Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006991**

ID профиля: **819735**

Вариант 9

Чистовик
10 класс
Вариант 9
часть 1

Дано: $PM \parallel TN$; BD-диаметр.

а) т.к. BD-диаметр $\Rightarrow \angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$

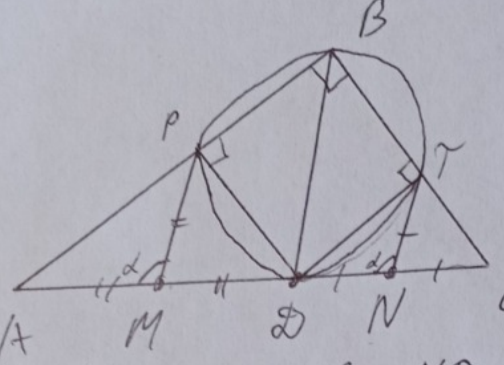
т.к. $\triangle APM$ и $\triangle DTC$-прямоуг., и PM и TN-мед., то $PM = AM$ и $TN = DN$

т.к. $PM \parallel TN$, то $\angle PMA = \angle TND = \alpha$

$\angle PAM = 90 - \alpha/2$ ($\triangle APM$-равнобед.)

$\angle NCT = \alpha/2$ ($\triangle TNC$-равнобед.)

$\angle ABC = 180 - \angle BAC - \angle BCA = 90^\circ$



б) Дано: $PM = \frac{1}{2}$; $NT = \frac{5}{2}$; $BD = 2$

т.к. $\angle DPB = \angle PBT = \angle BTD = 90^\circ \Rightarrow PBTD$-прямоуг. ($PB = DT$, $BT = PD$)

Пусть $PB = x$, тогда $DT = x$.

($\angle PDM = \alpha/2$ (MDP-равнобед.) $\Rightarrow \angle TCD = \frac{\alpha}{2}$) $\Rightarrow \triangle APD \sim \triangle DTC$

$AD = 2PM = 1$; $DC = 2TN = 5$

$$\frac{AP}{TD} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{AP}{x} = \frac{1}{5} \Rightarrow AP = \frac{x}{5}$$

$$PD = \sqrt{AD^2 - AP^2} = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{5}$$ ($\triangle APD$-прямоуг.)

$BD^2 = PB^2 + PD^2$ ($\triangle PBD$-прямоуг.)

$$4 = x^2 + \frac{25 - x^2}{25} \Rightarrow 25x^2 + 25 - x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = \frac{25}{8} \Rightarrow x = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$PD = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{5} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} = \sqrt{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{7}{2}}; \quad AP = \frac{x}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S_{APD} = \frac{AP \cdot PD}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{7}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}\sqrt{7}$$

$$\frac{S_{DTC}}{S_{APD}} = \left(\frac{DC}{AD}\right)^2 = 25 \Rightarrow S_{DTC} = 25 S_{APD} = \frac{25}{16}\sqrt{7}$$

$$S_{PDTB} = PB \cdot PD = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{5}{8}\sqrt{7}$$

$$S = S_{APD} + S_{DTC} + S_{PBTD} = \sqrt{7}\left(\frac{1}{16} + \frac{25}{16} + \frac{5}{8}\right) = \frac{36\sqrt{7}}{16} = \frac{9}{4}\sqrt{7}$$

Ответ: а) $\angle ABC = 90^\circ$; б) $S = \frac{9}{4}\sqrt{7}$

Чистовик

10 класс
Вариант 9
часть 1

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$

$\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}\right)^2=\left(2\sqrt{(x+4)(6-x)}-4\right)^2$

$(x+4)+(6-x)-2\sqrt{(x+4)(6-x)}=4(x+4)(6-x)-16\sqrt{(x+4)(6-x)}+16$

Пусть $t=\sqrt{(x+4)(6-x)}$, $t\geqslant 0$

$t=\sqrt{24+2x-x^2}$

$10-2t=4t^2-16t+16$

$4t^2-14t+6=0$

$2t^2-7t+3=0$

$D=49-4\cdot 2\cdot 3=25$

$\left[\begin{array}{l} t=\frac{7+5}{4}=3 \quad (1) \\ t=\frac{7-5}{4}=\frac{1}{2} \quad (2) \end{array}\right.$

1) $3=\sqrt{24+2x-x^2}$

$9=24+2x-x^2$

$x^2-2x-15=0$

$D=4+4\cdot 15=64$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{2+8}{2}=5 \to \text{подст. } \underbrace{\sqrt{4+5}}_{3}-\underbrace{\sqrt{6-5}}_{1}+4=2\underbrace{\sqrt{(4+5)(6-5)}}_{}\text{, подх.} \\ x=\frac{2-8}{2}=-3 \to \underbrace{\sqrt{4-3}}_{1}-\underbrace{\sqrt{6+3}}_{3}+4=2\underbrace{\sqrt{(4-3)(6+3)}}_{3}\text{, } 2\neq 6 \Rightarrow \text{не подх.} \end{array}\right.$

2) $\frac{1}{2}=\sqrt{24+2x-x^2}$

$1=96+8x-4x^2$

$4x^2-8x-95=0$

$D=64+4\cdot 4\cdot 95=16(4+95)=16\cdot 99=16\cdot 9\cdot 11$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{8+4\cdot 3\sqrt{11}}{8}=1+\frac{3}{2}\sqrt{11} \to \text{для подст.: } \sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=-3 \\ \quad \sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}>0 \Rightarrow \text{не подх.} \\ x=\frac{8-4\cdot 3\sqrt{11}}{8}=1-\frac{3}{2}\sqrt{11} \Rightarrow \sqrt{5-\frac{3}{2}\sqrt{11}}-\sqrt{5+\frac{3}{2}\sqrt{11}}=-3 \Rightarrow \text{подх.} \end{array}\right.$

Ответ: $x=5$ или $x=1+\frac{3}{2}\sqrt{11}$

2

черновик

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$ $\quad 6-x\geq 0$ $\quad x\leq 6$ $\quad x+4\geq 0$ $\quad x\geq -4$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{(x+4)(6-x)}$ $\quad 4+4\cdot 24=100$ $\quad x\in[-4;6]$

$-3\to 1\ -3$ $\quad x=\frac{-2\pm 10}{-2}$ $\quad \frac{8}{-2}=-4$ $\quad \frac{-12}{-2}=6$

$a-b+4=2ab\to$ $\quad a-b+4\geq 0$

$(a-b)^2+16+8(a-b)=4a^2b^2$

$a^2-2ab+b^2+8a-8b+16=4a^2b^2$

$(x+4)+(6-x)-2\sqrt{(x+4)(6-x)}=4(x+4)(6-x)-16\sqrt{(x+4)(6-x)}+16$ $\quad -14$

$4(x+4)(6-x)-14\sqrt{(x+4)(6-x)}+16=10$ $\quad \sqrt{(x+4)+(6-x)}=\cancel{6}$

$4t^2-14t+6=0$

$2t^2-7t+3=0$

$D=49-4\cdot 2\cdot 3=25$

$\left[\begin{array}{l} t=\frac{7+5}{4}=3 \\ t=\frac{7-5}{4}=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

9

$25-\frac{9}{4}\cdot 11=\frac{100-99}{4}=\frac{1}{4}$

$-1\to 10$

черновик

$2x^2-50x^2+2x\sqrt{x^2-3}+10\sqrt{(79-25x^2)(4-x^2)}=36+3-79-100$

$\downarrow$ 39

$-24x^2+x\sqrt{x^2-3}+5\sqrt{(79-25x^2)(4-x^2)}=-140$

$\downarrow$ -140

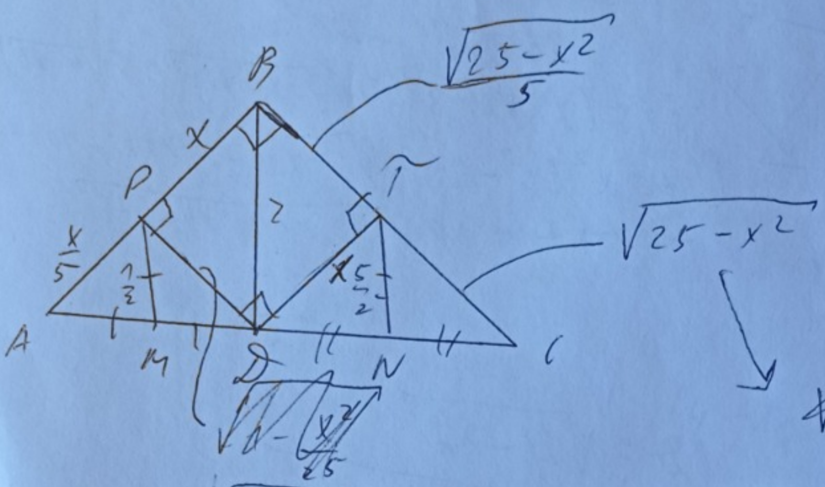
$x^2+\frac{25-x^2}{25}=4$

$25x^2+25-x^2=100$

$24x^2=75$

$8x^2=25 \to x^2=\frac{25}{8}$

$x=\frac{5}{2\sqrt{2}}$



$\cancel{\sqrt{7}}\, 5\sqrt{\frac{7}{8}}$

$\frac{\sqrt{25-x^2}}{5}=\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}=\sqrt{\frac{7}{8}}$

$\cancel{S_{CTD}=5\sqrt{\frac{7}{8}}}$

$S_{CTD}=\frac{5}{2}\cdot\sqrt{\frac{7}{2}}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=$

$=\frac{25}{16}\sqrt{7}$

$S_{APD}=\frac{1}{16}\sqrt{7}$

$S_{PBTD}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{7}{2}}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=$

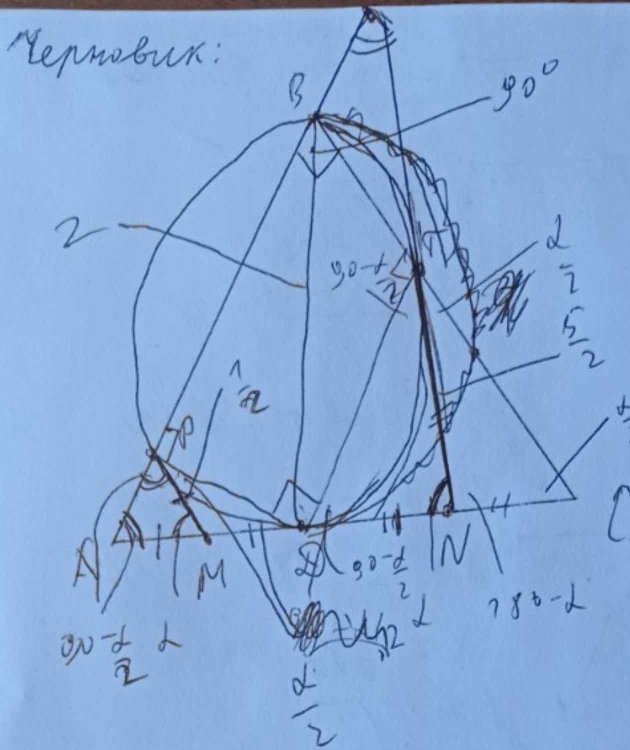
$=\frac{5}{8}\sqrt{7}$

$S_0=\sqrt{7}\left(\frac{1}{16}+\frac{25}{16}+\frac{10}{16}\right)=$

$=\frac{\sqrt{7}\,36}{16}=\frac{18\sqrt{7}}{8}=\frac{9\sqrt{7}}{4}$

REDMI NOTE 9
AI QUAD CAMERA

Черновик:



$\sqrt{4-y^2} = \sqrt{4-(79-25x^2)} =$

$= \sqrt{25x^2-75} =$

$= 5\sqrt{x^2-3}$

$36 = AB^2 + BC^2 =$

$36 = (x+\sqrt{x^2-3})^2 + (\sqrt{79-25x^2} + 5\sqrt{4-x^2})^2$

$36 = x^2 + x^2 - 3 + 2x\sqrt{x^2-3} + 79 - 25x^2 + 100 -$

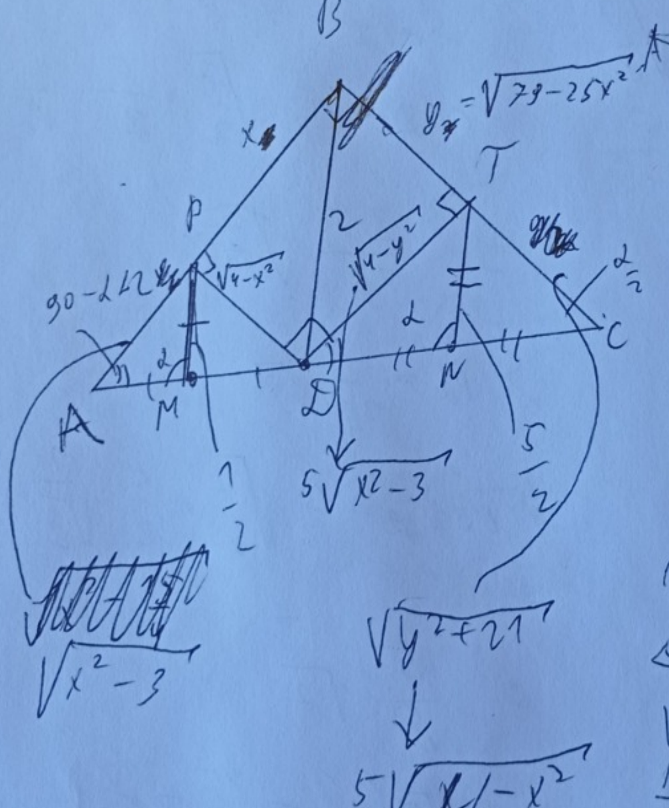
$- 25x^2 + 10\sqrt{(79-25x^2)(4-x^2)}$

$AC = 6$

$PD = \sqrt{21 - x^2}$

~~$AP = \sqrt{\frac{1}{4} - (\sqrt{4-x^2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - 4 + x^2} = \sqrt{x^2 - \frac{15}{4}}$~~

~~$DT = \sqrt{4-y^2}$~~



$AD = 1$; $DC = 5$

$AP = \sqrt{1-(\sqrt{4-x^2})^2} = \sqrt{x^2-3}$

$TC = \sqrt{25-(\sqrt{4-y^2})^2} = \sqrt{y^2+21}$

$\triangle APD \sim \triangle DTC.$

$\Downarrow$

$\frac{AP}{DT} = \frac{AD}{DC} \to \frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{4-y^2}} = \frac{1}{5}$

$\Downarrow$

$25x^2 - 75 = 4 - y^2$

$y = \sqrt{79-25x^2}$

Черновик:

$$\begin{cases} L_1+L_2=26 \to L_2=26-L_1 \\ r_1+L_3=5 \to L_3=5-r_1 \\ r_2+r_3=4 \to r_3=4-r_2 \\ L_1\cdot r_1=11 \\ L_2 r_2=10 \\ L_3 r_3=4 \end{cases}$$

$L_1 a^2 \quad -2\cdot 11 a\cdot x+ \quad r_1 x^2$

$L_2 a^2 \quad -2\cdot 10 a\cdot y+ \quad r_2 y^2$

$L_3 x^2 \quad +2\cdot 4 xy + \quad r_3 y^2$

$$\begin{cases} L_1 r_1=11 \\ (26-L_1)\cdot r_2=10 \\ (4-r_2)(5-r_1)=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1 r_1=11 \\ 26r_2-L_1 r_2=10 \\ 20-4r_1-5r_2+r_1 r_2=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1 r_1=11 \\ L_1 r_2=26r_2-10 \\ r_1 r_2=4r_1+5r_2-16 \end{cases}$$

$\frac{r_1}{r_2}=\frac{11}{26r_2-10}$

$26r_1 r_2-10r_1=11r_2$

$$\begin{cases} L_1 r_1=11 \\ 26r_1 r_2=10r_1+11r_2 \\ r_1 r_2=4r_1+5r_2-16 \end{cases}$$

$26(4r_1+5r_2-16)=10r_1+11r_2$

$104r_1+130r_2-16\cdot 26=10r_1+11r_2$

$119r_2=16\cdot 26-94r_1$

$119:7=17\cdot 7$

$r_2=\frac{16\cdot 26-94r_1}{17\cdot 7}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006991**

ID профиля: **819735**

Вариант 9

Чистовик

10 класс
Вариант 9
Часть 2

№1)

$$\begin{cases}\frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2\\ x^4+y^4+3x^2y^2=5\end{cases}$$

пусть $a=x^2$; $b=y^2$, тогда:
$a\geq 0$; $b\geq 0$

$$\begin{cases}\frac{2}{a+b}+ab=2\\ a^2+b^2+3ab=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2}{a+b}+ab=2\\ (a+b)^2+ab=5\end{cases} \quad (3)$$

пусть $t=a+b$, $t\geq 0$, $p=ab$, $p\geq 0$

решим систему (a и b - неизвестные):

$$\begin{cases}t=a+b \Rightarrow b=t-a\\ p=ab\end{cases} \rightarrow p=a(t-a) \Leftrightarrow a^2-at+p=0 \quad (1)$$

(1):

$a^2-at+p=0$

$D=t^2-4p$, т.к. $D\geq 0$, то $t^2-4p\geq 0 \Rightarrow t^2\geq 4p$ (2)

$$\begin{cases}a=\frac{t+\sqrt{t^2-4p}}{2}\\ b=\frac{t-\sqrt{t^2-4p}}{2}\end{cases} \text{ или } \begin{cases}a=\frac{t-\sqrt{t^2-4p}}{2}\\ b=\frac{t+\sqrt{t^2-4p}}{2}\end{cases}$$

(3):

$$\begin{cases}\frac{2}{t}+p=2\\ t^2+p=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2}{t}=2-p\\ t^2=5-p\end{cases}$$ ⑥

$t^2=5-p$, подставим в (2) $\Rightarrow 5-p\geq 4p \Rightarrow p\leq 1 \Rightarrow p\in[0;1]$ (4)

$$\begin{cases}4t^2=((5-p)(2-p))^2\\ t^2=5-p\end{cases} \Rightarrow 4(5-p)=(5-p)^2(2-p)^2$$

$(5-p)((2-p)^2(5-p)-4)=0$, рассмотрим уравнение $(2-p)^2(5-p)-4=0$, $p=5$ не подходит из усл. (4)

$(4-4p+p^2)(5-p)+4=0$

$20-4p-20p+4p^2+5p^2-p^3-4=0$

$p^3-9p^2+24p-16=0$, заметим, что $p=1$ является корнем

	1	-9	24	-16
1	1	-8	16	0

$\Rightarrow (p-1)(p^2-8p+16)=0$

$(p-1)(p-4)^2=0$, $p=4$ не подх. из усл. (4), $p=1$ подходит.

$$\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{5-p}=2\\ t=-\sqrt{5-p}=-2 \text{ - не подх. } (t\geq 0)\end{array}\right.$$

Чистов...

Чистовик

10 класс
10 класс
вариант 9
2 часть

№2) т.к. 59 - нечётно, то в пределах квадрата прямые $y = x^{(1)}$ и $y = 59 - x^{(2)}$ не имеют общего узла.

всего узлов на прямых $y = x$ и $y = 59 - x \to 58 \cdot 2$

всего узлов в квадрате $58 \cdot 58$, пара из двух узлов считается не упорядоченной

1) пусть только один узел находится на одной из прямых (1 или 2), тогда вариантов расположения второго узла:

$\underbrace{58 \cdot 58}_{\text{всего узлов в квадр.}} - \underbrace{2 \cdot 58}_{\text{не лежит на (1) или (2)}} - 2 \cdot 56$ — узел 2 не лежит на той же вертикали или горизонтали, что и узел 1.

$\| \; 54 \cdot 58 + 4$

а для первого вариантов расположения — $2 \cdot 58$ кол-во узлов на прямых (1) или (2)

значит кол-во вариантов:

$K_1 = 2 \cdot 58 \cdot (54 \cdot 58 + 4)$

2) пусть оба узла лежат на прямых (1) или (2), тогда общее кол-во вариантов:

$K_2 = \dfrac{2 \cdot 58 \cdot (2 \cdot 58 - 1)}{2} - \dfrac{4 \cdot 58}{2}$

кол-во мест для первого узла

кол-во мест для второго узла

пары не упорядочены

второй узел не лежит на той же вертикали или горизонтали, что и первый

$K_2 = 58(2 \cdot 58 - 3)$

Общее число вариантов $K_0 = K_1 + K_2 = 2 \cdot 58(58 \cdot 54 + 4) + 58 \cdot (2 \cdot 58 - 3) = 58 \cdot (110 \cdot 58 + 5) = 58 \cdot (6380 + 5) = 58 \cdot 6385 = 370330$

Ответ: 370330

REDMI NOTE 9
AI QUAD CAMERA

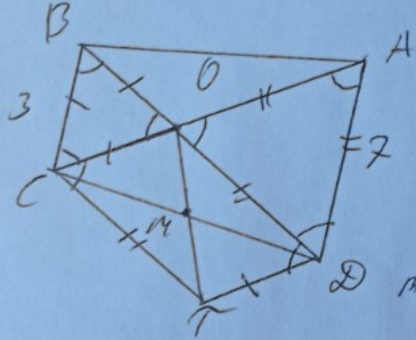
Чистовик

№3

10 класс

Вариант 9

2 часть



а) т.к. $CM = MD$ и $OM = MT$ (по усл.), то $CODT$ – парал.

$\Downarrow$

$CT \parallel BD \Rightarrow \angle OCT = \angle BOC = 60^\circ$

$CT = OD$ и $TD = CO$

т.к. $\angle BOA = \angle BCT = \angle ADT = 120^\circ$ и $BC = BO = TD$ и $CT = AD = OA$, то $\triangle BOA = \triangle ADT = \triangle BCT \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = AT = BT \Rightarrow \triangle ABT$ прав. ч.т.д.

б)

$AB = \sqrt{BO^2 + OA^2 - 2AO \cdot OB \cdot \cos 120} = \sqrt{9 + 49 + 21} = \sqrt{79}$

$S_{\triangle ABT} = \dfrac{AB^2 \cdot \sin 60}{2} = \dfrac{79 \cdot \sqrt{3}}{4}$

$S_{ABCD} = S_{BOC} + S_{AOD} + 2S_{BOA} = \dfrac{3 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} + \dfrac{7 \cdot 7 \cdot \sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \dfrac{3 \cdot 7 \cdot \sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(79 + 21) =$

$= \dfrac{100\sqrt{3}}{4}$

$\cancel{\dfrac{S_{ABCD}}{S_{\triangle ABT}}} = \dfrac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \dfrac{79}{100}$

Ответ: б) $\dfrac{79}{100}$

Черновик

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

$a = x^2 \to a \geq 0$
$b = y^2 \quad b \geq 0$

$$\begin{cases} \frac{2}{a+b} + ab = 2 \\ a^2 + 3ab + b^2 = 5 \end{cases}$$

$\to (a+b)^2 + ab = 5$

$$\begin{cases} \frac{2}{a+b} + ab = 2 \\ (a+b)^2 + ab = 5 \end{cases} ; \quad t = a+b \to t \geq 0; \quad p = ab \to p \geq 0$$

$$\begin{cases} \frac{2}{t} + p = 2 \\ t^2 + p = 5 \end{cases} \to \begin{cases} \frac{2}{t} = 2 - p \\ t^2 = 5 - p \end{cases} \to \begin{cases} 2t = (2-p)(5-p) \\ t^2 = 5 - p \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5-p)(p-1)(p-4)^2 = 0 \\ t^2 = 5 - p \end{cases}$$

1) $p = 5$; $t = 0$ - не подх.

$a =$

2) $p = 4$; $t = 1$ - не подх.

3) $p = 1$; $t = 2$

$a = 1$; $b = 1$

$\to x = \pm 1$; $y = \pm 1$

$$\begin{cases} t = a + b \Rightarrow b = t - a \\ p = ab \end{cases}$$

$p = a(t-a)$

$a^2 - at + p = 0$

$D = t^2 - 4p$

$\boxed{a = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4p}}{2}}$ $b = t - a$

$0 \leq p \leq 5$

$t^2 \geq 4p$

$5 - p \geq 4p$

$\boxed{0 \leq p \leq 1}$

$2\sqrt{5-p} = (2-p)(5-p)$

$4(5-p) = (2-p)^2(5-p)^2$

$(5-p)(\underbrace{(2-p)^2(5-p) - 4}_{}) = 0$

$(4 - 4p + p^2)(5-p) - 4 = 0$

$20 - 4p - 20p + 4p^2 + 5p^2 - p^3 - 4 = 0$

$p^3 - 9p^2 + 24p - 16 = 0$

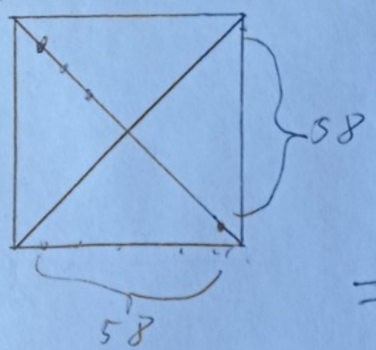
$p = 1$ - подх.

	1	-9	24	-16
a=1	1	-8	+16	0

$(p-1)(p^2 - 8p + 16) = 0$

$(p-1)(p-4)^2 = 0$

Черновик



$\cancel{58\cdot58-2\cdot58}+1=56\cdot58+1$

$(2\cdot58-1)\cdot(56\cdot58+1)+\frac{(2\cdot58-1)(2\cdot58-2)}{2}=$

$=(2\cdot58-1)\cdot(56\cdot58+\cancel{1}+58-\cancel{1})=$

$=57\cdot58(2\cdot58-1)=57\cdot58\cdot115=$

$115=3^2\cdot19\cdot2^4\cdot5\cdot23$

$\cancel{2\cdot58\cdot58\cdot58}$

$57=3\cdot19$

$58=2\cdot24=2\cdot2\cdot12=2^3\cdot6=2^4\cdot3$

$115=5\cdot23$

$58\cdot58-2\cdot58-2\cdot56$

$4-2\cdot2$

$58\times57=406+290=3306$

$3306\times115=16530+3306+3306=380190$

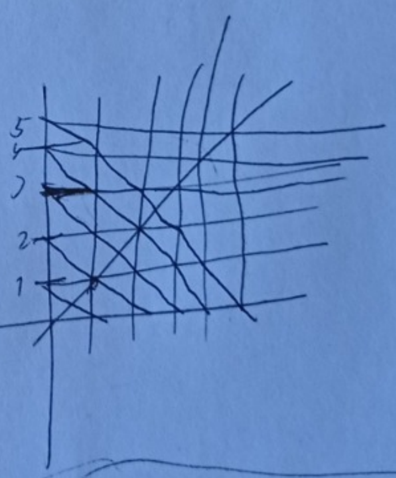
$\boxed{(54\cdot58+4)\cdot2\cdot58}+$

$=58(108\cdot58+8+2\cdot58-\cancel{7})=$

$=58(110\cdot58+5)$

$58\times110=6380$

$6385\times58=51096+31935=370446$



$58\cdot58-2\cdot58-2\cdot56=$

$=58\cdot58-4\cdot58+4=54\cdot58+4$

Черновик

$(2 \cdot 58 - 1) \cdot 58 - 58 \cdot 2$

7 4 2

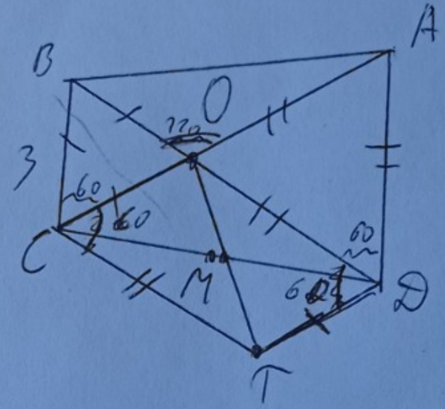
6385

$\times$ 1158

57080

31925

370330



Чистовик

10 класс
Вариант 9
2 часть

№1 (продолжение)

$p = 1$; $t = 2$, из доказанного выше:

$$\begin{cases} a = \dfrac{t + \sqrt{t^2 - 4p}}{2} = 1 \\ b = \dfrac{t - \sqrt{t^2 - 4p}}{2} = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a = \dfrac{t - \sqrt{t^2 - 4p}}{2} = 1 \\ b = \dfrac{t + \sqrt{t^2 - 4p}}{2} = 1 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$a = 1$; $b = 1$

$$\begin{cases} x^2 = a \\ y^2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Ответ: $(1;1)$; $(1;-1)$; $(-1;1)$; $(-1;-1)$

2

REDMI NOTE 9
AI QUAD CAMERA