Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006897**

ID профиля: **264409**

Вариант 9

ЧИСТОВИК

№2

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$

$D(y)$: $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \\ 24+2x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 6 \\ (6-x)(x+4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 6 \\ x \in [-4; 6] \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x \in [-4; 6]}$

Пусть $\sqrt{x+4} = a$, $a \geq 0$ $\qquad a^2 + b^2 = x+4+6-x = 10$

$\sqrt{6-x} = b$, $b \geq 0$

$a - b + 4 = 2ab$

$a + 4 = b(1+2a)$

$b = \frac{a+4}{1+2a}$

$a^2 + \left(\frac{a+4}{1+2a}\right)^2 = 10$

$a^2 + \frac{a^2+8a+16}{1+4a^2+4a} - 10 = 0$

$\frac{4a^4+4a^3+a^2+a^2+8a+16-10-40a^2-40a}{1+4a^2+4a} = 0 \qquad a \neq -\frac{1}{2}$

$2a^4 + 2a^3 - 19a^2 - 16a + 3 = 0$

$2a^4+2a^3-19a^2-16a+3 = (a-3)(2a^3+8a^2+5a-1) = (a-3)(a+1)(2a^2+6a-1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} a-3=0 \\ a+1=0 \\ 2a^2+6a-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=-1 \\ a=\frac{-3\pm\sqrt{11}}{2} \end{array}\right.$, но $a \geq 0$ $\Downarrow$ $\left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=\frac{-3+\sqrt{11}}{2} \end{array}\right.$

• $a=3 \Rightarrow \sqrt{x+4} = 3$ $\Downarrow$ $x=5$

• $a = \frac{-3+\sqrt{11}}{2} \Rightarrow 2\sqrt{x+4} = -3+\sqrt{11}$

$4x+16 = 20-6\sqrt{11}$

$4x = 4-6\sqrt{11}$

$x = 1 - \frac{3\sqrt{11}}{2}$ $\quad, x \in [-4; 6]$

3

из прям $\triangle APD$: $PD^2 = 1 - AP^2$

из прям $\triangle BPD$: $PD^2 = 2 - BP^2$

$\angle BPD = \angle PBT = \angle BTD = 90^0 \Rightarrow BTDP$ - прямоугольник $\Rightarrow DT = BP$

$$PD^2 = 1 - AP^2 = 2 - BP^2 = 2 - DT^2 = 2 - 25AP^2$$

$$1 - AP^2 = 2 - 25AP^2$$

$$24AP^2 = 1$$

$$AP^2 = \frac{1}{24}$$

$$AP = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$PD = \sqrt{1 - \frac{1}{24}} = \sqrt{\frac{23}{24}} = \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{6}}$$

$$S_{APD} = \frac{AP \cdot PD}{2} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{23}}{48}$$

$$\frac{S_{APD}}{S_{ABC}} = \frac{1}{36}$$

$$S_{ABC} = 36 S_{APD} = 36 \cdot \frac{\sqrt{23}}{48} = \frac{3}{4}\sqrt{23}$$

Ответ: $\angle ABC = 90^0$, $S_{ABC} = \frac{3}{4}\sqrt{23}$

$1-\frac{3\sqrt{11}}{2} \overset{>}{?} -4$ $\Rightarrow x \in [-4; 6]$

$5 > \frac{3\sqrt{11}}{2}$

$10 > 3\sqrt{11}$

$\frac{10}{3} > \sqrt{11}$ $\quad {}^2$

$\frac{100}{9} > 11$

Ответ: $x = 5$; $x = 1 - \frac{3\sqrt{11}}{2}$

ЧИСТОВИК

№3

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$

$ay=ax^2+2a^2x+a^3+1 \neq 0$

• $a=0 \Rightarrow 0=1$ ↯

• $a\neq 0$

$y=x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}$

$x_в=\frac{-2a}{2}=-a$

$y_в=a^2-2a^2+a^2+\frac{1}{a}$

$B\left(-a;\frac{1}{a}\right) \Rightarrow$ B лежит на гиперболе $y=-\frac{1}{x}$

ЧЕРНОВИК

$5x^2+8xy+4y^2+26a^2-22ax-20ay=0$

$\left(4y^2-20ay+\frac{25}{4}a^2\right)=\left(\cancel{2y+\frac{3}{2}a}\right)$ $\qquad (2y+x)^2+\left(4x^2-22ax+\frac{121}{4}a^2\right)$

$2\cdot2\cdot10$ $\qquad (2y+5a)^2$ $\qquad 2\cdot2\cdot\frac{11}{2}$

$(2y+x)^2+\left(2x-\frac{11}{2}a\right)^2+\frac{3}{4}a^2+x^2=20ay$

$\left(5x^2-22ax+\quad a^2\right)=$

$20ay\geq0$

$(2x+2y)^2+x^2+26a^2-22ax-20ay=0$ $\quad ay\geq0$ $\qquad a\neq0$ $\quad \frac{121}{-26}=95$

$(2x+2y)^2+\left(x^2-22ax+121a^2\right)-95a^2-20ay=0$

$(x-11a)^2$

$3-1+4=2\sqrt{24+10-25}$

$4+2=2\cdot3$ $\quad 3$

ЧЕРНОВИК

$PM \parallel TN$

$\angle ABC - ?$

$\angle PDT - ?$

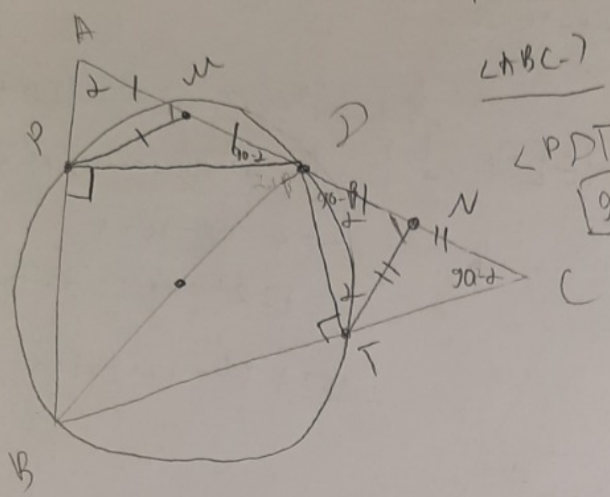
$\boxed{90^\circ}$

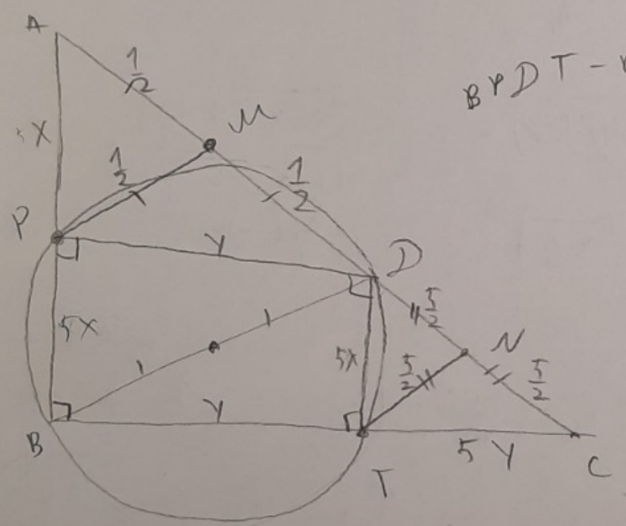
$\angle APD = \angle BTD = 90^\circ$ – на диам

$\angle APD = \angle DTC = 90^\circ$

медианы

$\angle AMP = \angle DNT = \cancel{\alpha}$





BPDT – прямоуг.

$MP = \frac{1}{2}$

$NT = \frac{5}{2}$

$BD = 2$

S_{ABC}

$AD = 1$

$CD = 5$

$AC = 6$

$\frac{x \cdot y}{2} = \frac{1 \cdot \sqrt{23}}{2\sqrt6 \cdot 2 \cdot 2\sqrt6} = \frac{\sqrt{23}}{6 \cdot 8}$

$\cancel{PD^2 = 1 - 25x^2}$

$\cancel{PD^2 = 2 - x^2}$

$\cancel{1 - 25x^2 = 2 - x^2}$

$PD^2 = 1 - x^2 = 2 - 25x^2$

$\frac{\sqrt{23}}{48} \cdot 36 = \boxed{\sqrt{23} \cdot \frac{3}{4}}$

$24x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{24}$

$x = \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{1}{2\sqrt6}$

$AB = 6x = \frac{1}{2\sqrt6} \cdot 6 = \boxed{\frac{\sqrt6}{2}}$

$BT = \sqrt{2 - \frac{25}{24}} = \sqrt{\frac{23}{24}}$

$CT = \cancel{\sqrt{5 - }} \sqrt{\frac{23}{24}} \cdot 5$

$BC = 6\sqrt{\frac{23}{24}} = \frac{6 \cdot \sqrt{23}}{2\sqrt6} = \frac{\sqrt6 \cdot \sqrt{23}}{2}$

$\frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt6}{2} \cdot \frac{\sqrt6 \cdot \sqrt{23}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6\sqrt{23}}{8} = \frac{3\sqrt{23}}{4}$

№2

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$

$D(f)$: $x \geq -4$
$x \leq 6$

$\boxed{x \in [-4; 6]}$

$-x^2 + 2x + 24 \geq 0$

$x^2 - 2x - 24 \leq 0$ $a = \sqrt{x+4}$

$a \geq 0$

$(x-6)(x+4) \leq 0$

$(6-x)(x+4) \geq 0$

$+$

$-$ -4 6 $-$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

$\sqrt{x+4} + 4 = \sqrt{6-x}\left(1 + 2\sqrt{x+4}\right)$

$a - b + 4 = 2ab$

$a + 4 = b(1+2a)$

$\frac{a+4}{1+2a} = b$

$a - \frac{a+4}{1+2a} + 4 = \frac{2a(a+4)}{1+2a}$

$\frac{\cancel{a-2a^2-a-4+4+8a-2a^2-8a}}{1+2a} = 0$

$\cancel{4a^2 = 0}$

$\frac{\sqrt{x+4} + 4}{1+2\sqrt{x+4}} = \sqrt{6-x}$

$a^2 + \frac{a^2+8a+16}{4a^2+4a+1} = 10$

$4a^4 + 4a^3 + a^2 + a^2 + 8a + 16 - 40a^2 - 40a - 10 = 0$

$4a^4 + 4a^3 - 38a^2 - 32a + 6 = 0$

$2a^4 + 2a^3 - 19a^2 - 16a + 3 = 0$

$19 \cdot 9 = 90 + 81 = 171$

$2 + 2 - 19 - 16 + 3$

$2 \cdot 81 + 2 \cdot 27 - 19 \cdot 9 - 48 + 3 =$

$= 162 + 54 - 171 - 48 + 3 = 216 - 219 + 3 = 0$

$\sqrt{x+4} = a$

$\sqrt{6-x} = b$

$a^2 + b^2 = 10$

$a^2 + \left(\frac{a+4}{1+2a}\right)^2 = 10$

$x + y = 2$

$x = 2 - y$

$\cancel{2 \ldots}$

$a - \frac{a+4}{1+2a} + 4 - \frac{2a^2+8a}{1+2a} = 0$

$\frac{a}{1+2a}$

$\frac{3\sqrt{11}}{2} < 5$

$3\sqrt{11} < 10$

$\sqrt{11} < \frac{10}{3}$

$11 < \frac{100}{9}$

$\cancel{4a^4+4a^3}-3$

$(a-3)$

$\boxed{a=3}$

$$
\begin{array}{l|l}
2a^4+2a^3-19a^2-16a+3 & a-3 \\
\hline
-\,2a^4-6a^3 & 2a^3+8a^2+5a-1 \\
\quad 8a^3-19a^2 & \\
\quad -\,8a^3-24a^2 & \\
\qquad 5a^2-16a+3 & \\
\qquad -\,5a^2-15a & \\
\qquad\quad -a+3 & \\
\qquad\quad -\,-a+3 &
\end{array}
$$

$\sqrt{x+4}=3$

$x+4=9$

$\boxed{x=5}$

$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$

$2a^3+8a^2+5a-1=0$

$2+8+5-1=0$

$2\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{1}{2}-1$

$-2+8-5-1=0$

$\cancel{\boxed{a=-1}}$

$$
\begin{array}{l|l}
2a^3+8a^2+5a-1 & a+1 \\
\hline
-\,2a^3+2a^2 & 2a^2+6a-1 \\
\quad 6a^2+5a-1 & \\
\quad 6a^2+6a & \\
\qquad -a-1 &
\end{array}
$$

$2a^2+6a-1=0$

$D=36+8=44$

$\frac{-6\pm2\sqrt{11}}{4}$

$\sqrt{x}=$

$\frac{-3\pm\sqrt{11}}{2}$

$\boxed{a=\frac{-3+\sqrt{11}}{2}}$

$\cancel{\frac{-3-\sqrt{11}}{2}}<0$

$-4>-\frac{3\sqrt{11}+1}{2}$

$4<\frac{3\sqrt{11}+1}{2}$

$8<3\sqrt{11}+1$

$8<3\cdot3+1$
≈ 10

$\sqrt{x+4}=\frac{-3+\sqrt{11}}{2}$

$x+4=\frac{14-6\sqrt{11}}{4}$

$4x+16=14-6\sqrt{11}$

$4x=-2-6\sqrt{11}$

$x=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{11}=-\frac{3\sqrt{11}+1}{2}$

$26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$ A

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$ V_B

ЧЕРНОВИК

$ay=ax^2+2a^2x+a^3+1$

$\cancel{5x^2+8xy+4y^2=0}$ A

• $a\neq 0$

$y=x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}$

$x_B=\frac{-2a}{2}=-a$

$f(x_B)=a^2-2a^2+a^2+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$ $\boxed{B\left(-a;\frac{1}{a}\right)}$

$5x^2+4y^2+8xy+26a^2-22ax-20ay=0$

$y=3x-4$

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

$5x^2-22ax$

$(4y^2+8xy+x^2)$
$+\ 4x^2$
$+\ 26a^2$
$+\ -22ax-20ay$

$5x^2+4y^2+8xy=0$

$\cancel{x^2+4y^2}+8xy=0$

$x^2+2xy+y^2=0$

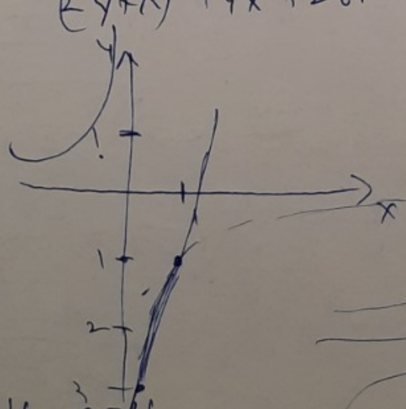
$(2y+x)^2+4x^2+26a^2=20ay+22ax$

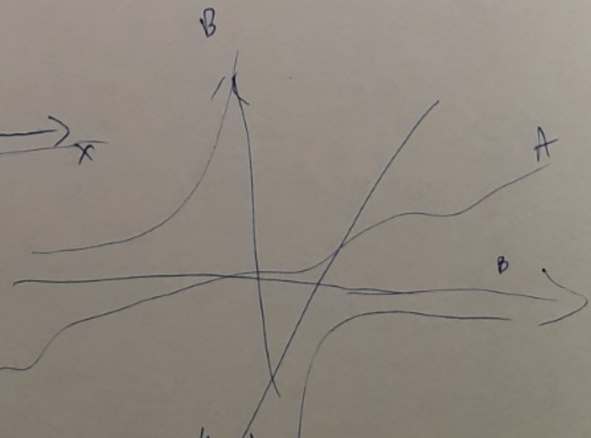
$(x+y)^2=0$

$x+y=0$

$x=-y$

$4x^2+8xy+y^2=0$





2+2

$y=3x-4$

3 $y=-\frac{1}{x}$

$D=16-12=4$

$\frac{4\pm 2}{6}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\frac{1}{3}}$

$3x-4=-\frac{1}{x}$

$a\in(-\infty;0)\cup(0;\cup(\frac{1}{3};1)$

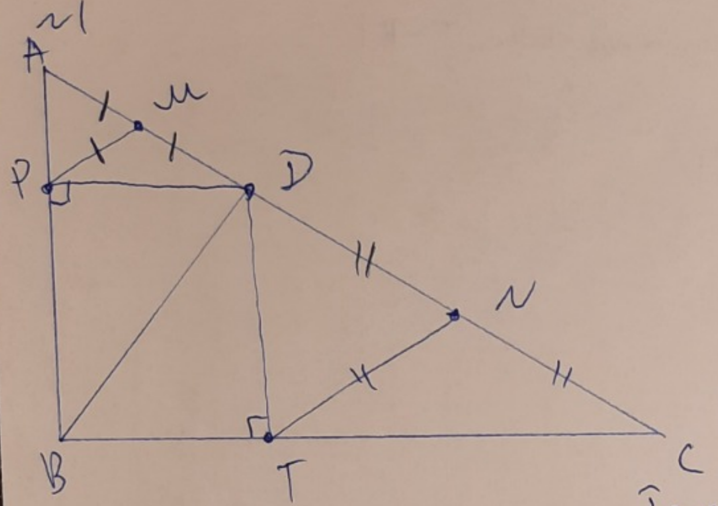
$3x+\frac{1}{x}-4=0$

$a\in(0;\frac{1}{3})\cup(1;+\infty)$

$3x^2-4x+1=0$

ЧИСТОВИК

№1



Дано: ΔABC, M-сер AD, N-сер CD, $BTDP$-впис, BD-диам, $PM \parallel TN$.
$MP=\frac{1}{2}$ $TN=\frac{5}{2}$ $BD=2$

Найти: $\angle ABC$, S_{ABC}

Решение.

а) $\angle BPD$ и $\angle BTD$ опир. на диаметр $BD \Rightarrow \angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$

$\Downarrow$

$\angle APD = \angle CTD = 90^\circ$ как смежные.

Тогда в прям. ΔAPD $PM = AM = MD$ как медиана к гипотенузе.

Аналогично $TN = NC = DN$

$PM \parallel TN \Rightarrow \underbrace{\angle AMP}_{\alpha} = \underbrace{\angle DNT}_{\alpha}$ как соотв.

Тогда в р/б ΔDNT $\angle NDT = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$, в р/б ΔAMP $\angle MAP = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$

$\angle CDT = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle DCT = \cancel{90}\,\frac{\alpha}{2}$

$\angle DCT + \angle DAP = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ \Rightarrow \boxed{\angle ABC = 90^\circ}$

б) $\Delta APD \overset{\frac{AD}{DC}}{\sim} \Delta DTC$ по УУ, $\frac{AD}{DC} = \frac{2PM}{2NT} = \frac{1}{5}$

$AP = \frac{1}{5} DT$, $PD = \frac{1}{5} TC$ как соотв.

$\Delta APD \overset{\frac{AD}{AC}}{\sim} \Delta ABC$ по УУ, $\frac{AD}{AC} = \frac{AD}{AD+DC} = \frac{1}{6}$

$\frac{S_{APD}}{S_{ABC}} = \frac{1}{36} = \left(\frac{1}{6}\right)^2$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

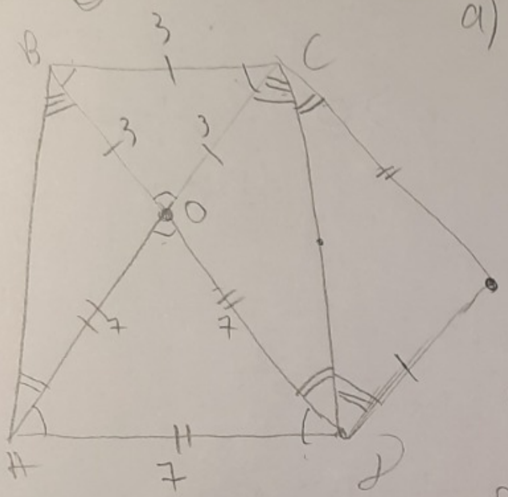
Шифр: **211006897**

ID профиля: **264409**

Вариант 9

ЧЕРНОВИК

№5



а) $\Delta ADT = \Delta TCB$

$BT = AT$

$AB = CD = BT = AT$

$\begin{array}{r} \times 57 \\ 57 \\ \hline 399 \\ 285 \\ \hline 3249 \end{array}$

$\frac{113}{2} = 56{,}5$

б) ABCD – р/б трапеция

$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot h$

$S_{ABCD} = 5h = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(10) = 25\sqrt{3}$

$\begin{array}{r} 3249 \\ -\ 56 \\ \hline 3193 \end{array}$

3192,5

$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

$AB^2 = 9+49-2\cdot 3\cdot 7\cdot -\frac{1}{2} = 9+49+21 = 79$

$AB = \sqrt{79}$

$\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

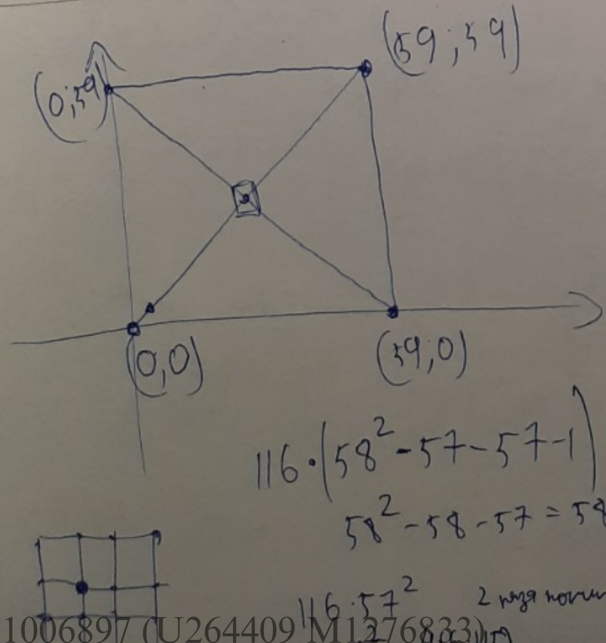
$\frac{79 \cdot \sqrt{3}}{4}$

$25\sqrt{3}$

$= \frac{79\sqrt{3}}{100\sqrt{3}} = \boxed{79:100}$

$\begin{array}{r} \times 3192{,}5 \\ 116 \\ \hline 191550 \\ 31925 \\ 31925 \\ \hline 360330{,}0 \end{array}$

360330



60×60 – узлов.

58×58 – узлов без границы.

$58+58=116$ – узлов на диаг.

$\frac{116\cdot 115}{2} - \frac{116\cdot 2}{2} = \frac{116\cdot 115}{2} - 116$

$116\cdot\left(\frac{115}{2}-1\right)$

$116\cdot\frac{113}{2}$

$116\cdot(58^2-57-57-1)$

$58^2-58-57 = 58(58-1) = 58\cdot 57 - 57 = 57^2$

$116\cdot 57^2$ 2 узла посчитали, если оба на диагоналях.

$116\cdot 57^2 - \left(\frac{116\cdot 115}{2}\right)$

$116\cdot 57^2 - 116\cdot\frac{113}{2}$

ЧЕРНОВИК

$\boxed{\pm 1; \pm 1}$

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases}$$

$a = x^2$, $a \geq 0$

$b = y^2$, $b \geq 0$

$a;$

$(x;y)$ – реш.

$(y;x)$ – (реш.)

$(\pm x; \pm y)$

$$\boxed{\begin{cases} \frac{2}{a+b} + ab = 2 \quad \cdot 3 \\ a^2+b^2+3ab=5 \end{cases}}$$

$\frac{6}{a+b} + 3ab = 6$

$\frac{6}{a+b} - a^2 - b^2 = 1$

$(a+b)^2 + ab = 5$

$\frac{6}{a+b} = 1+a^2+b^2$

$\frac{2}{a+b} + ab - 2 = 0$

$\boxed{6 = (a+b)(1+a^2+b^2)}$

$2 + a^2b + ab^2 - 2a - 2b = 0$

$a+b = \frac{6}{1+a^2+b^2}$

$2 + ab(a+b) - 2(a+b) = 0$

$ab(a+b) = 2(a+b) - 2$

$\frac{1+a^2+b^2}{3} + ab = 2$

$a^2+b^2+3ab = 5$

$1+a^2+b^2+3ab = 6$

$ab(a+b) - 2(a+b) = 2$

$a^2+3ab = 5-b^2$

$(a+b)(ab-2) = 2$

$a(a+3b) = 5-b^2$

$2 + a^2b + ab^2 = 2a+2b$

$a+b = \frac{2}{ab-2}$

$2(1-a-b) = -ab(a+b)$

$2 - 2(a+b)$

$ab - 2 + ab = 2$

$2 = \frac{ab}{2}$

$2ab = 4$

$ab = 2$

$2 + a^2b + ab^2 - 2(a+b)$

$2 + ab(a+b) - 2(a+b) = 2 + (a+b)(ab-2) = 0$

$a+b = -\frac{2}{ab-2} = \frac{6}{1+a^2+b^2}$

ЧЕРНОВИК

$5+7+5+5$

$(x_0\ y_0)$

$(\pm x_0; \pm y_0)$

$(\pm y_0 \pm x_0)$

$$\frac{-1}{ab-2}=\frac{3}{1+a^2+b^2}$$

$-1-a^2-b^2=3ab-6$

$\cancel{5=3ab+a^2+b^2}$

$\frac{2}{a+b}+a^2+b^2+4ab=7$

$\frac{6}{a+b}=1+a^2+b^2$

$a+b=-\frac{2}{ab-2}$

$a+b=\frac{6}{1+a^2+b^2}$

$\cancel{(a+b)^2}=\frac{4}{a^2b^2-4ab+4}=5-ab$

$\frac{1+a^2+b^2}{3}+a^2+b^2+4ab=7$

$4-5a^2b^2+20ab-20+a^3b^3-4a^2b^2+4ab=0$

$1+a^2+b^2+3a^2+3b^2+12ab=21$

$\boxed{a^3b^3-9a^2b^2+24ab-16=0}$

$4a^2+4b^2+12ab=20$

$a^2+b^2+3ab=5$

$ab=t$ $\qquad t\geq 0$

$t^3-9t^2+24t-16=0$

$1-9+24-16$ $\qquad 1+24=9+16$

$\boxed{t=1}$

$a^2+b^2+2ab=5-ab$

$(a+b)^2=5-ab$

$t^3-9t^2+24t-16 \mid t-1$

$-t^3-t^2 \qquad t^2-8t+1$

$-8t^2+24t-16$

$-8t^2+8t$

$16t-16$

$t^2-8t+1=0$

$D=64-4=60$

$\frac{8\pm2\sqrt{15}}{2}$ $\qquad \boxed{4\pm\sqrt{15}}$

$\frac{2}{a+b}=1$ $\qquad x^2=1$

$y^2=1$

$\boxed{1;1}$

$\begin{cases}a+b=2\\ab=1\end{cases}$

$a=2-b$ $\qquad b^2-2b+1=0$

$b(2-b)=1$ $\qquad (b-1)^2=0$

$2b-b^2-1=0$ $\qquad b=1$

$ab = 4 \pm \sqrt{15}$ $\quad a = \frac{4+\sqrt{15}}{b}$ $\quad b^2 - 8b + 1 = 0$

$\frac{2}{a+b} = 2 - 4 - \sqrt{15}$

$2 = (a+b)(-2-\sqrt{15})$

$a+b = \frac{2}{-2-\sqrt{15}}$

$b + \frac{4+\sqrt{15}}{b} = -\frac{2}{2+\sqrt{15}}$

$b^2 + b\frac{2}{2+\sqrt{15}} + 4 + \sqrt{15} = 0$

$D = \frac{4}{4+15+4\sqrt{15}} \cancel{4} - 4 - 4\sqrt{15}$ $\quad \emptyset$ $\quad D < 0$

$ab = 4 - \sqrt{15}$ $\quad a = \frac{4-\sqrt{15}}{b}$

$\frac{2}{a+b} = 2 - 4 + \sqrt{15} = \sqrt{15} - 2$

$2 = (a+b)(\sqrt{15}-2)$

$a+b = \frac{2}{\sqrt{15}-2}$

$b + \frac{4-\sqrt{15}}{b} - \frac{2}{\sqrt{15}-2} = 0$

$b^2 - \frac{2b}{\sqrt{15}-2} + \cancel{4} - \sqrt{15}$

$D = \frac{4}{19-4\sqrt{15}} - 16 + 4\sqrt{15}$

$\frac{1}{19-4\sqrt{15}} - 4 + \sqrt{15}$

$\frac{1 - 76 + 16\sqrt{15} + 19\sqrt{15} - 60}{19-4\sqrt{15}} > 0$ $\quad = -135 + 35\sqrt{15} < 0$

$\frac{135}{5} = 27$

$35 \cdot 4$

$-135 + 35\sqrt{15} \gtrless 0$ $\quad 180 + 63$

$35\sqrt{15} \ ? \ 135$ $\quad 243$

$7\sqrt{15} \ ? \ 17$ $\quad 7\sqrt{15} \overset{?}{>} 27$

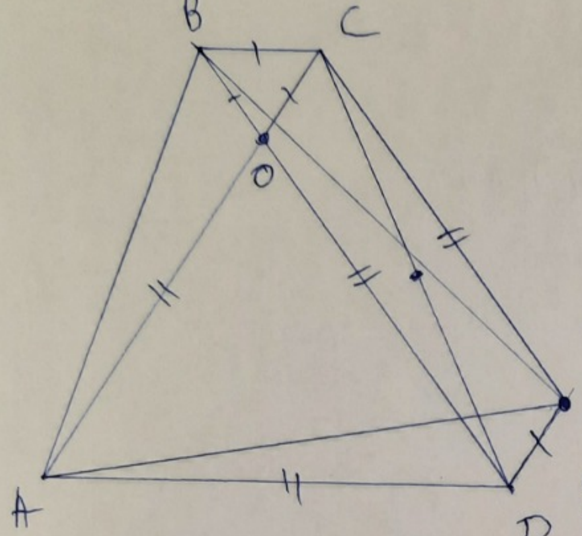
$\cancel{7 \cdot 15}$ $\quad 105$ $\quad 17^2$ $\quad 49 \cdot 15 > 27^2$

$49 \cdot 5 > 27 \cdot 9$

$245 > 243$

ЧИСТОВИК

№6



Дано: $\triangle BOC$, $\triangle AOD$ – пр $\triangle$.
$BC = 3$ $AD = 7$
Д-ть: $\triangle ABT$ – прав.

а) Решение.

Заметим, что при отражение точки отн. середины отрезка, образ, прообраз и концы отрезка образуют параллелограмм (т.к. его диагонали делятся друг другом пополам).

Значит, $CODT$ – парал. $\Rightarrow CO = DT$, $OD = CT$.

Пусть $\angle OCD = \alpha$, тогда $\angle ODC = 180^\circ - 120^\circ - \alpha = 60^\circ - \alpha$

$\triangle OCD = \triangle TDC$ по ССС $\Rightarrow \angle ODC = \angle TCD = 60^\circ - \alpha$

$\angle BCT = 60^\circ + \alpha + 60^\circ - \alpha = 120^\circ$

Р/м $\triangle BCT$ и $\triangle OCD$:

1) $\angle COD = \angle BCT = 120^\circ$
2) $BC = OC$, $OD = CT$

$\Rightarrow \triangle BCT = \triangle COD$ по СУС $\Rightarrow BT = CD$ как соотв.

Аналогично $\triangle ADT = \triangle DOC$ по СУС $\Rightarrow AT = CD$

$\triangle BOA = \triangle COD$ по СУС $\Rightarrow CD = AB$ как соотв.

Тогда $AB = CD = AT = BT \Rightarrow \triangle ABT$ – правильный по опр.

б) $S_{ABT} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}$

Т. косинусов для $\triangle BOA$:

$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2 BO \cdot AO \cdot \cos 120^\circ$ $\quad BO = BC = 3$ $\quad AO = AD = 7$

$AB^2 = 9 + 49 + 3 \cdot 7 = 79$

ЧИСТОВИК

$S_{ABT} = \frac{79\sqrt{3}}{4}$

Заметим, что $\angle ADO = \angle CBO = 60^\circ \Rightarrow BC \parallel AD$, $BC \neq AD \Rightarrow ABCD$ – трапеция.

$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h$, где $h - \rho(BC; AD)$

$\rho(BC; AD) = \underbrace{\rho(O; BC)}_{=\frac{3\sqrt{3}}{2}} + \underbrace{\rho(O; AD)}_{=\frac{7\sqrt{3}}{2}}$ т.к. $BC \parallel AD$

как высоты в прав. Δ.

$\rho(BC; AD) = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

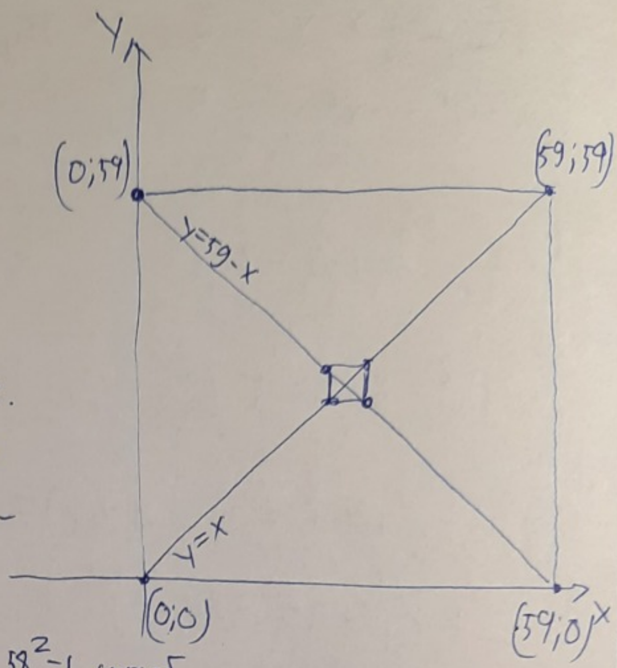
$S_{ABCD} = \frac{3+7}{2} \cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{79\sqrt{3}}{4 \cdot 25\sqrt{3}} = \frac{79}{100}$

Ответ: $79:100$

ЧИСТОВИК

№5



Заметим, что прямые $y=x$ и $y=59-x$ — это диагонали нашего квадрата

Кол-во узлов внутри квадрата − 58^2

Кол-во узлов на каждой диагонали − 58, всего 116, т.к. диагонали пересекаются не в узле, а в центре клеточки.

Сначала выберем точку, лежащую на диагонали − 116 вариантов.

Теперь нужно выбрать клетку внутри квадрата − 58^2-1 способ.

Теперь вычтем случаи, когда обе клетки лежат на прямой ∥ оси координат:

$116\cdot(58^2-57-58)=116\cdot 57^2$

Теперь заметим, что мы дважды посчитали случаи, когда обе клетки лежат на диагоналях и при этом не лежат на прямой ∥ осям координат.

$\frac{116\cdot 115}{2}$ − способов выбрать 2 клетки на диагоналях

$\frac{116\cdot 2}{2}=116$ способов выбрать 2 клетки на диагоналях так, чтобы отрезок, их соед., был ∥ OX или OY.

Итого: $116\cdot 57^2-\left(\frac{116\cdot 115}{2}-116\right)=116\left(57^2-\frac{113}{2}\right)=116(3249-56{,}5)=116\cdot 3192{,}5=360\,330$

Ответ: 360330 способов

№4 ЧИСТОВИК

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases}$$

Пусть $a=x^2$, $a\geq 0$

$b=y^2$, $b\geq 0$

$$\begin{cases} \frac{2}{a+b}+ab=2 \quad (1) \\ a^2+b^2+3ab=5 \quad (2) \end{cases}$$

(1): $\frac{2}{a+b}+ab=2 \quad | \cdot (a+b) \neq 0$

$2+a^2b+ab^2=2(a+b)$

$2+ab(a+b)-2(a+b)=0$

$2+(ab-2)(a+b)=0$

$$\boxed{a+b=\frac{-2}{ab-2}}$$

~~$3\cdot(1)-(2) = \frac{6}{a+b}-a^2-b^2=1$~~

~~$\frac{6}{a+b}=1+a^2+b^2$~~

~~$a+b=\frac{6}{1+a^2+b^2}$~~

(2): $a^2+b^2+3ab=5$

$(a+b)^2=5-ab$

$a+b=-\frac{2}{ab-2}$

$\frac{4}{a^2b^2-4ab+4}=5-ab$ Пусть $ab=t$, $t\geq 0$

$\frac{4}{t^2-4t+4}=5-t$

$\frac{4-5t^2+20t-20+t^3-4t^2+4t}{t^2-4t+4}=0$

4

ЧИСТОВИК

$t^3-9t^2+24t-16=0$

$(t-1)(t^2-8t+1)=0$

$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t^2-8t+1=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=4\pm\sqrt{15} \end{array}\right.$

• $t=1$

$ab=1$

(1): $\frac{2}{a+b}=1$

$a+b=1$

$a=1-b$

$b(1-b)=1$

$b^2-2b+1=0$

$\boxed{b=1}$ $\boxed{a=1}$

$\boxed{x=\pm1}$ $\boxed{y=\pm1}$

• $t=4+\sqrt{15}$

$ab=4+\sqrt{15}$ $\Rightarrow a=\frac{4+\sqrt{15}}{b}$

$\frac{2}{a+b}=-2-\sqrt{15}$

$a+b=-\frac{2}{2+\sqrt{15}}$

$b+\frac{4+\sqrt{15}}{b}=-\frac{2}{2+\sqrt{15}} \quad |\cdot b\neq0$

$b^2+b\frac{2}{2+\sqrt{15}}+4+\sqrt{15}=0$

$D=\left(\frac{2}{2+\sqrt{15}}\right)^2-4(4+\sqrt{15})<0$

$\wedge$ $\vee$

1 1 $D<0 \Rightarrow \varnothing$

• $t=4-\sqrt{15}$

$ab=4-\sqrt{15}$ $a=\frac{4-\sqrt{15}}{b}$

$\frac{2}{a+b}=\sqrt{15}-2$

$a+b=\frac{2}{\sqrt{15}-2}$

$b+\frac{4-\sqrt{15}}{b}=\frac{2}{\sqrt{15}-2} \quad |\cdot b\neq0$

$b^2-b\frac{2}{\sqrt{15}-2}+4-\sqrt{15}=0$

$D=\frac{4}{19-4\sqrt{15}}+4\sqrt{15}-16=4\left(\frac{1}{19-4\sqrt{15}}+\sqrt{15}-4\right)=$

$=4\left(\frac{1-76+16\sqrt{15}+19\sqrt{15}-60}{19-4\sqrt{15}}\right)=4\left(\frac{35\sqrt{15}-135}{19-4\sqrt{15}}\right)$ $\begin{array}{l} 35\sqrt{15}-135<0 \\ 14-4\sqrt{15}>0 \end{array}$ $\Rightarrow D<0 \Rightarrow \varnothing$

Ответ: $x=\pm1$
$y=\pm1$