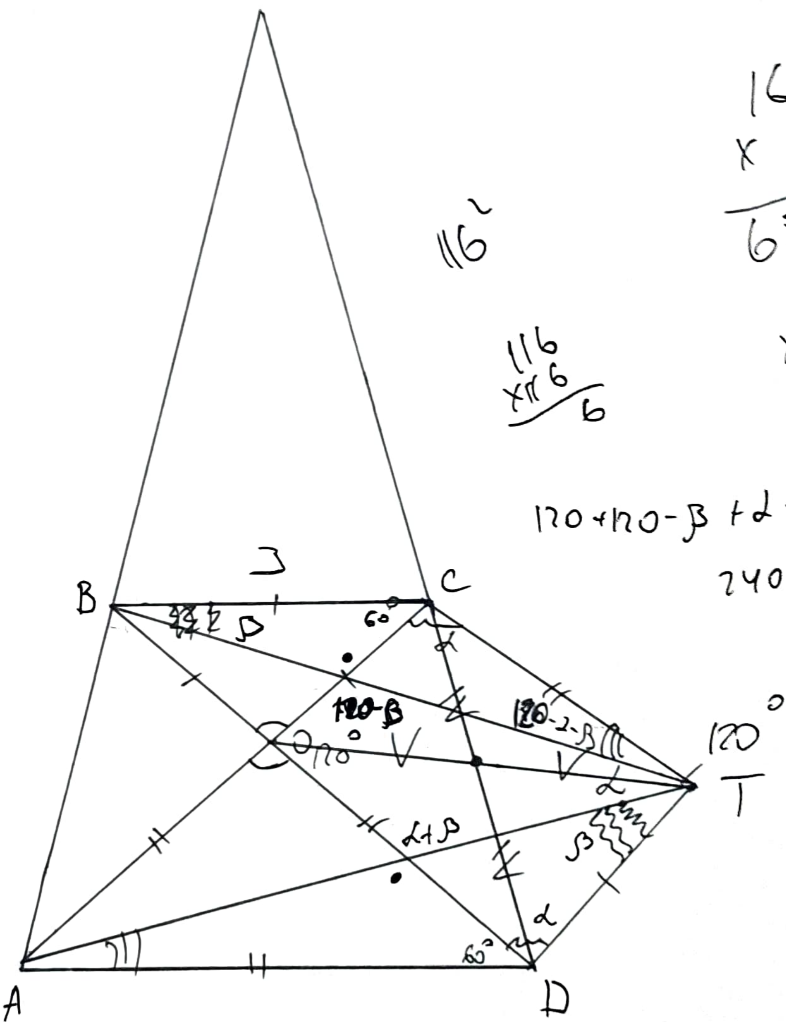
116
×116

696
116
116

13456
−6652

6804

4



116^2

116
×116
6

1683
× 4

6852

80
×80

6400

188
704
+704
·4

$120+120-\beta+\alpha+\alpha+\beta$

$240+2\alpha$

58 | 2
18

29 | 2
14,5

29+21

7

3