Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007122**

ID профиля: **856039**

Вариант 9

10 класс. Вариант 9. Чистовик.

Часть 1.

Лист 1

№2

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$

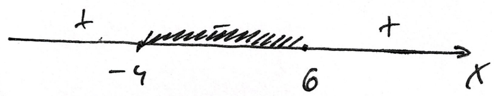
Ограничения:

$$\begin{cases} (1)\ x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4 \\ (2)\ 6-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 6 \\ (3)\ 24+2x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-4; 6].$$

(3) $24+2x-x^2 \geq 0 \quad | \cdot (-1)$

$x^2-2x-24 \leq 0$

$(x-6)(x+4) \leq 0$



$x \in [4; 6]$

Замена:

$a = \sqrt{x+4} - \sqrt{6-x}$, тогда $a^2 = \cancel{x}+4+6-\cancel{x}-2\sqrt{(x+4)(6-x)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sqrt{(x+4)(6-x)} = 10-a^2$

Получаем:

$a+4 = 10-a^2$

$a^2+a-6=0$

$D = 1+4\cdot 6 = 25 = 5^2$

$a_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2}$

$a_1 = \dfrac{4}{2} = 2$

$a_2 = -\dfrac{6}{2} = -3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-3 \end{array}\right.$

Обратная замена:

$$\left[\begin{array}{l} (1)\ \sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2 \\ (2)\ \sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = -3 \end{array}\right.$$

1) $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2 \quad |\uparrow^2$ Лист 2

$\cancel{x}+4+6-\cancel{x} - 2\sqrt{(x+4)(6-x)} = 4$

$6 = 2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

$3 = \sqrt{(x+4)(6-x)} \quad |\uparrow^2$

$9 = (x+4)(6-x)$

$-x^2+6x-4x+24 = 9$

$-x^2+2x+24 = 9$

$-x^2+2x+15 = 0 \quad |\cdot(-1)$

$x^2-2x-15=0$

$D_{/4} = 1+15 = 16 = 4^2$

$x_{1,2} = 1 \pm 4$

$\left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-3 \end{array}\right.$

2) $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = -3 \Rightarrow \sqrt{6-x} - 3 \geq 0$

$\cancel{x}+4+6-\cancel{x} - 2\sqrt{(x+4)(6-x)} = 9$

$1 = 2\sqrt{(x+4)(6-x)} \quad |\uparrow^2$

$1 = 4(x+4)(6-x)$

$1 = 4(-x^2+2x+24)$

$-4x^2+8x+96 = 1$

$4x^2-8x-95 = 0$

$D_{/4} = 16+4\cdot 95 = 16+380 = 396$

$x_{3,4} = \dfrac{4 \pm \sqrt{396}}{4}$

$\left[\begin{array}{l} x_3 = \dfrac{4+\sqrt{396}}{4} \\ x_4 = \dfrac{4-\sqrt{396}}{4} \end{array}\right.$

$5 < x_3 < 6 \Rightarrow \sqrt{6-x} - 3 \leq 0 \Rightarrow$ не подходит

$-4 < x_4 < -3\frac{3}{4} \Rightarrow \sqrt{6-x} - 3 \geq 0$

$20^2 < 396 < 19^2$

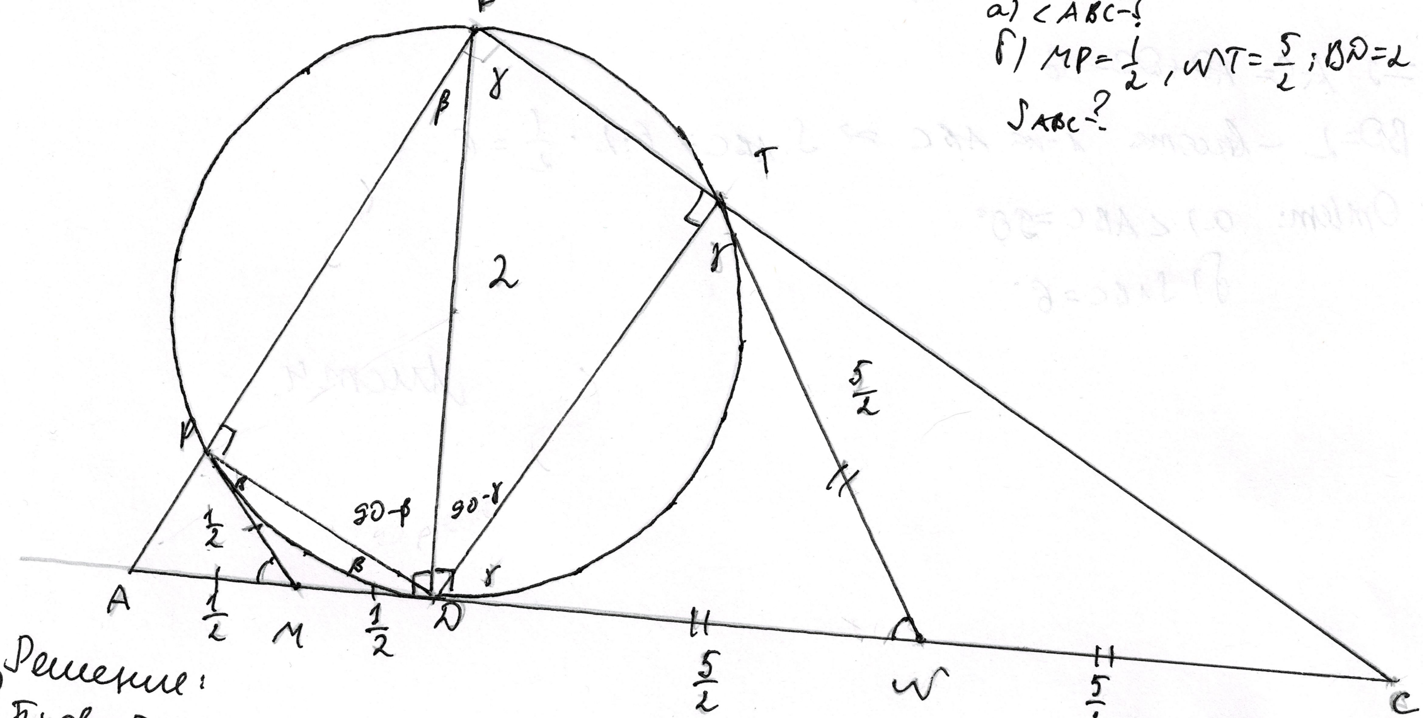
$$\begin{array}{r} 95 \\ \times\ 4 \\ \hline 380 \end{array} \qquad 396 \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 14 \\ \hline 56 \\ +14\ \ \\ \hline 196 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 \\ \times\ 16 \\ \hline 96 \\ +16\ \ \\ \hline 256 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 \\ \times\ 24 \\ \hline 96 \\ +48\ \ \\ \hline 576 \end{array}$$

Ответ: $x=-3$; $x=5$; $x=\dfrac{4-\sqrt{396}}{4}$

Чистовик. Лист 3

№1

Дано:
$PM \parallel TW$
$AM = MD$; $DW = WC$
а) $\angle ABC$ - ?
б) $MP = \frac{1}{2}$, $WT = \frac{5}{2}$; $BD = 2$
S_{ABC} - ?



а) Решение:
1) Проведём $PM \parallel TW$, поскольку прямые параллельны, то $\angle DWT = \angle AMP = \alpha$ (как соответственные углы при $PM \parallel TW$ и секущей AC)
2) Соединим PD и DT:
$\angle BPD = \angle BTD = 90°$ (углы, опирающиеся на диаметр BD).
3) . Рассмотрим $\triangle APD$:
$\angle APD = 90°$, PM - медиана $\Rightarrow PM = \frac{1}{2} AD = AM = MD$;
Рассмотрим $\triangle MPD$:
$MP = MD \Rightarrow \triangle$ равнобедренный $\Rightarrow \angle MPD = \angle MDP = \beta$, тогда
$\angle PDB = 90 - \beta \Rightarrow PBD = \beta \Rightarrow MP$ - касательная
. Рассмотрим $\triangle DTC$:
$\angle DTC = 90°$, $TW = DW = WC$ (медиана из вершины п/у) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle WTD = \angle WDT = \gamma$, тогда $\angle BDT = 90 - \gamma$, тогда $\angle DBT = \gamma \Rightarrow ABC = \gamma + \beta$
4) Поскольку $\triangle TWC$ - равнобедренный, то $\angle WTC = \angle WCT = \frac{180 - (180 - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$.
. Из $\triangle$-ка PMD:
$\angle MPD = \angle MDP = \frac{180 - (180 - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{2}$. Рассмотрим $\angle DTC = \gamma + \frac{\alpha}{2}$
$\angle DTC = 90°$, т.к. $\angle BTD = 90° \Rightarrow \gamma + \frac{\alpha}{2} = 90°$.
. из (3) $\angle ABC = \gamma + \beta = \gamma + \frac{\alpha}{2} = 90°$.

б) • $PM = AM = MD = \frac{1}{2}$ (медиана ∆-ка из вершины угла $90°$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AD = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

• $TW = DW = WC = \frac{5}{2}$ (медиана ∆-ка из угла $90°$) $\Rightarrow DC = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 5$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow AC = AD + DC = 6$

$BD = 2$ – высота ∆-ка ABC $\Rightarrow S_{ABC} = 6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 6.$

Ответ: а) $\angle ABC = 90°$

б) $S_{ABC} = 6$

Лист 4.

$26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$ — координаты т. А.

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$ — парабола В - вершина.

Особый случай:

при $a=0$

$1=0$ — неверно $\Rightarrow a\neq 0$.

$ay = ax^2-2a^2x+a^3+1$

$y = x^2-2ax+a^2+\frac{1}{a}$

$x_в = \frac{2a}{2} = a$

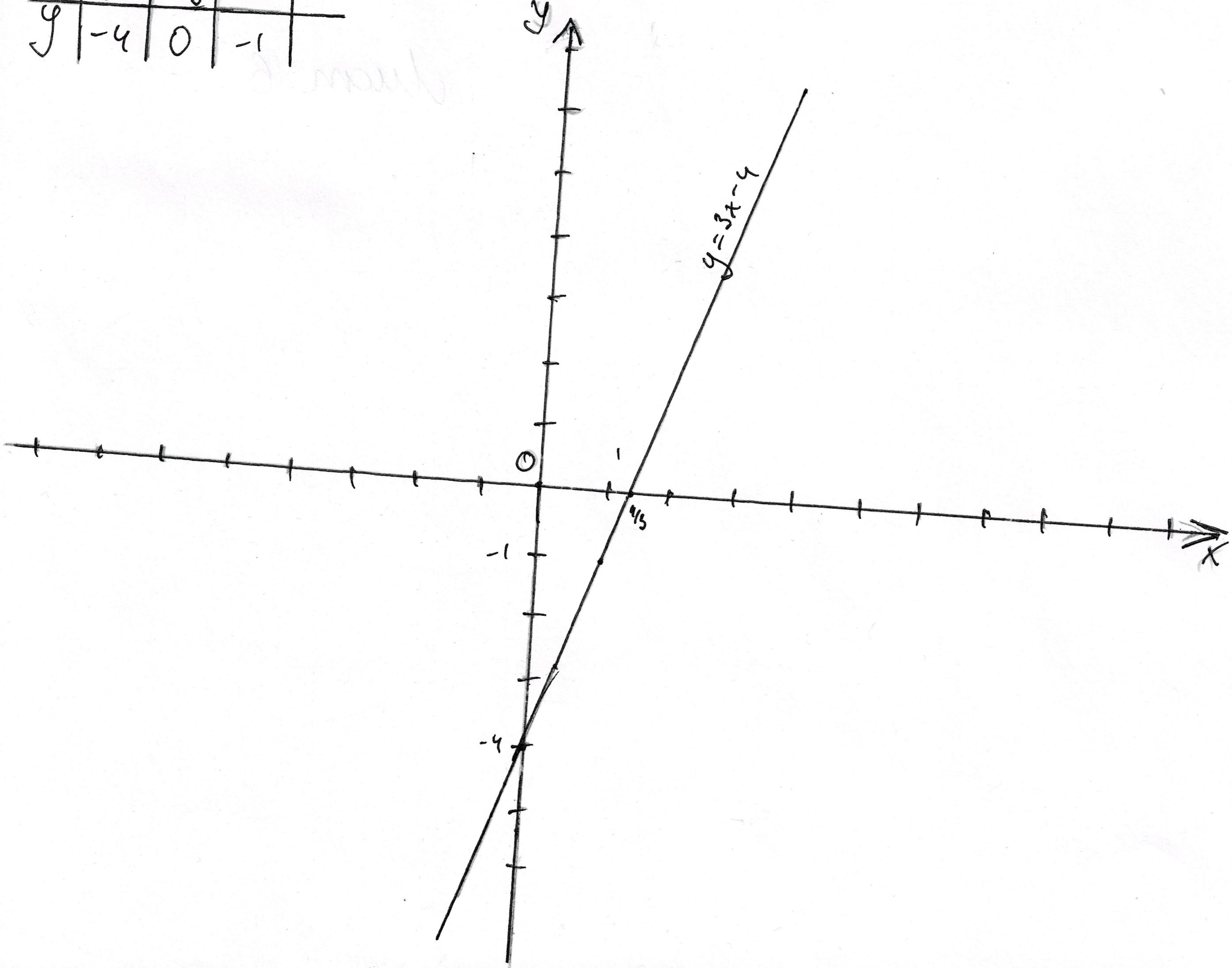
$y_в = a^2-2a^2+a^2+\frac{1}{a} = \frac{1}{a}$

$B=(a;\frac{1}{a})$

$3x-y=4$ — прямая

$y=3x-4$

x	0	$\frac{4}{3}$	1
y	-4	0	-1



Рассмотрим уравнение, задающее координаты т. A:

$26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$

$4y^2+y(8x-20a)+5x^2-22ax+26a^2=0$

$\frac{D}{4}=(4x-10a)^2-4(5x^2-22ax+26a^2)=16x^2-80ax+100a^2-20x^2+88ax-104a^2=$

$=-4x^2+8ax-4a^2=-4(x-a)^2$

$D/4$ должен быть $\geq 0 \Rightarrow x=a$.

при $x=a$:

$26a^2-22a^2-20ay+5a^2+8ay+4y^2=0$

$4y^2+y\cdot(-28a)+9a^2=0$

$4y^2-28ay+9a^2=0$

$\frac{D}{4}=14^2a^2-4\cdot 9\cdot a^2=196a^2-36a^2=160a^2=4\cdot 40a^2=\cancel{4\sqrt{\ }}$

$y_{1,2}=\frac{14a\pm\sqrt{160a^2}}{4}=\frac{14a\pm 4\sqrt{10}\,a}{4}$

Лист 6

Черновик 1

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = a$

$a^2 = \cancel{x}+4+6-\cancel{x} - 2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

$a^2 = 10 - 2\sqrt{(x+4)(6-x)} \Rightarrow 2\sqrt{(x+4)(6-x)} = 10-a^2$

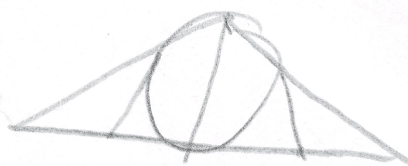
$a+4 = 10-a^2$

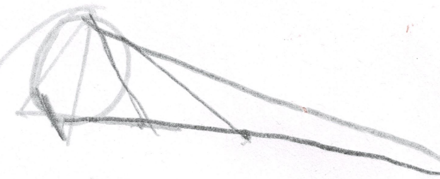
$$\begin{array}{r|l} 396 & 2 \\ 198 & 2 \\ 98 & 2 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

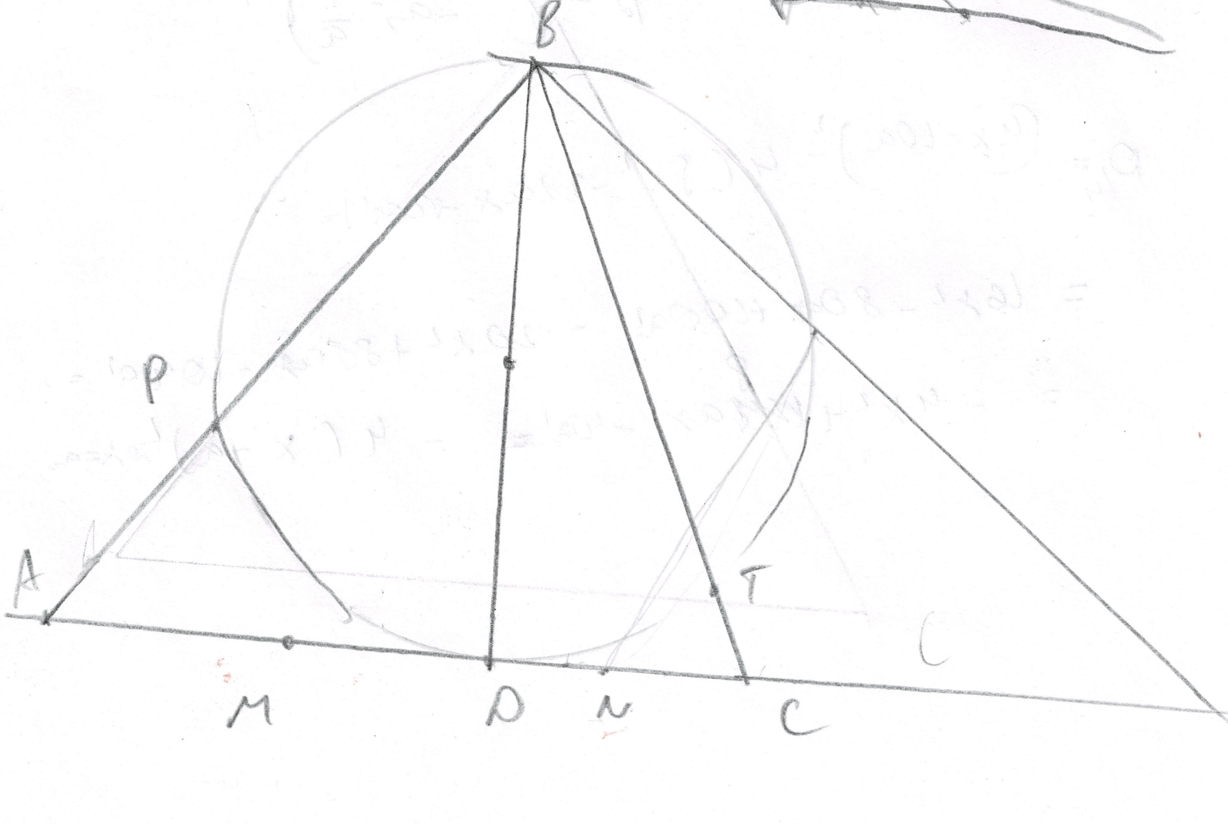
$$\begin{array}{r} 183 \\ \times\ 2 \\ \hline 386 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 198 \\ \times\ 2 \\ \hline 396 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ +14\ \ \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 19 \\ \hline 171 \\ 19\ \ \\ \hline 361 \end{array}$$

$\frac{4-19}{4} = -\frac{15}{4} = -3\frac{3}{4}$







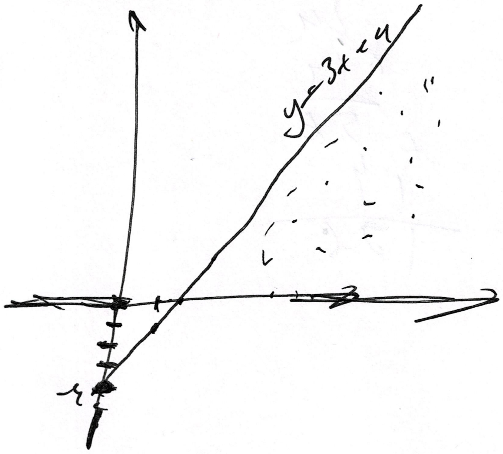
№3 Черновик 2.

$26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$ — т. A.

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$ — парабола B - вершина.

при a - ?

A и B лежат по разные стороны от $3x-y=4$, $A, B \notin 3x-y=4$.



$y=3x-4$

x	0	1	$\frac{4}{3}$
y	-4	-1	0

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$

при $a=0$ $1=0$.

$$y=\frac{ax^2+2a^2x+a^3+1}{a}$$

$$y=x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}$$

$$x_b=\frac{-2a}{2}=-a$$

$$y_b=a^2-2a^2+a^2+\frac{1}{a}$$

$$B=\left(-a;\ \frac{1}{a}\right)$$

$$D_{/4}=(4x-10a)^2-4(5x^2-22ax+26a^2)=$$

$$=16x^2-80ax+100a^2-20x^2+88ax-104a^2=$$

$$=-4x^2+8ax-4a^2=-4(x-a)^2 \Rightarrow x=a$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007122**

ID профиля: **856039**

Вариант 9

Вариант 9. часть 2. Чистовик. Лист 1

№1

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases}$$

Замена:

$x^2+y^2=a \Rightarrow a^2 = x^4+y^4+2x^2y^2 \Rightarrow x^4+y^4 = a^2-2b$

$x^2 \cdot y^2 = b$

Получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{a} + b = 2 \\ a^2-2b+3b=5 \Rightarrow a^2+b=5 \Rightarrow b=5-a^2 \end{cases}$$

$\dfrac{2}{a} + 5 - a^2 - 2 = 0$

$\dfrac{2+5a-a^3-2a}{a} = 0$

$\dfrac{-a^3+3a+2}{a} = 0$

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ -a^3+3a+2=0 \end{cases}$$

$a^3-3a-2=0$

Легко заметить, что $a=-1$ - корень, тогда $(a^3-3a-2):(a+1)$

$$\begin{array}{r|l} a^3-3a-2 & a+1 \\ \hline -\ a^3+a^2 & a^2-a-2 \\ \hline -a^2-3a-2 & \\ -\ -a^2-a & \\ \hline -2a-2 & \\ -\ -2a-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow a^3-3a-2 = (a+1)(a^2-a-2) = (a+1)^2(a-2)$

лист 2

$(a+1)^2(a-2)=0$

$$\left[\begin{array}{l} a=-1 \Rightarrow b=-(-1)^2+5=5-1=4 \\ a=2 \Rightarrow b=5-4=1 \end{array}\right.$$

Обратная замена:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2=-1 \\ x^2y^2=4 \end{cases} \text{ - невозможно} \Rightarrow \varnothing \\ \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2y^2=1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \Rightarrow y^2=2-x^2 \\ x^2y^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1)\ y^2=2-x^2 \\ 2)\ x^2y^2=1 \end{cases}$$

2) $x^2(2-x^2)=1$

$-x^4+2x^2=1$

Замена: $x^2=t$

$-t^2+2t=1$

$t^2-2t+1=0$

~~$D=4-4<0 \Rightarrow$ нет решений при $t\in\mathbb{R}$~~

~~Ответ: $\varnothing$~~

~~Ответ~~ $t^2-2t+1=0$

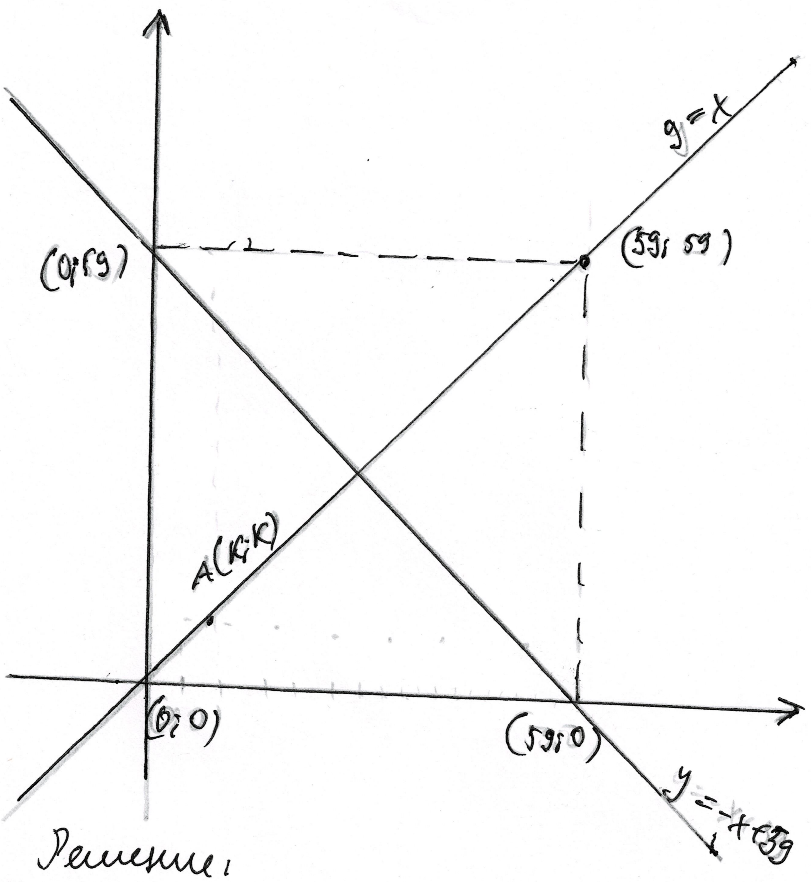
$(t-1)^2=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm1$

при $x=1$ $y^2=1 \Rightarrow y=\pm1$

при $x=-1$ $y^2=1 \Rightarrow y=\pm1$

Ответ: $(1;1)$; $(1;-1)$; $(-1;1)$; $(-1;-1)$

№5 Чистовик. Лист 3



Решение:

Всего узлов внутри заданного квадрата (не включая границы): $58 \cdot 58$ шт. Ни одна из точек A (на прямой $y=x$) и B не должна задоваться условии: AB: $AB \parallel OX$; $AB \parallel OY$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ если т. $A = (k; k)$, то т. $B \neq (n; k)$ и $B \neq (k; q)$, где $k, n, q \in \mathbb{N}$.

Кол-во способов выбрать т. A: $58+58$, т.к. $y=x$ и $y=59-x$ пересекаются в точке $\left(\frac{59}{2}; \frac{59}{2}\right) \notin \mathbb{N}$. Тогда для каждой т. A точку B можно выбрать $58^2 - 58 \cdot 2 + 1$, т.к. при вычитании $58 \cdot 2$ мы т. A считаем 2 раза. Всего т. A: 116; т. B: $58^2 - 115$ $\Rightarrow$

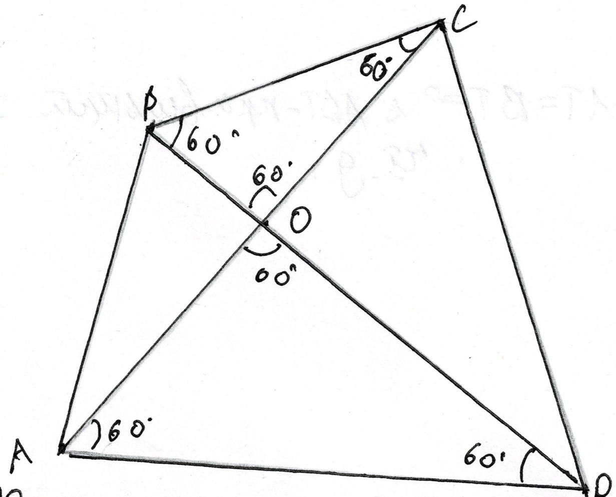
Всего вариантов для отрезка AB: $116 \cdot (58^2 - (115)$

Ответ: $116 \cdot (58^2 - 115) = 376884$

Чистовик. Лист 4

№6

Предположительный ABCD:

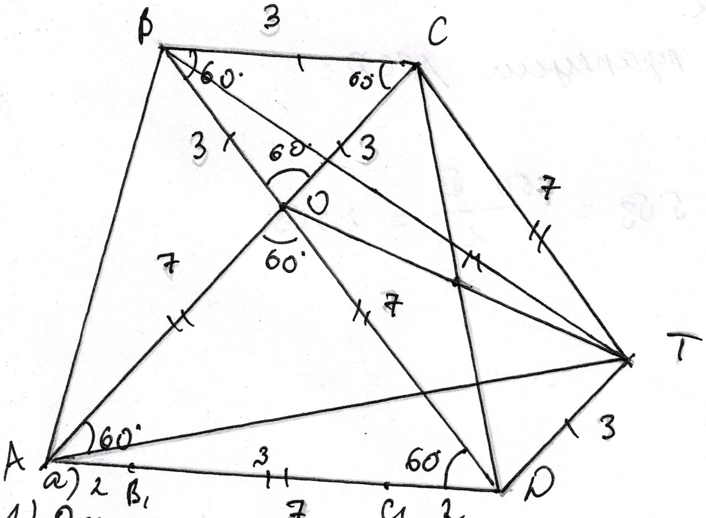


1) Отметим углы по 60° в вершинах правильных Δ-ков.

2) Заметим, что $\angle OAD=\angle BCO=60°$ и $\angle ODA=\angle OBC=60° \Rightarrow BC \parallel AD \Rightarrow ABCD$-трапеция.

3) Заметим, что $BO=OC$ и $AO=OD \Rightarrow ABCD$-равнобокая трапеция.

ABCD:



а) док-ать, что ΔABT- правильный

б) $BC=3$; $AD=7$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ - ?

а) 1) Отметим т. M: $CM=MD$

2) Симметрично т. O относительно т. M отметим т. T : $OM=MT$.

3) Рассмотрим OCTD: $OM=MT$; $CM=MD \Rightarrow OCTD$-параллелограм $\Rightarrow CT=OD$; $TD=CO$. и $\angle CTD=\angle COD=(180°-60°)=120°$, а $\angle OCT=\angle ODT=180°-120°=60°$

4) Обозначим $BC=BO=OC=a=TD$; $AO=OD=AD=CT=b$; проведём BT и AT.

5) По теореме косинусов выразим BT, AT, AB:

$$\begin{cases} \bullet \text{ из } \triangle\text{-ка } BCT: \\ BT^2 = a^2+b^2-2ab\cdot\cos 120^\circ \\ \bullet \text{ из } \triangle\text{-ка } ADT: \\ AT^2 = a^2+b^2-2ab\cdot\cos 120^\circ \\ \bullet \text{ из } \triangle\text{-ка } BOA: \\ AB^2 = a^2+b^2-2ab\cdot\cos 120^\circ \end{cases} \Rightarrow AB = AT = BT \Rightarrow \triangle ABT\text{-правильный}$$

ч.т.д.

б) $S_{ABCD} = \dfrac{BC+AD}{2}\cdot h$

$S_{\triangle ABT} = BT\cdot AT\cdot \sin 60^\circ = AB^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1) ~~[illegible]~~ найдём $AB = CD$ по т. косинусов:

$AB^2 = 9+49-2\cdot3\cdot7\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 58+21 = 79 \Rightarrow AB = \sqrt{79} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\triangle ABT} = \dfrac{79\sqrt{3}}{2}$

2) Опустим $BB_1 \perp AD$ и $CC_1 \perp AD$, тогда:

$BC = B_1C_1 = 3$, а $AB_1 = C_1D = \dfrac{7-3}{2} = 2$

по т. Пифагора найдём высоту h трапеции $ABCD$:

$h^2 = AB^2 - AB_1^2 = 79-4 = 75$.

$h = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{3+7}{2}\cdot 5\sqrt{3} = \dfrac{50\cdot\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$

3) Рассмотрим

$\dfrac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \dfrac{79\sqrt{3}}{2} : \dfrac{1}{25\sqrt{3}} = \dfrac{79}{50}$

Ответ: а) ч.т.д.

б) $\dfrac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \dfrac{79}{50}$

Лист 5

Вариант 9. часть 2. ~~[illegible]~~. Черновик 1

№4

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = x^2+y^2 \\ b = x^2y^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2}{a} + b = 2 \Rightarrow b = 2-\dfrac{2}{a} \\ a^2 - 2b + 3b = 5 \end{cases}$$

$a^2 + 2 - \frac{2}{a} - 5 = 0$

$a^2 - \frac{2}{a} - 3 = 0$

$\frac{a^3-3a-2}{a} = 0$

$1 - 3 - 2 \neq 0$

$-1 + 3 - 2 = 0.$

$a^2 - a - 2 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$a_{1,2} = \frac{1\pm3}{2} = 2; -1$

Замена:

$x+y=a$

$xy=b$, тогда

$a^4 = (x+y)^4 = (x^2+2xy+y^2)(x^2+2xy+y^2) = x^4 + 2x^3y + x^2y^2 + 2x^3y + 4x^2y^2 + 2xy^3 + x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 = x^4+y^4+6x^2y^2+4xy(x^2+y^2) =$

$= x^4+y^4+6x^2y^2+4xy((x+y)^2-2xy) = a^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^4+y^4 = a^4 - 6x^2y^2 - 4xy((x+y)^2-2xy) = a^4 - 6b^2 - 4b(a^2-2b)$

Получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{a^2-2b} + b^2 = 2 & (1) \\ a^4 - 6b^2 - 4b(a^2-2b) = 5 - 3b^2 & (2) \end{cases}$$

(1) $\frac{2}{a^2-2b} + b^2 = 2$

$\frac{2}{a^2-2b} + b^2 - 2 = 0$

$\frac{2 + b^2(a^2-2b) - 2(a^2-2b)}{a^2-2b} = 0$

$\frac{a^2b^2 - 2b^3 - 2a^2 + 4b + 2}{a^2-2b} = 0$

~~$a = -1$~~; $a = 2$

$b = 2 - \frac{2}{2} = 1.$

$$\begin{cases} x^2y^2 = 1 \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases}$$

$x^2 = 2 - y^2$

$2y^2 - y^4 - 1 = 0$

$a^2 - a - 2 = 0$

$D = 1 + 8 = 3^2$

$a_{1,2} = \frac{1\pm3}{2}$

$a_1 = \frac{4}{2} = 2$

$a_2 = -1{,}25$

58×58: 464, 290, 3364; $3364 - 115 = 3249$

3249×116: 19494, 3249, 3249, 376884

Черновик: 2

$(x+y)=a \qquad xy=b$

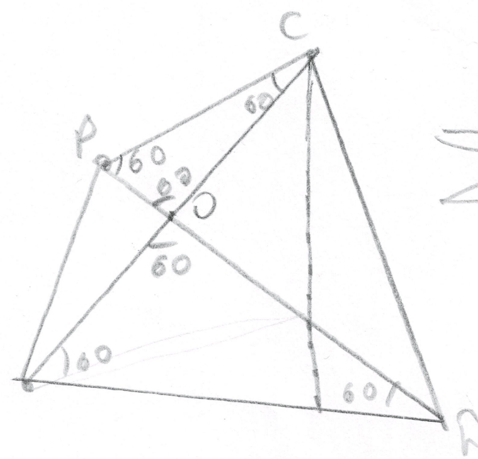
$(x+y)^4=(x+y)^2\cdot(x+y)^2=(x^2+2xy+y^2)(x^2+2xy+y^2)=$

$=x^4+2x^3y+x^2y^2+4x^2y^2+2x^3y+2xy^3+x^2y^2+$
$+2xy^3+y^4=x^4+y^4+6x^2y^2+2xy(x^2+x^2+y^2+y^2)=$
$=4xy(x^2+y^2)$

$x^2+y^2=a$
$xy=b$

$a^2=x^4+y^4+2x^2y^2$
$x^4+y^4=a^2-2b$

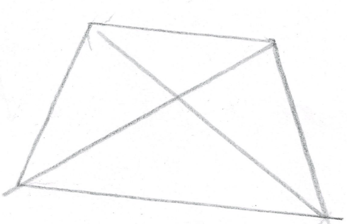
$a^2-2b+3b=5$
$\frac{2}{a}+b=2$

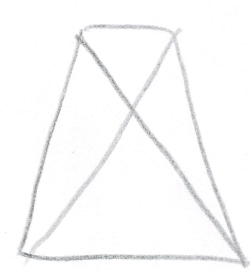


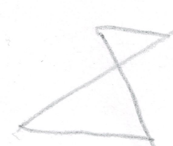
$t+p=2$

$t\cdot p=1$

$t=2-p$



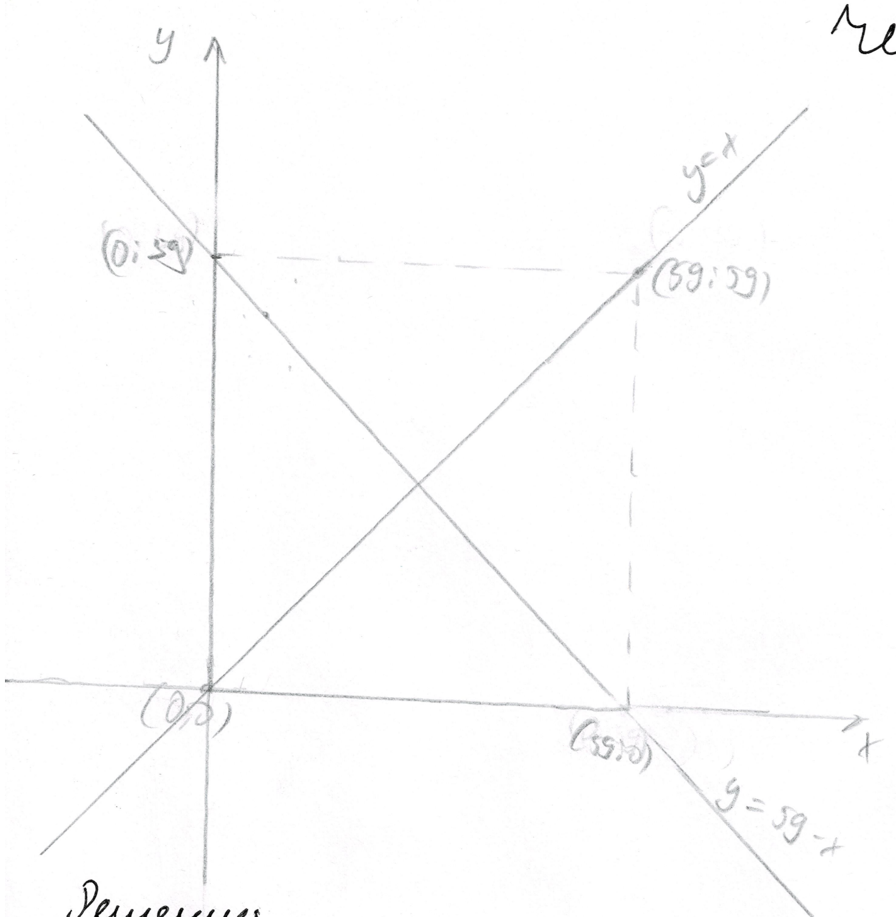




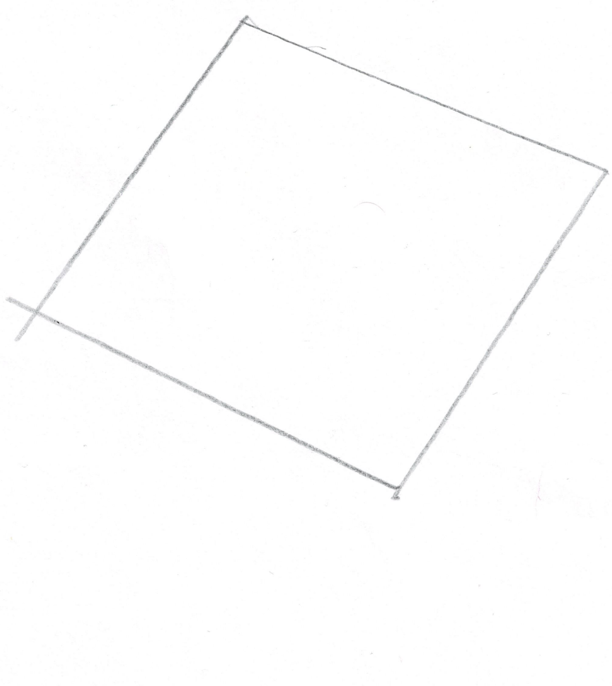
$p-p^2-1=0$
$p^2-p+1=0 \quad D<0.$

№5

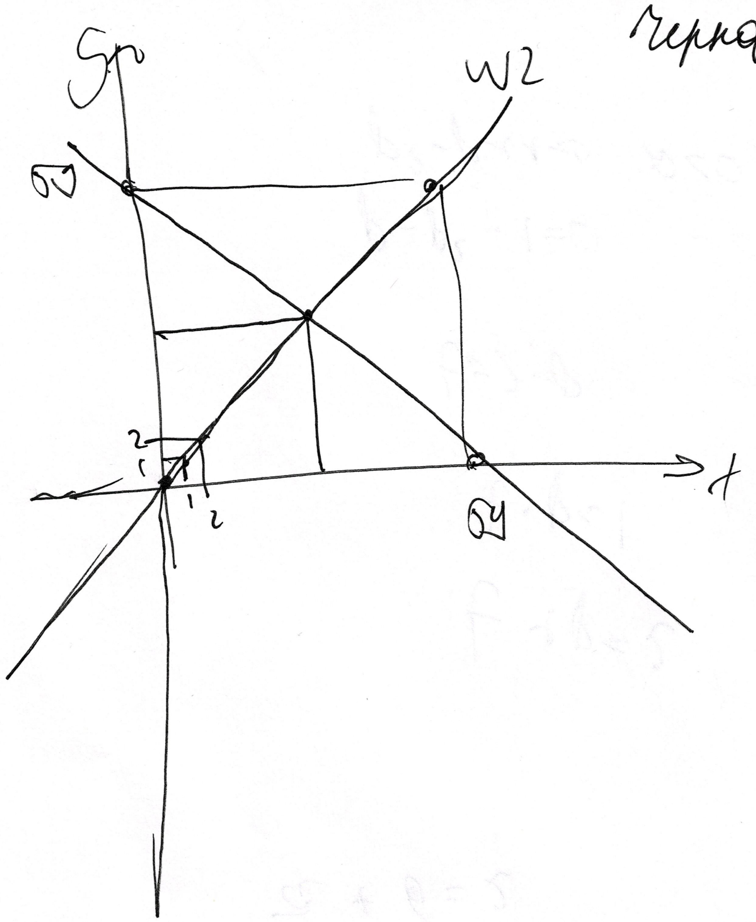
черновик. 3



Решение:
по условию одна из точек (пусть т. А) лежит на $y=x$;
вторая (пусть т. B) лежит на прямой $y=59-x$. также AB: $AB \parallel OX$, $AB \parallel OY$
$\Rightarrow$ при выборе т. А на прямой $y=x$ точку B можно задать двумя способами.



Чертеж 4



Чертеж 4