Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

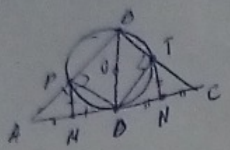
Шифр: **211007180**

ID профиля: **807520**

Вариант 9

Чистовик

№1



Дано $\triangle ABC$, $D \in AC$, $\omega(O, r)$, BD - диам, $P \in \omega$, $P \in AB$, $T \in \omega$, $T \in BC$, M - сер. AD, N - сер CD, $PM \parallel TN$

Найти: а) $\angle ABC$ б) $MP = \frac{1}{2}$; $NT = \frac{5}{2}$; $BD = 2$; S_{ABC} - ?

Решение

а) $\angle BPD = \angle BTD = 90°$ (т.к. BD - диам) $\Rightarrow \angle APD = \angle DTC = 90°$

$PD \perp AB$, $PD \perp DT$, $DT \perp BC$, $DT \perp PD \Rightarrow AB \parallel DT$, $BC \parallel PD \Rightarrow \angle A = \angle TDC$, $\angle PDA = \angle C$ (как соот) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle APD \sim \triangle DTC$ (по I приз под $\triangle$)

$PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMD = \angle TNC$ (как соот)

$AM = MD = PM$ (т.к. прям. $\triangle APD$) $\Rightarrow \angle A = \angle APM$

$\angle PDA + \angle A + \angle APD = 180° \Rightarrow \angle ADP = 180° - \angle A - 90° = 90° - \angle A$

$\angle PDA = \angle C$ (т.к. $\triangle APD \sim \triangle DTC$)

$\angle A + \angle C + \angle B = 180° \Rightarrow \angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - \angle A - (90° - \angle A) = 90°$

б) $\angle B = \angle BPD = \angle BTD = 90° \Rightarrow PBTD$ - прям. $\Rightarrow PD = BT$, $PB = DT$

$\triangle APD \sim \triangle DTC \Rightarrow \frac{DT}{AP} = \frac{NT}{PM} = \frac{5}{2} : \frac{1}{2} = 5$; $\frac{TC}{PD} = 5$; $\Rightarrow DT = 5 \cdot AP$; $TC = 5 \cdot PD$

$\angle A$ - общ, $\angle B = \angle APD = 90° \Rightarrow \triangle APD \sim \triangle ABC$ (по I приз под $\triangle$) $\Rightarrow \frac{PD}{BC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \cancel{PD}$

$AD = 2 \cdot AM = 2 \cdot PM = 1$; $DC = 2 \cdot DN = 2 \cdot TN = 5$

$PD = \sqrt{AD^2 - AP^2} = \sqrt{1 - AP^2}$ (по т Пифагора)

$\cancel{BT}$ $DT^2 + BT^2 = BD^2 \Rightarrow DT^2 + PD^2 = BD^2 \Rightarrow 25AP^2 + 1 - AP^2 = 4 \Rightarrow 24AP^2 = 3 \Rightarrow AP = \sqrt{\frac{1}{8}}$

$PD = \sqrt{1 - AP^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{7}{8}}$

$S_{ABC} = S_{PBTD} + S_{APD} + S_{DTC} = PD \cdot DT + \frac{1}{2} \cdot PD \cdot AP + \frac{1}{2} \cdot DT \cdot TC = PD \cdot 5 \cdot AP + \frac{1}{2} \cdot PD \cdot AP + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot AP \cdot 5 \cdot PD =$

$= (5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5) AP \cdot PD = \frac{36}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt{\frac{7}{8}} = \frac{18\sqrt{7}}{8} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$

Ответ: а) $\angle ABC = 90°$ б) $S_{ABC} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$

211007180 (U807520 M1275705)

Чистовик

№2

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

$\begin{cases} x+4\geq 0 \\ 6-x\geq 0 \end{cases}$

$-4\leq x\leq 6$

$a=\sqrt{x+4},\ b=\sqrt{6-x},\ a\geq 0,\ b\geq 0$

$a-b+4=2ab$

$a+4=b(2a+1)$

$b=\dfrac{a+4}{2a+1}$

$a^2=x+4;\ b^2=6-x$

$\begin{cases} x=a^2-4 \\ x=6-b^2 \end{cases}$

$a^2-4=6-b^2$

$a^2-4=6-\dfrac{(a+4)^2}{(2a+1)^2}$

$a^2-4-6+\dfrac{(a+4)^2}{(2a+1)^2}=0$

$\dfrac{a^2(2a+1)^2-10(2a+1)^2+(a+4)^2}{(2a+1)^2}=0$

$\begin{cases} 4a^4+4a^3+a^2-10(4a^2+4a+1)+a^2+8a+16=0 \\ 2a+1\neq 0 \end{cases}$

$4a^4+4a^3-38a^2-32a+6=0$

$2a^4+2a^3-19a^2-16a+3=0$

	2	2	-19	-16	3
-1	2	0	-19	3	0

$(a+1)(2a^3-19a+3)=0$

	2	0	-19	3
3	2	6	-1	0

$(a+1)(a-3)(a^2+6a-1)=0$

$a^2+6a-1=0$

$D=40$

$a=\dfrac{-6\pm 2\sqrt{10}}{2}=-3\pm\sqrt{10}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=3 \\ a=-3\pm\sqrt{10} \end{array}\right. \\ a\geq 0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=-3+\sqrt{10} \end{array}\right.$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3^2=x+4 \\ (-3+\sqrt{10})^2=x+4 \end{array}\right. \\ -4\leq x\leq 6 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=15-6\sqrt{10} \end{array}\right.$

Ответ: $5;\ 15-6\sqrt{10}$

211007180 (U807520 M1275705)

Чистовик

№3

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$

$y=\frac{ax^2+2a^2x+a^3+1}{a}$

$y=(x+a)^2+\frac{1}{a}$

$x_в=-a$

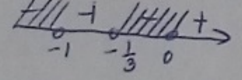
$y_в=\frac{1}{a}$ т.В.

$y=3x-4$

1) $y_в<3x_в-4$

$\frac{1}{a}<-3a-4$

$\frac{(a+1)(3a+1)}{a}<0$

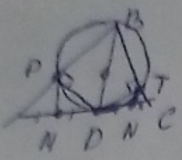


$a\in(-\infty;-1)\cup(-\frac{1}{3};0)$

211007180 (U807520 M1275705)

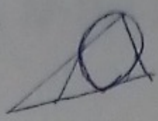
№1 Черновик

$PN \parallel TN$



$DT=\frac{5}{4}AP$

$TC=\frac{5}{4}PD$



$\angle B+\angle D=180^\circ$

$AD=1$

$PD=a,\ DT=b$

$a^2+b^2=4$

$AP=\sqrt{1-a^2};\ TC=\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)}$

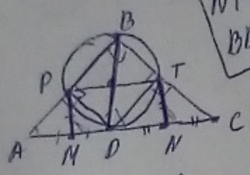
$AB=\sqrt{1-a^2}+b;\ BC=\sqrt{\frac{25}{16}-b^2}+$

$\angle P+\angle T=180^\circ$

$S=\frac{1}{2}AB\,BC=\frac{1}{2}($

$\boxed{MD=\frac{1}{2},\ NT=\frac{5}{2},\ BD=2}$

$\angle APD+\angle P=1$ $\angle APD=180^\circ-\angle P$



$\angle A+\angle PDA=90^\circ$

$\angle C+\angle TDC=90^\circ$

$\angle D+\angle B=180^\circ$

$\angle A+180^\circ-\angle P+\angle PDA=180^\circ$

$\angle P=\angle A+\angle PDA$

$\angle T=\angle C+\angle TDC$

$a=\sqrt{4-b}$

$\frac{DT}{AD}=\frac{DC}{AD}=\frac{5}{4}:\frac{1}{1}=\frac{5}{4}$ $AD=AP\cdot AB$

$\angle D=180^\circ-\angle PDA-\angle TDC=$

$=180^\circ-(90^\circ-\angle A)-(90^\circ-\angle C)=$

$=\angle A+\angle C$

$\angle B+(180^\circ-\angle PDA-\angle TDC)=180^\circ$

$\angle B=\angle PDA+\angle TDC$

$\angle B=\angle P-\angle A+\angle T-\angle C$

$\angle M+\angle N=180^\circ$

$\alpha+90^\circ-\alpha=180^\circ$

$B=90^\circ$

$2\angle A$ $\angle A+\angle MDT+\angle$ $\boxed{PD^2+DT^2=4}$

$y=3x-4$

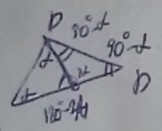
(1) $3x-4>y$

(2) $3x-4<y$

№2.

$\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}\right)^2=\left(2\sqrt{(x+4)(6-x)}-4\right)^2$

$y=\frac{ax^2+2a^2x+a^3+1}{a}=x^2+2$



$a-b=2ab-4$

$a+4=b(2a+1)$

$b=\frac{a+4}{2a+1}$

$a^2=x+4$

$b^2=6-x$

$x=a^2-4$

$x=6-b^2$

$a^2-4=6-b^2$

$a^2-4=6-\frac{(a+4)^2}{(2a+1)^2}$

$3x-4\le$

$0\le\frac{ax^2+2a^2x+a^3+1-3}{a}$

$\angle A=\alpha$

$x\geq-4$

$6-x\geq0$

$x\le6$

$a^2-4-6+\frac{(a+4)^2}{(2a+1)^2}=0$

$2a+1\neq0$

$(\sqrt{1-a^2}+b)\left(\sqrt{\frac{25}{16}-b^2}+a\right)$

$(\sqrt{3}+b)(\sqrt{4-b^2}$

$\begin{cases}x\geq-4\\x\le6\end{cases}$

$19\cdot19=361$

$a^2(2a+1)^2-10(2a+1)^2+(a+4)^2=0$

$(2a^2+a)^2$

$4a^4+4a^3+a^2-10(4a^2+4a+1)+a^2+8a+16=$

$-1=\sqrt{x+4}$

$-40a^2-40a-10$

$\left[\begin{aligned}&3=\sqrt{x+4}\\&-3+\sqrt{10}=\sqrt{x+4}\\&-3-\sqrt{10}=\sqrt{x+4}\end{aligned}\right.$

$\frac{361}{36}\geq10$

$4a^4+4a^3-38a^2-32a+6=0$

$2a^4+2a^3-19a^2-16a+3=0$

$\begin{cases}-4\le x\le6\\ \left[\begin{aligned}&9=x+4\\&(\sqrt{10}-3)^2=x+4\end{aligned}\right.\end{cases}$

	2	2	−19	−16	3
−1	2	0	−19	3	0

$2-2-19+16=$

$\left[\begin{aligned}&x=5\\&x=10-6\sqrt{10}+9-4\end{aligned}\right.$

$-4\le x\le6$

$\left[\begin{aligned}&x=5\\&x=15-6\sqrt{10}\end{aligned}\right.$

$2\cdot27-19\cdot3+3$

$54-57+3$

$(a+1)(2a^3-19a+3)=0$

	2	0	−19	3
3	2	6	−1	0

$(a+1)(a-3)(a^2+6a-1)=0$

$6\cdot3{,}1=18{,}6$

$15-18{,}6=-3{,}6$

$a^2+6a-1=0$

$D=36-4\cdot(-1)=40$

$15-6\sqrt{10}\geq-4$

$19\geq6\sqrt{10}$

$3\frac{1}{6}\geq\sqrt{10}$

$\frac{19^2}{6^2}\geq10$

$a=\frac{-6\pm2\sqrt{10}}{2}=-3\pm\sqrt{10}$

Ответ: $5,\ 15-6\sqrt{10}$

211007180 (С809320, М1275705)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007180**

ID профиля: **807520**

Вариант 9

Чистовик

№4

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ (x^2+y^2)^2+x^2y^2=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2y^2=5-(x^2+y^2)^2 \\ \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \end{cases}$$

$$\frac{2}{x^2+y^2}+5-(x^2+y)^2=2$$

$a=x^2+y^2$, $a>0$.

$$\frac{2}{a}+5-a^2=2$$

$$2+3a-a^3=0$$

$$-a^3+3a+2=0$$

	-1	0	3	2
-1	-1	1	2	0

$$(a+1)(-a^2+a+2)=0$$

$$-a^2+a+2=0$$

$$D=1-4(-1)\cdot 2=9$$

$$\left[\begin{array}{l} a=\frac{-1-3}{-2}=2 \\ a=\frac{2}{-2}=-1 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=2 \end{array}\right. \\ a>0 \end{cases} \Rightarrow a=2.$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ \frac{2}{2}+x^2y^2=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2y^2=1 \end{cases}$$

$$x^2=2-y^2$$

$$(2-y^2)y^2=1$$

$$-y^4+2y^2-1=0$$

$$-(y^4-2y^2+1)=0$$

$$(y^2-1)^2=0$$

$$y^2=1$$

$$\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-1 \end{array}\right.$$

$$x^2=2-y^2=2-1=1$$

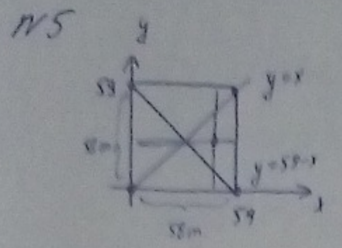
$$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Ответ. $(1;1)$ $(-1;1)$ $(1;-1)$; $(-1,-1)$

211007180 (U807520 M1275706)

Чистовик

№5



58-0-1=58

2·58-1=115 позиций для I точки

58·58-всего точек

58·58-(58+58) - позиций для II точки всего

58·58-2·58-115 - позиций для II точки, если она не лежит на пр. y=x или y=58-x

~~$\frac{115!}{2!(115-2)!} = \frac{114\cdot115}{2}$ - кол-во способов выбрать 2 точки, если обе лежат на пр. y=x или y=58-x~~

~~(58·58-2·58-115)·115 - кол-во способов выбрать 2т, если одна лежит на пр. y=x или y=58-x~~

~~$\frac{114\cdot115}{2}$ + (56·58-115)·115 = 115(57+56·58-115) = 115·(3248+57-115) = 115·3190 = 366850 - способов выбрать 2 точки, если хотя бы одна лежит на пр. y=x или y=58-x~~

~~Ответ 366850~~

$\frac{(114-3)114}{2}$ + 114 - кол-во способов, если обе точки на пр. y=x или y=58-x

если I точка не в середине; если I точка в середине

114(58·58-(2·58-1-2)) + 58·58-(2·58-1)-114 - кол-во способов, если I точка на прямой y=x или y=58-x, II точка точно не на прямой y=x или y=58-x

I точка не в середине, II точка не на прямой y=x, y=58-x

I точка в середине, II т. не на прямой и не в середине

$\frac{111\cdot114}{2}$+114+114(58·58-2·58+3)+58·58-2·58+1)-114 = ~~111·57+114·56·58+114·3+56·58+1~~ =

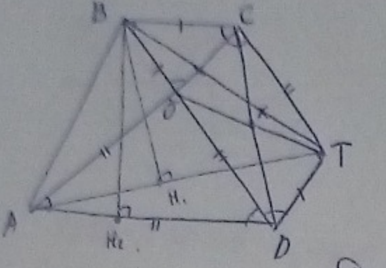
= ~~111·57+115·56·58+114·3+1 = 6327+373520+343 = 380190~~

= 6327+114·3136+3248 = 367079

Ответ 367079

Чистовик

№6



Дано: $ABCD$, $BD \cap AC = O$, $\triangle BOC$, $\triangle AOD$ – прав, K – сер CD, $OK = KT$.

Док-ть: а) $\triangle ABT$ – прав. б) $BC = 3$, $AD = 7$, $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?

Док-во

а) $\angle CBO = \angle ODA = 60° \Rightarrow BC \parallel AD \Rightarrow ABCD$ – трап

$BO = OC$, $AO = OD$, $\angle BOA = \angle COD$ (как вертик.) $\Rightarrow \triangle AOB = \triangle COD$ (по I приз $=\triangle$) $\Rightarrow AB = CD$

$CK = KD$, $OK = KT \Rightarrow OCTD$ – парал (по III приз пар) $\Rightarrow CT = OD$, $OC = TD$

$BC = OC = DT$, $CT \parallel OD$ (по св. пар) $\Rightarrow BCTD$ – равнобед. трапеция $\Rightarrow CD = BT$

$AB = CD = BT$

$AC \parallel DT$ (по св. пар), $CT = AD \Rightarrow ACTD$ – равнобед трап $\Rightarrow CD = AT \Rightarrow AB = CD = AT$

$AB = BT = AT \Rightarrow \triangle ABT$ – правильный. ч.т.д.

б) $BO = BC = 3$, $AO = AD = 7$

$\angle BOA = 180° - \angle BOC = 180° - 60° = 120°$

$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2\cos\angle AOB \cdot BO \cdot AO$ (по т. косинусов)

$AB^2 = 9 + 49 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3 \cdot 7 = 58 + 21 = 79 \Rightarrow AB = \sqrt{79}$

BH_1 – выс. $\triangle ABT$, BH_2 – выс. $ABCD$

$S_{ABT} = \frac{1}{2} BH_1 \cdot AT = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 - \left(\frac{1}{2}AT\right)^2} \cdot AT = \frac{1}{2}\sqrt{79 - \frac{1}{4}79} \cdot \sqrt{79} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{79} \cdot \sqrt{79} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 79$

$AH_2 = \frac{AD - BC}{2} = \frac{7 - 3}{2} = 2$

$BH_2 = \sqrt{AB^2 - AH_2^2} = \sqrt{79 - 4} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ (по т. Пифагора)

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BH_2 = \frac{1}{2} \cdot (3 + 7) \cdot 5\sqrt{3} = 5 \cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 79}{25\sqrt{3}} = \frac{79}{4 \cdot 25} = 0{,}79$

Ответ: 0,79