Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006937**

ID профиля: **367276**

Вариант 9

④

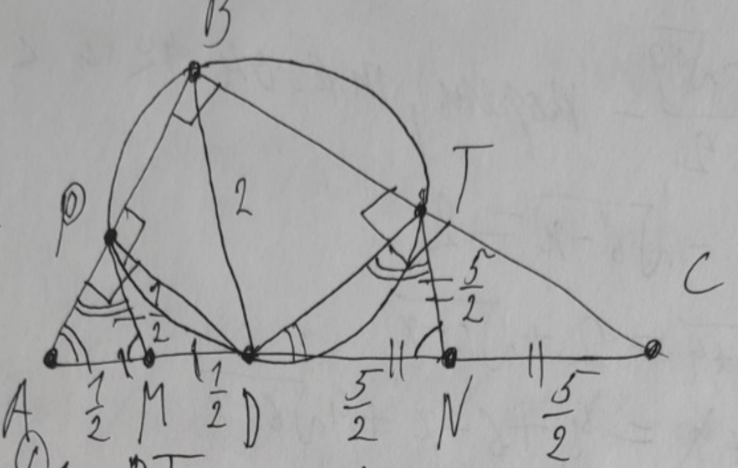
Чистовик

№1

Дано:

BD-диаметр,

PM || TN



а) 1) Дп: DT и DP

2) $\angle BPD = 90° = \angle BTD$, т.к. стягивают диаметр =>.

3) $\angle APD = 90° = \angle DTC$ по смежности. =>

4) $PM = AM = MD$; $TN = DN = NC$ по св-ву прямоуг. Δ.

5) $\angle PMA = \angle DNT$, т.к. они ~~[illegible]~~ СУ при TN; PM и MN. =>

6) $\angle APM = \angle PAM = \angle TDN = \angle DTN = 90° - \angle \frac{DNT}{2}$ по сумме углов Δ => СУ

7) $AB \parallel DT$ по ~~[illegible]~~ ($\angle PAD = \angle TDC$) =>

8) $\angle ABC = 90° = \angle DTC$, т.к. они ~~[illegible]~~ СУ при AB; DT и BC.

211006937 (U367276 M1274054)

5 б) $MP = \frac{1}{2}$; $NT = \frac{5}{2}$; $BD = 2$ Чистовик

№ 7 1) $MP = \frac{1}{2} = AM = MD$; $TN = \frac{5}{2} = DN = NC$ (из п. 4)

2) Т. Пифагора для $\triangle ABC$:

$AB^2 + BC^2 = 36 \Rightarrow BC^2 = 36 - AB^2$ (1)

3) Т. Стюарта для $\triangle ABC$, чевианы BD:

$4 = \frac{5}{6}AB^2 + \frac{1}{6}BC^2 - 5$

$9 = \frac{5}{6}AB^2 + \frac{1}{6}BC^2$

$54 = 5AB^2 + BC^2$

Подставим вместо BC выраж (1)

$54 = 5AB^2 + 36 - AB^2$

$18 = 4AB^2$

$9 = 2AB^2 \Rightarrow AB = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow BC = \sqrt{36 - \frac{9}{2}} =$

$= \sqrt{\frac{72-9}{2}} = \sqrt{\frac{63}{2}} = 3\sqrt{\frac{7}{2}} \Rightarrow \frac{3\sqrt{14}}{2}$

4) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{14}}{2} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$

Ответ: а) $\angle ABC = 90^\circ$. б) $S_{\triangle ABC} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$.

211006937 (U367276 M1274054)

~~Чистовик~~ Черновик

№2 продолж.

$f(x)=6-x$ – убывающая функция

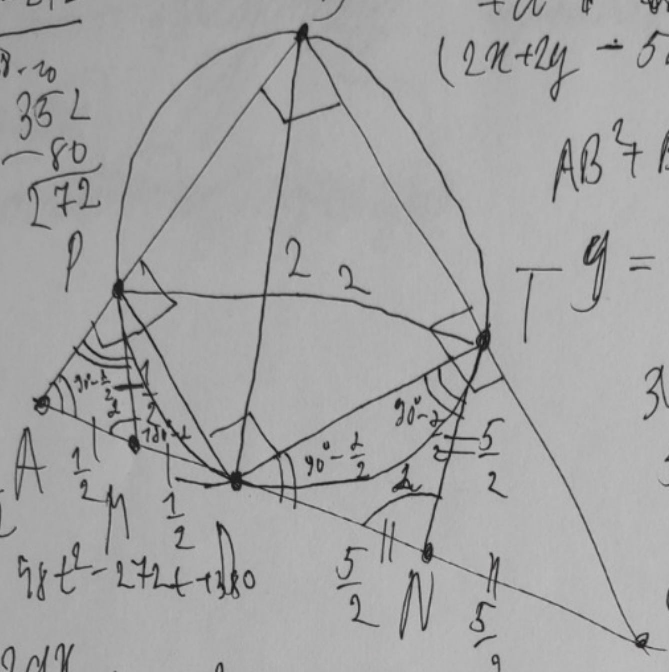
211006937 (U367276 M1274054)

Черновик

$4x^2+8xy+4y^2+25a^2-20ay-20ax+$
$+a^2 - 2ax + x^2$
$(2x+2y-5a)^2=(a-x)^2$

$mx = \frac{4\cdot48\cdot380-272^2}{2\cdot48\cdot20}$

352
−80
272



22 ×22 = 44, 44, 484

16 ×22 = 32, 32, 352

$AB^2+BC^2=36$

$y=\frac{5}{6}AB^2+\frac{1}{7}BC^2-$

$54=5AB^2+BC^2$

$48t^2-272t+380$

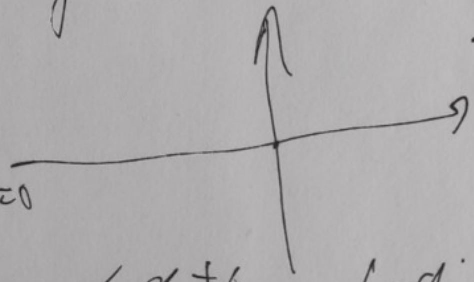
$26a^2-22ax-20ay$
$+x^2+4(x+y)^2=0$
$x^2+4(x+y)^2=22ax+20ay-26a^2$

$a^2-22ax+121x^2-116x^2+25a^2-20ay+4y^2$

$5x^2+(8y-22a)x+4y^2-20ay+26a^2=0$

$D=64y^2-352ay+484a^2-16y^2+80ay-164a^2$
$=48y^2-272ay+380a^2$

$-3a-\frac{1}{a}=4$
$-3a^2-1=4a$
$3a^2+4a+1=0$

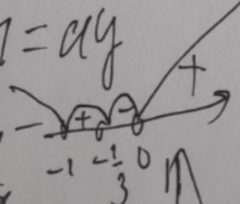


$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$

$a(x^2+2ax+a^2)-ay+1=0$

не $a\neq-1$, $a\neq-\frac{1}{3}$, $a\neq0$

$a(x+a)^2+1=ay$ $a\neq0$ $(-a;\frac{1}{a})$



$\frac{1}{a}$ $-a$ $3x-y\geq4$

$y=(x+a)^2+\frac{1}{a}$

$-3-\frac{1}{a}>4$

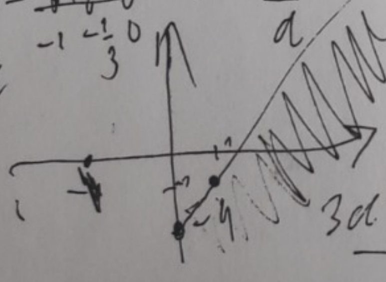
$-3a-\frac{1}{a}>4$

$\frac{3(a+1)(a+\frac{1}{3})}{a}>0$

$-7-\frac{1}{a}>0$

$\frac{-3a^2-4a-1}{a}>0$

$\frac{3a^2+4a+1}{a}<0$



$\frac{7a+1}{a}<0$

211006937 (U367276 M1274054)

(1) Чистовик

№2

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x\geq -4 \\ 6\geq x \\ 24+2x-x^2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -4 \\ x\leq 6 \\ x\in[-4;6] \end{cases} \Rightarrow x\in[-4;6]$

$x^2-2x-24=0$

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+96}}{2}=\dfrac{2\pm 10}{2}=1\pm 5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-4 \end{array}\right.$

$24 \times 4 = 96$

~~Также необходимо, чтобы $\sqrt{x+4}\geq\sqrt{6}$~~

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{(x+4)(6-x)}$$

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+x+4-2\sqrt{(x+4)(6-x)}+6-x-6=0$$

$$(\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x})+(\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x})^2-6=0$$

Пусть $\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=t \Rightarrow$

$t^2+t-6=0$

$D>0 \Rightarrow$ по т. Виета: $\left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=-3 \\ \sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=2 \end{array}\right.$$

$\cancel{\sqrt{x+4}}$ ≠ 2 Чистовик

№2

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=-3$

$\sqrt{x+4}=\sqrt{6-x}-3$

$x+4=6-x+9-6\sqrt{6-x}$ | $\sqrt{6-x}-3\geq 0$

$6\sqrt{6-x}=11-2x$ | $11\geq 2x$

$36(6-x)=121-44x+4x^2$

$216-36x=121-44x+4x^2$

$4x^2-8x-95=0$

$x=\frac{8\pm\sqrt{64+16\cdot 95}}{8}=\frac{8\pm 4\sqrt{4+95}}{8}=\frac{2\pm\sqrt{99}}{2}$

$44-36=8$; $216-121=95$; $44-36=8$; $36\cdot 6=216$; $216-121=95$

Исходя из ограничений: $\sqrt{6-x}\geq 3$ $6-x\geq 9$; $-3\geq x$

и $\frac{11}{2}\geq x\Rightarrow 3\geq x$ Проверим, подходят ли корни:

$\frac{2+\sqrt{99}}{2} \vee 3$

$2+\sqrt{99} \vee 6$

$\sqrt{99} > 4 \Rightarrow$ не подходит, т.к. $\frac{2+\sqrt{99}}{2}>3>-3$

$\boxed{\text{Проверим } \frac{2-\sqrt{99}}{2} \vee -3 \quad 2-\sqrt{99} \vee -6 \Rightarrow -\sqrt{99}<-8\Rightarrow}$

$\frac{2-\sqrt{99}}{2}<-3$ – подходит

Проверим ОДЗ

$-4 \vee \frac{2-\sqrt{99}}{2}$ $-8 \vee 2-\sqrt{99} \vee -10 \vee -\sqrt{99}$

$-\sqrt{100}<-\sqrt{99}$

211006937 (U367276 M1274054)

③ Чистовик

№2

$\Rightarrow \frac{2-\sqrt{99}}{2}$ – корень, т.к. он $-4 < 4 < 0$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2$

$\sqrt{x+4} = 2 + \sqrt{6-x}$

$x + \cancel{4} = \cancel{4} + 6 - x + 4\sqrt{6-x}$

$2x - 6 = 4\sqrt{6-x}$

$x - 3 = 2\sqrt{6-x} \Rightarrow \boxed{x \geq 3}$

$x^2 - 6x + 9 = 24 - 4x$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$D > 0 \Rightarrow$ по т. Виета $\left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -3 < 3 \text{ – не подх.} \end{array}\right.$

~~Подходит под ОДЗ~~ Проверим 5 на ОДЗ

$-4 < 5 < 6 \Rightarrow$

Ответ: $x = 5$; $\cancel{\frac{2+\sqrt{99}}{2}}$; $\cancel{\frac{2-3\sqrt{11}}{2}}$; $\frac{2-3\sqrt{11}}{2}$.

6 №3

Чистовик

~~Исходя из условия графиком первого уравнения является одна точка~~

Преобразуем первое ур:

$26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

$4y^2 + 4x^2 + 25a^2 - 20ay - 20ax + 8xy + a^2 - 2ax + x^2 = 0$

$\underbrace{(2y + 2x - 5a)^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{(a - x)^2}_{\geqslant 0} = 0 \Rightarrow$

$\begin{cases} 2y + 2x = 5a \\ a = x \end{cases} \Rightarrow 2y = 5a - 2x = 5a - 2a = 3a \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{3}{2}a \Rightarrow A(a; \frac{3}{2}a)$

Поработаем с параболой:

$ax^2 + 2a^2x - ay + a^3 + 1 = 0$

$1 + a(x^2 + 2ax + a^2) = ay$

$1 + a(x + a)^2 = ay$

if $a = 0 \Rightarrow 1 = 0 \Rightarrow$ неверно $\Rightarrow a \neq 0$

$y = (x + a)^2 + \frac{1}{a} \Rightarrow B(-a; \frac{1}{a})$

~~Черновик~~ (8)

(7) Чистовик

№3 A и B не лежат на $3x-y=4$

$3a-\frac{3}{2}a\neq 4$ $\qquad -3a-\frac{1}{a}\neq 4$

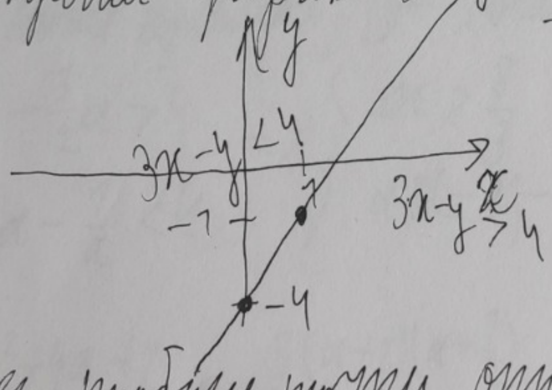
$6a-3a\neq 8$ $\qquad -3a^2-4a-1\neq 0$

$3a\neq 8$ $\qquad 3a^2+4a+1\neq 0$

$a\neq\frac{8}{3}$ $\qquad a\neq -1,\ a\neq -\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} a\neq\frac{8}{3} \\ a\neq -1 \\ a\neq -\frac{1}{3} \\ a\neq 0 \end{cases}$

Построим график $3x-y=4$

x	0	1
y	-4	-1



Через пробные точки определяем, что полуплоскость ниже прямой удовл. неравенству $3x-y>4$, а полуплоскость выше прямой $-3x-y<4$

1сл.: A выше прямой, B - ниже

$\begin{cases} 3a-\frac{3}{2}a<4 \\ -3a-\frac{1}{a}>4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a-3a<8 \\ \frac{-3a^2-4a-1}{a}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<\frac{8}{3} \\ \frac{3(a+1)(a+\frac{1}{3})}{a}<0 \end{cases}$

211006937 (U367276 M1274054)

~~Вариант~~ 7 ~~Черновик~~ 8

Чистовик

№3

Решим второе неравенство методом интервалов:

$-1 \quad -\frac{1}{3} \quad 0 \quad a$ $\Rightarrow a \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; 0) \Rightarrow$

первому сл удовл $a \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; 0)$

2сл: A ниже прямой; B- выше.

$$\begin{cases} 3a - \frac{3}{2}a > 4 \\ -3a - \frac{1}{a} < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > \frac{8}{3} \\ a \in (-1; -\frac{1}{3}) \cup (0; +\infty) \end{cases} \Rightarrow a \in (\frac{8}{3}; +\infty)$$

$$\frac{3a^2+4a+1}{a} > 0 \Rightarrow \frac{3(a+1)(a+\frac{1}{3})}{a} > 0$$

$-1 \quad -\frac{1}{3} \quad 0 \quad a$

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; 0) \cup (\frac{8}{3}; +\infty)$.

211006937 (U367276 M1274054)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006937**

ID профиля: **367276**

Вариант 9

1 Чистовик

№4

ОДЗ: $x^2+y^2 \neq 0 \Rightarrow \cancel{(0;0)}$

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

Прибавим и убавим $2x^2y^2$

$$- \begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

$$(x^2+y^2)^2 - \frac{2}{x^2+y^2} = 3$$

Пусть $x^2+y^2 = t$; $t \neq 0$; $t > 0$

$$t^2 - \frac{2}{t} = 3$$

$$t^3 - 3t - 2 = 0$$

	1	0	−3	−2
−1	1	−1	−2	0

$$(t+1)(t^2-t-2) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=2 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=-1 \\ x^2+y^2=2 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$(t+1)^2(t-2)$$

$x^2+y^2=2$; первый сл. не имеет смысла, т.к. $x^2+y^2 \geq 0$

211006937 (U367276 M1274055)

(2) Чистовик

№4
$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ \dfrac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2y^2=1 \end{cases}$$

Пусть $x^2=a$; $y^2=b$; $a\geq0$; $b\geq0$ $\Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ ab=1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=2-b \\ ab=1 \end{cases} \Rightarrow b(2-b)=1 \Rightarrow -b^2+2b=1 \Rightarrow$

$b^2-2b+1=0 \Rightarrow (b-1)^2=0 \Rightarrow b=1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow$

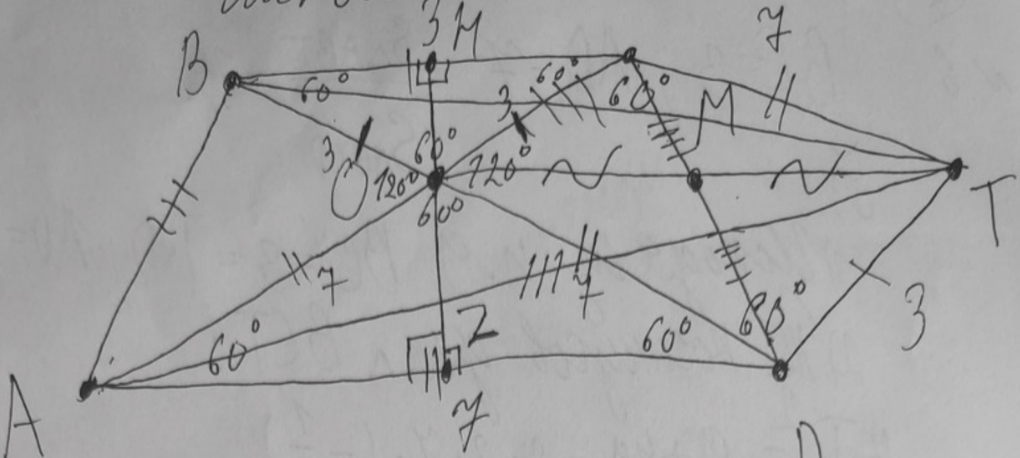
$$\begin{cases} x^2=1 \\ y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (1;1) \\ (1;-1) \\ (-1;1) \\ (-1;-1) \end{array}\right.$$

Ответ: $(1;1)$; $(1;-1)$; $(-1;1)$; $(-1;-1)$.

211006937 (U367276 M1274055)

(3) Чистовик

№6 Дано:
$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - прав,
T симметр. O отн M;
MC=CD.



а) 1) Дп: CT и TD

2) CTDO - парал-м, т.к. диагонали точкой пересечения делятся пополам.

3) $\angle COD = 120°$ по смежности.

4) $\angle OCT = 60°$ по св-ву парал-ма ($OD \parallel CT$) -

5) $\angle ODT = 60°$ по св-ву парал-ма.

6) $OD = CT$; $OC = DT$ по св-ву парал-ма

7) $\angle BOA = 120°$ по вертикальности.

8) $\angle BCT = 2 \cdot 60° = 120° = \angle ADT \Rightarrow$

9) $\triangle BCT = \triangle ATD = \triangle BOA$ по I признаку $\Rightarrow$

10) $AB = BT = AT \Rightarrow$

11) $\triangle ABT$ - правильный, ЧТД.

211006937 (U367276 M1274055)

4

Чистовик

№6 $BC=3$; $AD=7$ $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}=?$

б)

1) Исходя из п. 9 $BC=3=TD$; $AD=7=CT$

2) Т. косинусов для $\triangle BCT$:

$BT^2=9+49-2\cdot3\cdot7\cdot(-\frac{1}{2})$

$BT^2=58+21=79 \Rightarrow BT=\sqrt{79}=AB=AT \Rightarrow$

$S_{\triangle ABT}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot79=\frac{79\sqrt{3}}{4}$, т.к. он равностор.

3) ~~Дп. HZ - высота~~ $BC \parallel AD$, т.к. $HП \angle$ по $60°$ ($\angle CBD=\angle ADB$) $\Rightarrow ABCD$ - тр-я

4) Дп: HZ - высота трапеции $ABCD$, проходящая через O.

5) $BC=3=BO=OC$; $AD=7=AO=OD$ из усл. $\Rightarrow$

6) $OH=OC\sin60°=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$; $OZ=OD\sin60°=7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow HZ=OH+OZ=\frac{10\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}\Rightarrow$

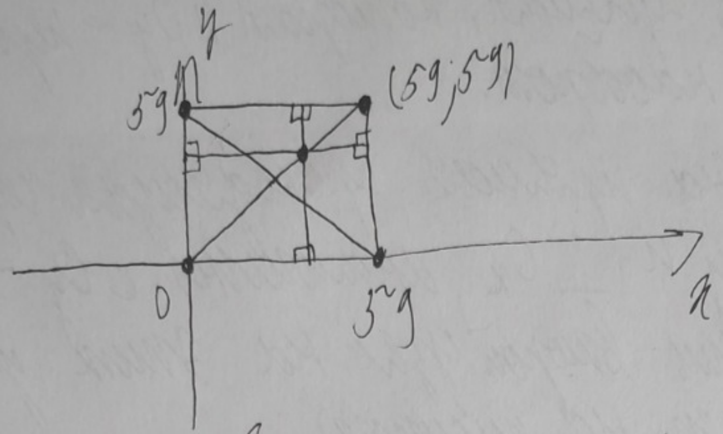
7) $S_{ABCD}=HZ\cdot\frac{BC+AD}{2}=5\sqrt{3}\cdot\frac{3+7}{2}=5\sqrt{3}\cdot5=25\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ 8) $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{79\sqrt{3}}{4}}{25\sqrt{3}}=\frac{79}{100}$ Ответ: б) $\frac{79}{100}$.

$\begin{array}{r}49\\+9\\\hline58\end{array}$ $\begin{array}{r}58\\+21\\\hline79\end{array}$

Чистовик

5



$$\begin{array}{r} 58 \\ +57 \\ \hline 115 \end{array}$$

Диагонали квадрата лежат на прямых $y=x$ и $y=59-x$, т.к. они проходят через $(0;0)$ и $(59;59)$; $(59;0)$ и $(0;59)$ соответственно.

Выбираем первый узел на диагоналях.

На первой диагонали 58 вариантов абсцисс (ордината восстанавливается по абсциссе однозначно) $\Rightarrow$ 58 узлов. На второй тоже 58, но 1 узел у них общий $\Rightarrow$ всего $58+57=115$ вар для первого узла

Теперь ~~выберем~~ найдём варианты для 2 узла: всего точек в квадрате 58^2 (58 абсцисс и 58 ординат), но надо вычесть те, которые на прямых $\parallel O_x$ и O_y

(6) Черновик.

$Ox \perp Oy \Rightarrow$ ~~...~~ прямая, которая $\parallel Oy$ – перпендикуляр к Ox и наоборот.

Существует одна прямая, проходящая через данную точку и $\perp Ox$, аналогично с $Oy \Rightarrow$ нельзя выбирать второй узел на этих двух прямых (см. пример на рисунке)

На прямой $\parallel Oy$ 58 узлов (x – const; на y 58 вар),

На прямую $\parallel Ox$ 58 узлов (x – 58 вар; y – const),

но они пересекутся по 1 ~~...~~ узлу, т.к. они есть перпендикуляры из ~~...~~ точки в ~~...~~ первом узле* к осям координат. $\Rightarrow$ Суммарно на них $58+57=115$ узлов $\Rightarrow$ вариантов для 2-го узла: $58^2-115 \Rightarrow$ по правилу произведения $115\cdot(58^2-115) =$

$= 373635$ вар всего

$$58 \times 58 = 464 + 2900 = 3364$$

$$3364 - 115 = 3249$$

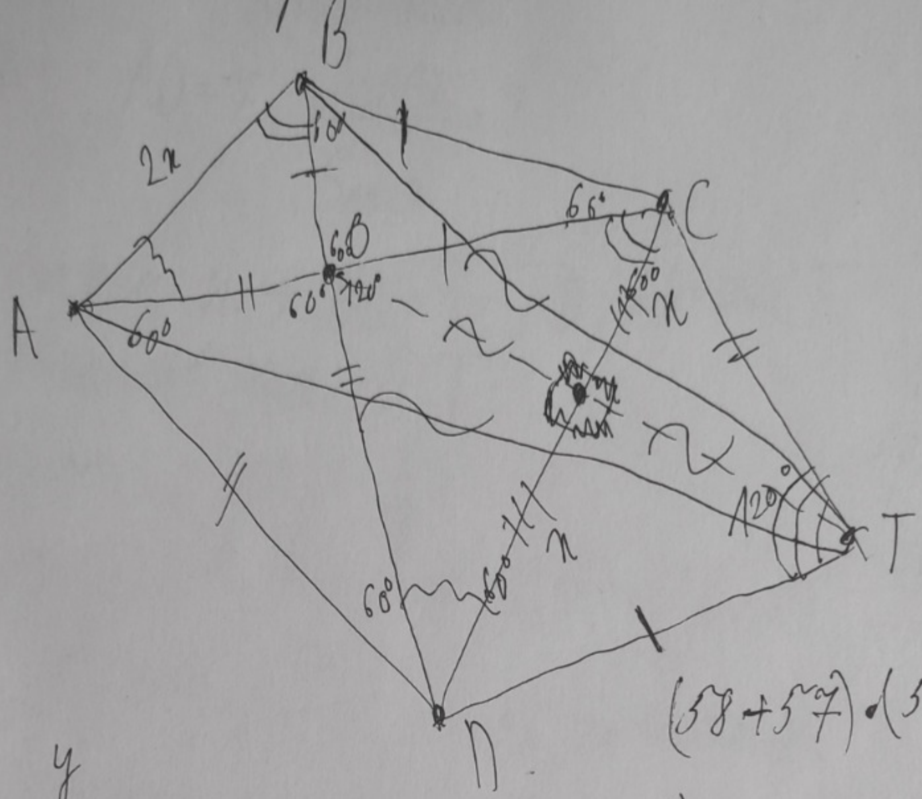
$$3249 \times 115:\quad 16245,\ 3249,\ 3249 \;\to\; 373635$$

$$58 + 57 = 115$$

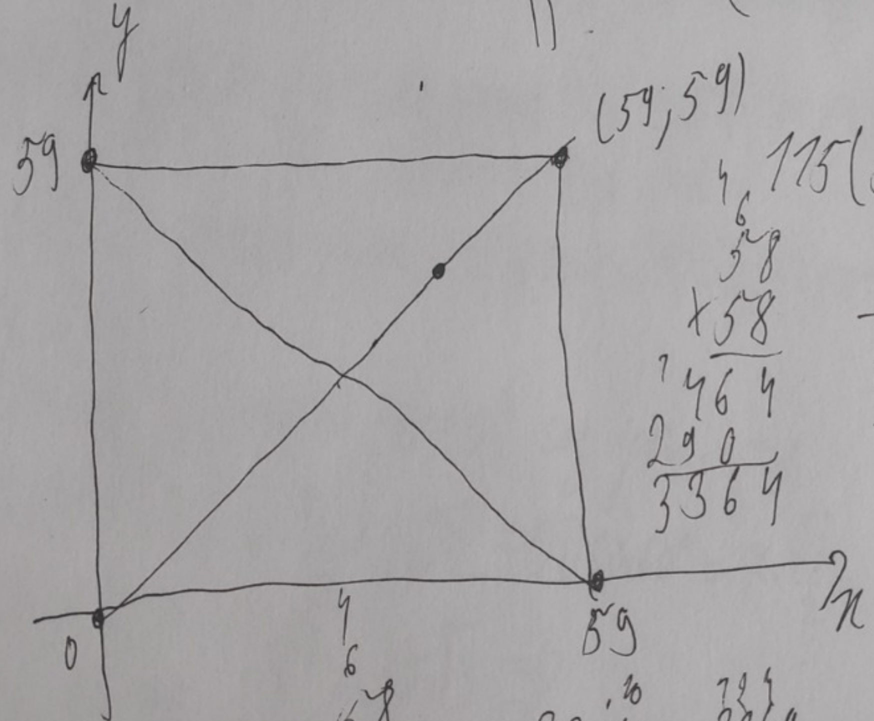
Ответ: 373635.

* В первом узле – в узле, который выбрали первым на диагоналях.

Черновик



$(58+57)\cdot(58^2-58-57)$



$115(58^2-115)$

$$\begin{array}{r} 58 \\ \times\ 58 \\ \hline 464 \\ 290\ \ \\ \hline 3364 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3364 \\ -\ 115 \\ \hline 3249 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3249 \\ \times\ 115 \\ \hline 16245 \\ 3249\ \ \\ 3249\ \ \ \ \\ \hline 373635 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 58 \\ \times\ 58 \\ \hline 464 \\ 290\ \ \\ \hline 3364 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3364 \\ -\ 115 \\ \hline 3249 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3249 \\ \times\ 115 \\ \hline 16245 \\ 3249\ \ \\ 3249\ \ \ \ \\ \hline 373635 \end{array}$$