Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006846**

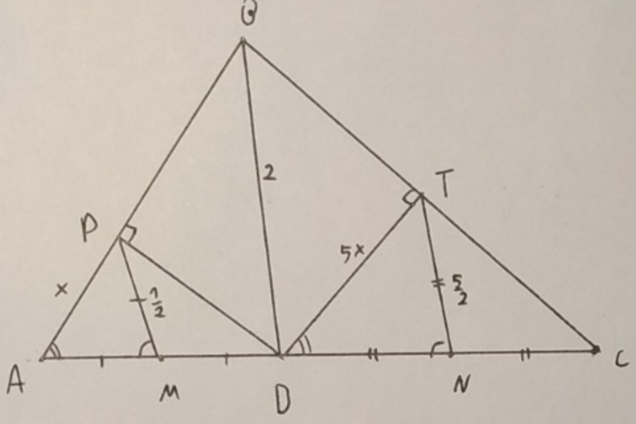
ID профиля: **318207**

Вариант 9

Вариант 9

Чистовик 1

Задача 1.



ΔABC, $D \in AC$, окр ω с диам. BD, $\omega \cap AB = P$, $\omega \cap BC = T$, M – серед. AD, N – серед. CD, $PM \parallel TN$; $MP = \frac{1}{2}$; $NT = \frac{5}{2}$; $BD = 2$ | $\angle ABC$ – ? S_{ABC} – ?

а) Так как $\angle BPD$ и $\angle BTD$ опираются на диаметр, то они прямые. В ΔABD и ΔDTC $\angle APD = 90°$, $\angle DTC = 90°$ соответственно; PM и TN – медианы из прямого угла $\Rightarrow PM = \frac{AD}{2} = AM$; $TN = \frac{DC}{2} = DN$.

Так как $PM \parallel TN$, то $\angle PMA = \angle TND$ как соответственные. $\Delta AMP \sim \Delta DNT$ по двум подобным сторонам и углу между ними $\Rightarrow \angle PAD = \angle TDC$. $\angle PDA = 180° - \angle APD - \angle PAD = 90° - \angle PAD$; $\angle PDT = 180° - \angle ADP - \angle CDT = 90° + \angle PAD - \angle TDC = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ABC = 360° - \angle BTD - \angle BPD - \angle PDT = 90°$.

б) $\Delta APD \sim \Delta DTC$ по двум углам $\Rightarrow \frac{DT}{AP} = \frac{DC}{AD} = \frac{2TN}{2PN} = \frac{TN}{PM} = 5$. Обозначим $AP = x$. Тогда $DT = 5x$. Из ΔBTD $BT = \sqrt{BD^2 - DT^2} = \sqrt{4 - 25x^2} = PD$ (по св-ву прямоугольника);
В ΔAPD: $AD^2 = AP^2 + PD^2$; $1 = x^2 + 4 - 25x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{4}$. $PD = \sqrt{4 - 25x^2} = \frac{\sqrt{14}}{4}$.
$AB = AP + PB = AP + DT = 6x$; $BC = BT + TC = PD + 5PD$ (из подобия) $= 6PD = \frac{3\sqrt{14}}{2}$, $\angle ABC = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{14}}{2} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$.

Ответ: а) $\angle ABC = 90°$; б) $S_{ABC} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$.

211006846 (U318207 M1275952)

Чистовик ②

Вариант 9

Задача 2.

О.Д.З: $\begin{cases} x+4\geq 0 \\ 6-x\geq 0 \\ 24+2x-x^2\geq 0 \end{cases} \iff -4\leq x\leq 6$

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$$

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{(6-x)(x+4)}$$

$$\sqrt{x+4}+4=\sqrt{6-x}\cdot(1+2\sqrt{x+4})$$

$$x+4+8\sqrt{x+4}+16=(6-x)\cdot(1+4\sqrt{x+4}+4(x+4))$$

$$x+20+8\sqrt{x+4}=102+24\sqrt{x+4}+24x-17x-4x^2-4x\sqrt{x+4}$$

$$4x^2-6x-82=\sqrt{x+4}\cdot(16-4x)$$

$$16x^4-48x^3+36x^2-656x^2+984x+6724=(x+4)(256-128x+16x^2)$$

$$16x^4-64x^3-556x^2+1240x+5700=0$$

$$4x^4-16x^3-139x^2+310x+1425=0$$

$$(x-5)(4x^3+4x^2-119x-285)=0$$

$$(x-5)(x+3)(4x^2-8x-95)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-3 \\ x=1\pm\frac{3\sqrt{11}}{2} \end{array}\right.$$ не являются решением исходного уравнения

Ответ: 5

Чистовик ③ Вариант 9

Задача 3.

Найдем координату точки В:

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$

$y=x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}$ $(a\neq0)$

$x_B=\frac{-2a}{2\cdot1}=-a$

$y_B=x_B^2+2ax_B+a^2+\frac{1}{a}=a^2-2a^2+a^2+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$

$B\left(-a;\frac{1}{a}\right)$

Пусть координаты точки $A(x_A;y_A)$. Тогда для того, чтобы эти точки лежали по разные стороны от прямой $y=3x-4$, должна выполняться система неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{1}{a}<-3a-4\\ y_A>3x_A-4\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{1}{a}>-3a-4\\ y_A<3x_A-4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{3a^2+4a+1}{a}<0\\ y_A>3x_A-4\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{3a^2+4a+1}{a}>0\\ y_A<3x_A-4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{(3a+1)(a+1)}{a}<0\\ y_A>3x_A-4\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{(3a+1)(a+1)}{a}>0\\ y_A<3x_A-4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{3};0\right)\\ y_A>3x_A-4\end{cases}\\ \begin{cases}a\in\left(-1;-\frac{1}{3}\right)\cup(0;+\infty)\\ y_A<3x_A-4\end{cases}\end{array}\right.$$

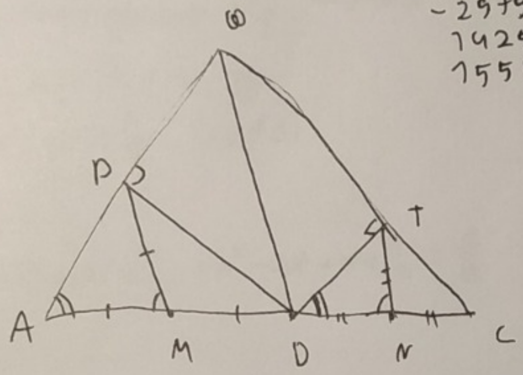
Откуда можно найти значения параметра a.

Черновик

$4\cdot 5^4 - 16\cdot 5^3 + 139\cdot 25 + 310\cdot 5 + 1425$

$2500 - 2000 + 3475$ $\quad 324 - 432 - 1251 + 930 +$

500



-2975
1425
1550

3975

2850
1425

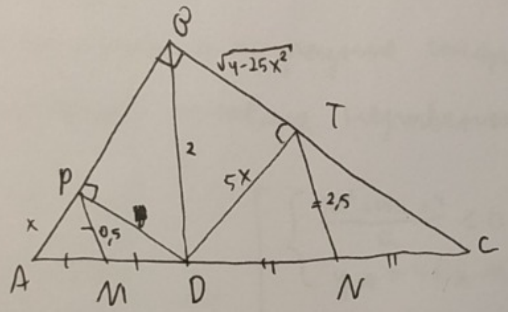
16·27
$4\cdot 81 -$ ... $- 139\cdot 9 +$
$+ 930 +$

6724
1024
5700

278
139

139
25
695
278
3475

990
250
1240



$AC = 6$

1390
139
1251

$x^2 + 4 - 25x^2 = 1$

$24x^2 = 3$

$x^2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$

620 + 64

556

27
16
162
27
432

$PD^2 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ $\quad PD = \frac{\sqrt{14}}{4}$

$x - y + 4 = 2xy$

$6x \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{9\sqrt{14}}{\sqrt{8}} = \frac{9\sqrt{7}}{2}$

$\frac{9}{2}\cdot\frac{5}{2} = \frac{45}{4} =$
$4{,}5 \cdot 2{,}5$
$6 \cdot 2$

$\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{y} = 2x$

$\sqrt{x+4}\cdot(1 - 2\sqrt{6-x}) = \sqrt{6-x} - 4$

82
82
164
656
6724

328
656

$3 - 1 + 4 = 2\cdot 3$

$y - z + 4 = 2yz$

$x = 3$

480
12
492
984

$y(1 - 2z) = z - 4$

$128 - 64$

~~$1 - 4 + 3 = 2\cdot 3$~~

$y = \frac{z-4}{1-2z}$

$17 + 4x + 4\sqrt{x+4}$

211006846 (U318207 M1275952)

$4x^4-76x^3-135x^2+310x+1425 \,|\, x-5$

$4x^3+4x^2-119x-285$

$4x^4-20x^3$

$4x^3-135x^2$

$4x^3-20x^2$

$-119x^2+310x$

$-119x^2+595x$

$-285x+1425$

1000
300

$500+$

$4\cdot 243+4\cdot 49-119\cdot 7-285$

57
19
3

$3\cdot 19\cdot 5$

$4x^3+4x^2-119x-285 \,|\, x+3$

$4x^2-8x$

$4x^3+12x^2$

$-8x^2-24x$

$-95x$

$4\cdot 7{,}5^3+4\cdot 7{,}5^2-119\cdot 7{,}5-285$

$7{,}5\cdot 225+225-7{,}5\cdot 119-285$

$7{,}5\cdot 106-60$

$\sqrt{5\mp\frac{3\sqrt{11}}{2}}-\sqrt{5\pm\frac{3\sqrt{11}}{2}}=3$

$-108+36+357-285$

72

$\sqrt{5+\frac{3\sqrt{11}}{2}}-\sqrt{5-\frac{3\sqrt{11}}{2}}=3$

$x^2-2x-\frac{95}{4}=0$

$\sqrt{5\pm\frac{3\sqrt{11}}{2}}-\sqrt{5\mp\frac{3\sqrt{11}}{2}}+4=$

$x=1\pm\sqrt{1+\frac{95}{4}}=1\pm\frac{3}{2}\sqrt{11}$

$=2\sqrt{25-\frac{99}{4}}=1.$

11

$\frac{10}{3}\cdot\frac{10}{3}=\frac{100}{9}>11=\frac{99}{9}$

$3{,}3\cdot\frac{3}{2}$

3,3
3,3
99
99
10 89

3,3
1,5
16 5
33
4,95

$5+\frac{3\sqrt{11}}{2}+5-\frac{3\sqrt{11}}{2}+2\sqrt{\frac{1}{4}}=9$

$\frac{9\cdot 11}{4}$

$\frac{a^2}{4}+\frac{1}{a}>-\frac{3}{2}a-4$

$5+\frac{3\sqrt{11}}{2}$ – не могу.

$\sqrt{10}+4=$

$26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$

$x_1=\frac{-6+\sqrt{\ldots}}{2a}$ $x_2=\frac{-6+\sqrt{\ldots}}{2a}$

$ax^2+2a^2x+a^3+1=ay$

$y=x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}$

$x_B=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-26}{4a}=\frac{-6}{2a}$

$x_B\,\frac{-2a}{4}=-\frac{a}{2}$

$y=3x-4$

$y_B=\frac{a^2}{4}-a^2+a^2+\frac{1}{a}=\frac{a^2}{4}+\frac{1}{a}$

$4y^2 + y(8x - 20a) + 5x^2 - 22ax + 26a^2 = 0$

$a^2 - 22ax + 121x^2$

$25a^2 - 20ay + 4y^2$

$-116x^2 + 8xy$

$(a - 11x)^2 + (5a - 2y)^2 - 8x(y-$

5,5
5,5
275
275
3025

x,y y,a x,a
4, 10, 11

a x y
26, 5, 4

$a^2 - 22ax + 5x^2 + 8xy$

$\frac{11}{\sqrt{5}} \cdot a$ $\sqrt{5} \cdot x$

$\frac{121}{5} = 24{,}2$

25

$y = 3x - 4$

$\frac{1}{a} = -3a - 4$

$-$ $+$ $-$ $+$

-1 $-\frac{1}{3}$ 0

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006846**

ID профиля: **318207**

Вариант 9

Чистовик 1 Вариант 9

Задача 4

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

О.Д.З.: $x^2+y^2 \ne 0$; $\begin{cases} x \ne 0 \\ y \ne 0 \end{cases}$

Введем $p = x+y$, $q = xy$. Тогда $x^2+y^2 = p^2-2q$;

$$\begin{cases} \frac{2}{p^2-2q} + q^2 = 2 \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{(p^2-2q)^2} = (2-q^2)^2 \\ (p^2-2q)^2 = 5-q^2 \end{cases}$$

$$4 = (4-4q^2+q^4)(5-q^2)$$

$$q^6 - 9q^4 + 24q^2 - 16 = 0$$

$$(q^2-1)(q^4-8q^2+16) = 0$$

$$(q^2-1)(q^2-4)^2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} q=1 \\ q=-1 \\ q=2 \\ q=-2 \end{array}\right.$$

$$p^2-2q = \pm\sqrt{5-q^2}$$

$$p = \pm\sqrt{2q \pm \sqrt{5-q^2}}$$

q	p
1	0 ; ± 2
-1	0
2	$\pm\sqrt{3}$; $\pm\sqrt{5}$
-2	—

Мы получили новую систему:

$\begin{cases} x+y=0 \\ xy=1 \end{cases}$ — нет решений

$\begin{cases} x+y=\pm 2 \\ xy=1 \end{cases}$ — $(-1;-1)$; $(1;1)$

$\begin{cases} x+y=0 \\ xy=-1 \end{cases}$ — $(-1;1)$; $(1;-1)$

$\begin{cases} x+y=\pm\sqrt{3} \\ xy=2 \end{cases}$ — нет решений

$\begin{cases} x+y=\pm\sqrt{5} \\ xy=2 \end{cases}$ — нет решений

Ответ: $(-1;-1)$; $(-1;1)$; $(1;-1)$; $(1;1)$.

Чистовик 2 Вариант 9

Задача 5

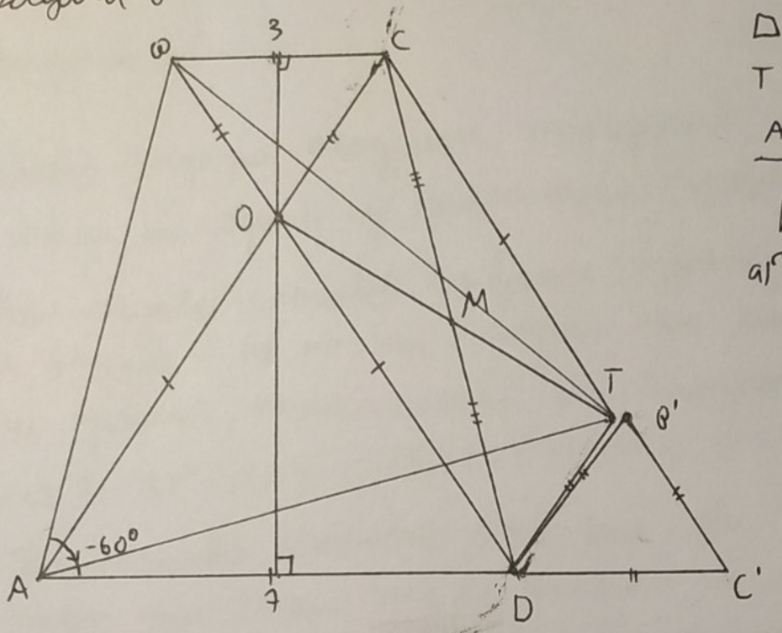
Всего внутри квадрата находится 58^2 узлов, из них $58 \cdot 2$ лежат на одной из диагоналей (прямых $y=x$ или $y=59-x$).
Количество способов выбрать один из узлов на диагонали, а второй - не на ней, чтобы при этом они не лежали на прямой, параллельной оси координат — $58 \cdot 2 \cdot (57^2-(58 \cdot 2-3)) =$
$= 58 \cdot 2 \cdot (57^2 - 58 \cdot 2 + 3) = 58 \cdot 2 (57^2 - 2 \cdot 57 + 1) = 58 \cdot 2 (57-1)^2 = 58 \cdot 2 \cdot 56^2$.
Количество способов выбрать два узла на диагоналях, чтобы при этом они не лежали на прямой, параллельной оси координат — $\frac{58 \cdot 2 \cdot (58 \cdot 2-3)}{2} = 58 \cdot (58 \cdot 2 - 3)$. Итого способов
$58 \cdot 2 \cdot 56^2 + 58 \cdot (58 \cdot 2 - 3) = 58 \cdot (2 \cdot 56^2 + 56 \cdot 2 + 1) = 58 \cdot (56^2 + 57^2)$

Ответ: $58 \cdot (56^2+57^2)$

Чистовик ③

Вариант 9

Задача 6



$\triangle ABCD$, $AC \cap BD = O$; $\triangle BOC$, $\triangle AOD$ — прав; T симм. O отн. серед. CD, $BC=3$, $AD=7$

ABT — прав.? $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ — ?

~~Решение~~

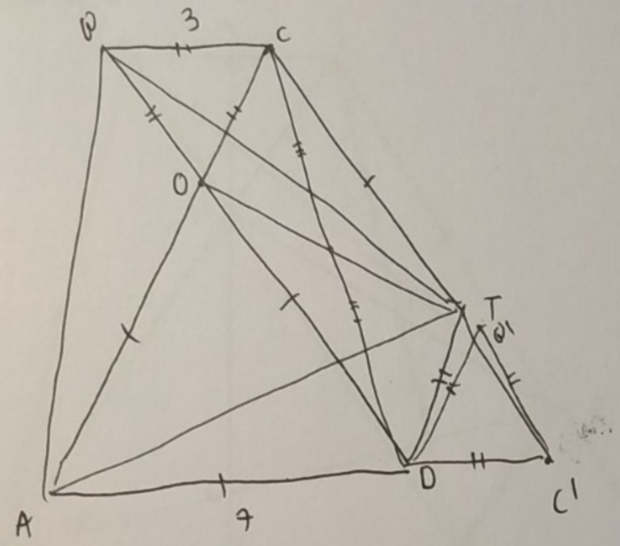
а) Пусть $DC \cap OT = M$. По условию $CM = MD$, $OM = MT \Rightarrow OCTD$ — параллелограмм $\Rightarrow DT = OC$; $DT \parallel OC$; $\angle CAD = 60^\circ$ (из $\triangle AOD$) $\Rightarrow \angle TDC' = 60^\circ$. Сделаем поворот с центром в точке A на -60°. Тогда точка O перейдет в точку D ($\angle OAD = 60^\circ$, $AO = AD$); точка C перейдет в точку $C' \in$ прямой AD ($\angle CAD = 60^\circ$), $C'D = CO$; точка B перейдет в точку B', $B'D = BO$, $B'C' = BC \Rightarrow \triangle B'DC'$ — прав. $\Rightarrow \angle BDC' = 60^\circ$. Но тогда точка B' совпадет с точкой $T \Rightarrow AT = AB$; а так как мы делали поворот на -60°, то $\angle BAT = 60^\circ \Rightarrow \triangle BAT$ — правильный.

б) $\angle CBD = 60^\circ = \angle ODA \Rightarrow BC \parallel AD \Rightarrow ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC. Высота этой трапеции равна сумме высот $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ и равна $\sqrt{7^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2} + \sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 10\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2}\cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$. По теореме косинусов в $\triangle ADB$ $AT = \sqrt{AD^2+DT^2-2\cdot AD\cdot DT\cdot \cos\angle ADT} = \sqrt{7^2+3^2+2\cdot 7\cdot 3\cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{79}$;

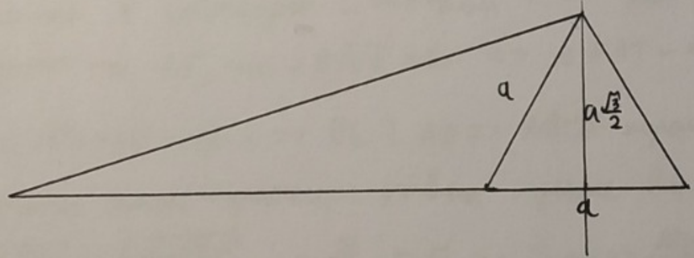
$S_{ATB} = \frac{\sqrt{3}\cdot AT^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{79})^2 \Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{79})^2}{4\cdot 25\cdot\sqrt{3}} = \frac{79}{100} = 0{,}79$

Ответ: б) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = 0{,}79$

Черновик



$49+9+21=79$



$7\frac{\sqrt{3}}{2}+$

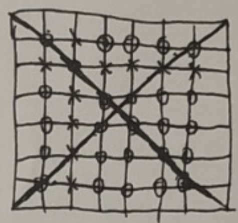
$\frac{\sqrt{3}a}{4}$

211006846 (U318207 M1275953)

Черновик

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

$p = x+y \quad q = xy$



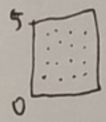
$\underline{6 \cdot 2 - 3 = 9}$

$$\begin{cases} \frac{2}{p^2-2q} + q^2 = 2 \\ (p^2-2q)^2 + q^2 = 5 \end{cases}$$

$58 \cdot 2 - 3$

$$\begin{cases} \frac{4}{(p^2-2q)^2} = (2-q^2)^2 \\ (p^2-2q)^2 = 5-q^2 \end{cases}$$

$(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 5$



58^2

$4 = (4-4q^2+q^4)(5-q^2)$

$q^6 - 9q^4 + 24q^2 - 16 = 0$

$x \pm y = \pm\sqrt{5} \quad xy = 2$

$x(\pm\sqrt{5}-x) = 2$

$x^2 \pm \sqrt{5}x + 2 = 0$

$x = \frac{\pm\sqrt{5} \pm \sqrt{5-8}}{2}$

$q =$

$(q^2-1)(q^4-8q^2+16) = 0$

$(q^2-1)(q^2-4) = 0$

$\left[\begin{array}{l} q = \pm 1 \\ q = \pm 2 \end{array}\right.$

$(1;58) \quad (1;1)$

$\underbrace{(58;1) \quad (58;58)}_{116}$

p	q	
0	-1	$-(1;-1);(-1;1)$
0	-1	$-$ X
± 2	1	$-(1;1);(-1;-1)$
$\pm\sqrt{5}$	2	$-$ X
$\pm\sqrt{3}$	2	$-$ X

$(p^2-2)^2+1=5$

$(p^2+2)^2+1=5$

$(p^2-4)^2+4=5$

$(p^2+4)^2+4=5$

$p^2 \pm 2 = \pm 2$

$p^2-2 = \pm 2$

~~$p^2 \pm 4 = \pm 1$~~

$p^2-4 = \pm 1$

116

$58 \cdot 2 \cdot 57^2 = 58 \cdot (2 \cdot 57 - 1)$

$= 58 \cdot (57^2 + \underbrace{57^2 + 2 \cdot 57 + 1}_{56^2})$

$\pm\sqrt{2 \pm 2} \quad 0, \pm 2$

$\pm\sqrt{-2 \pm 2}$

$\pm\sqrt{4 \pm 1}$

211006846 (U318207 M1275953)