Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006803**

ID профиля: **805555**

Вариант 9

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{24+2x-x^2}=3\\ \sqrt{24+2x-x^2}=\frac{1}{2}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}24+2x-x^2=9\\ 24+2x-x^2=\frac{1}{4}\end{array}\right.$$

Черновик

$$\begin{array}{r}24\\ -\ 9\\ \hline 15\end{array}$$

$15+2x-x^2=0$

$x^2-2x-15=0$

$D=4+4\cdot 15=64$

$x_1=\frac{2+8}{2}=5\in ОДЗ$

$x_2=\frac{2-8}{2}=-\frac{6}{2}=-3\in ОДЗ$

$$\begin{array}{r}23\\ \times\ 4\\ \hline 92\\ +\ 3\\ \hline 95\end{array} \qquad \begin{array}{r}95\\ \times\ 16\\ \hline 570\\ 95\\ \hline 1520\end{array}$$

$23\frac{3}{4}+2x-x^2=0$

$\frac{95}{4}+\frac{8x}{4}-\frac{4x^2}{4}=0$

$95+8x-4x^2=0$

$4x^2-8x-95=0$

$D=\cancel{64}\ \ =1520$

$x_1=\frac{8+4\sqrt{95}}{8}=1+\frac{\sqrt{95}}{2}$

$x_2=\frac{8-4\sqrt{95}}{8}=1-\frac{\sqrt{95}}{2}$

$10>\sqrt{95}>9$

$5>\frac{\sqrt{95}}{2}>4{,}5$

$6>\frac{\sqrt{95}}{2}+1>5{,}5\in ОДЗ$

$$\begin{array}{r|l}1520 & 4\\ -12 & 380\\ 32 & \\ -32 & \\ 0 & \\ -0 & \\ 0 & \end{array}$$

$1520=4\cdot 95\cdot 4$

$$\begin{array}{r|l}380 & 4\\ -36 & 95\\ 20 & \\ -20 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l}95 & 5\\ -5 & 19\\ 45 & \\ -45 & \\ 0 & \end{array}$$

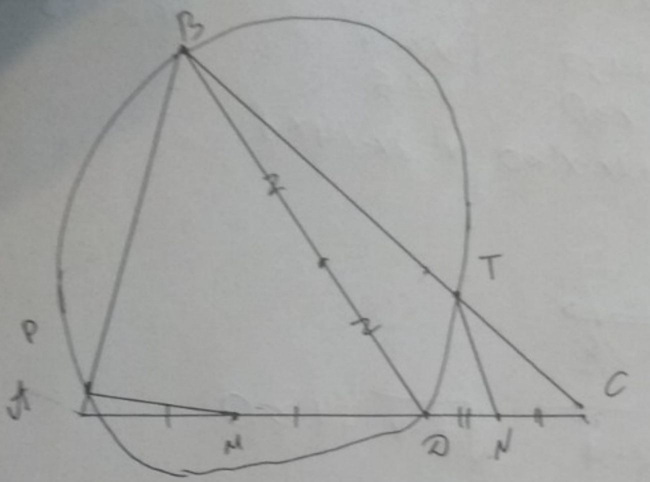
$$\begin{array}{r}95\\ \times 16\\ \hline 570\\ +95\\ \hline 1520\\ +\ \ 64\\ \hline 1584\end{array} \qquad \begin{array}{r}24\\ -\ 9\\ \hline 15\end{array}$$

$24-9=$

Чернова

3

Черновик



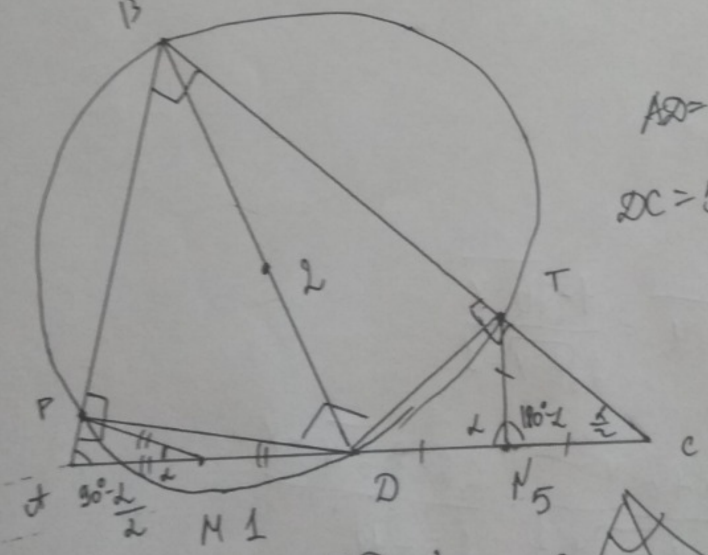
$PM \parallel TN$

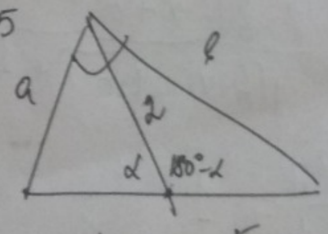
$TN \parallel PM$

1
25
+ 8
33
+ 1
34

$AD = 1$

$DC = 5$





$MP = \frac{1}{2}$ $NT = \frac{5}{2}$ $BD = 2$

$a^2 + b^2 = 36$

$\cancel{4+1-2\cdot 4\cos\alpha}$ $4+1-\cancel{2\cdot 2\cdot 1\cos\alpha}+4+25+\cancel{2\cdot 2\cdot 5\cos\alpha} = 36$

$-4\cos\alpha + 20\cos\alpha = 2$

Чистовик Математика 10

№1

$$1 = \sin^2\beta + \cos^2\beta$$

$$1 = \sin^2\beta + \frac{1}{64}$$

$$\frac{63}{64} = \sin^2\beta$$ ~~β-острый~~ $\beta \in [0; 180^\circ] \Rightarrow \sin\beta > 0$

$$\frac{3\sqrt{7}}{8} = \sin\beta$$

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{BDC} = \frac{1}{2} BD \cdot AD \sin\beta + \frac{1}{2} BD \cdot DC \cdot \underbrace{\sin(180^\circ - \beta)}_{=\sin\beta} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} + \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2} \cdot 5 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = 6 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = 3 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{4} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$$

Ответ: $\cancel{\frac{9\sqrt{7}}{4}}$ а) $\angle ABC = 90^\circ$; б) $S_{ABC} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$

Исаевич Математика, 10

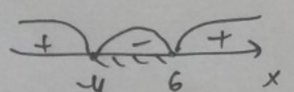
№2

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$

Заметим, что $24+2x-x^2=(x+4)(6-x)$

ОДЗ: $\begin{cases} x+4\geq 0 \\ 6-x\geq 0 \\ 24+2x-x^2\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -4 \\ x\leq 6 \\ x^2-2x-24\leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -4 \\ x\leq 6 \\ (x+4)(x-6)\leq 0 \end{cases}$

$x^2-2x-24\leq 0$



$\left.\begin{cases} x\in[-4;6] \\ x\geq -4 \\ x\leq 6 \end{cases}\right\} \Rightarrow$ ОДЗ: $x\in[-4;6]$

пусть $t=\sqrt{x+4}$; $q=\sqrt{6-x}$, тогда $tq=\sqrt{24+2x-x^2}$

$t-q+4=2tq$

$t-q=2tq-4 \Rightarrow (t-q)^2=(2tq-4)^2$

$t^2-2tq+q^2=4t^2q^2-16tq+16$

$t^2+q^2=4t^2q^2-14tq+16$ $\left.\begin{matrix} t^2=x+4 \\ q^2=6-x \end{matrix}\right\} \Rightarrow t^2+q^2=10$

$10=4t^2q^2-14tq+16$

$4t^2q^2-14tq+6=0$, пусть $z=tq$

$4z^2-14z+6=0$

$2z^2-7z+3=0$

$D=49-24=25$

$z_1=\frac{7+5}{4}=\frac{12}{4}=3$

$z_2=\frac{7-5}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Обратная замена

3

Числови Математика, 10

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$

т.к. это функция парабола $\Rightarrow a\neq 0$

$ax^2+2a^2x+a^3+1=ay \quad |:a$

$x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}=y$

$x_{верш}=\frac{-2a}{2}=-a$

$y_{верш}=a^2-2a^2+a^2+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$

$B(-a;\frac{1}{a})$

$26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$ (*)

$4y^2+y(8x-20a)+5x^2-22ax+26a^2=0$

$D=64x^2-320a+400a^2-16(5x^2-22ax+26a^2)=$

$=64x^2-320a+400a^2-80x^2+352ax-416a^2=$

$=64x^2-320a+400a^2$ т.к. это ур-ние (*)

$=-16x^2+32ax-16a^2$ должно иметь только одну пару решений (точка A) $\Rightarrow -16x^2+32ax-16a^2=0$

$x^2-2ax+a^2=0$ ~~...2x=-a~~

$(x-a)^2=0 \quad x=a$

$y_1=\frac{-8x+20a}{8}=\frac{12a}{8}=\frac{3}{2}a=1{,}5a$, значит А имеет координаты

$A(a;1{,}5a)$

$3x-y=4$

$3x-4=y$

7

Шеляпин Максимович, 10

№2

$\sqrt{5+\frac{3\sqrt{11}}{2}} - \sqrt{5+\frac{3\sqrt{11}}{2}} = -3 < 0$, но $\sqrt{5+\frac{3\sqrt{11}}{2}} > \sqrt{5-\frac{3\sqrt{11}}{2}}$ т.к. $y=\sqrt{x}$ — возрастающая функция. противоречие. Значит $x = 1+\frac{3\sqrt{11}}{2}$ — не корень

4) $x = 1-\frac{3\sqrt{11}}{2}$

$$\sqrt{5-\frac{3\sqrt{11}}{2}} - \sqrt{5+\frac{3\sqrt{11}}{2}} + 4 = 2\sqrt{\left(5-\frac{3\sqrt{11}}{2}\right)\left(5+\frac{3\sqrt{11}}{2}\right)} = 1$$

$\sqrt{\frac{2\cdot5-3\sqrt{11}}{2}} - \sqrt{\frac{2\cdot5+3\sqrt{11}}{2}} = -3$ | возведем в квадрат т.к. обе части отрицательны, т.к. $-3<0$ и $\sqrt{\frac{2\cdot5-3\sqrt{11}}{2}} < \sqrt{\frac{2\cdot5+3\sqrt{11}}{2}}$ т.к. $y=\sqrt{x}$ — возрастающая функция.

$$\left(5-\frac{3\sqrt{11}}{2}\right) + \left(5+\frac{3\sqrt{11}}{2}\right) - 2\cdot\sqrt{\left(5-\frac{3\sqrt{11}}{2}\right)\left(5+\frac{3\sqrt{11}}{2}\right)} =$$

$$= 10 - 1 = 9 = (-3)^2 \Rightarrow x = 1-\frac{3\sqrt{11}}{2}$$ — корень

Ответ: 5; $1-\frac{3\sqrt{11}}{2}$

Черновик

$\Rightarrow (-a; \frac{1}{a})$

$26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

$4y^2 + y(8x - 20a) + 5x^2 - 22ax + 26a^2 = 0$

$16 \times 5 = 80$

$\frac{4}{1{,}5} = \frac{8}{3}$

$22 \times 16 = 132 + 22 = 352$

$3a^2 + 4a + 1 = 0$

$D = 16 - 12 = 4$

$x_1 = \frac{-4+2}{6} = -\frac{1}{3}$

$x_2 = \frac{-4-2}{6} = -1$

16

$26 \times 16 = 156 + 26 = 416$

$80 - 64 = 16$

211006803 (U805555 M1274914)

Черновик

$1-\frac{3\sqrt{11}}{2} \vee -4$

$-\frac{3\sqrt{11}}{2} \vee -5$

$\frac{3\sqrt{11}}{2} \wedge 5$

$3\sqrt{11} \wedge 10$

$9\cdot 11 \wedge 100$

Проверим:

$\sqrt{5+4}-\sqrt{6-5}+4=2\sqrt{5+4}\sqrt{6-5}$

$3-1+4=2\cdot 3\cdot 1$ верно

$\sqrt{4-3}-\sqrt{9}+4=2\sqrt{9}\cdot\sqrt{1}$

$1-3+4=2\cdot 3=6$

$2=6$ – неверно

$\sqrt{5+\frac{3\sqrt{11}}{2}}-\sqrt{5-\frac{3\sqrt{11}}{2}}=2\cdot\sqrt{5+\frac{3\sqrt{11}}{2}}\sqrt{5-\frac{3\sqrt{11}}{2}}$

$=2\sqrt{5+\frac{3\sqrt{11}}{2}}\sqrt{5-\frac{3\sqrt{11}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\left(5+\frac{3\sqrt{11}}{2}\right)\left(5-\frac{3\sqrt{11}}{2}\right)=25-\frac{9\cdot 11}{4}=\frac{1}{4}\cdot 2=\frac{1}{2}$

$5+\cancel{\frac{3\sqrt{11}}{2}}-2\sqrt{5+\frac{3\sqrt{11}}{2}}\sqrt{5-\frac{3\sqrt{11}}{2}}+5-\cancel{\frac{3\sqrt{11}}{2}}=2$

$10-\sqrt{2}=2$ – неверно

$$\begin{array}{r|l} 1584 & 4 \\ -12 & 396 \\ 38 & \\ -36 & \\ 24 & \\ -24 & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 396 & 4 \\ -36 & 99 \\ 36 & \\ -36 & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1584 & 4 \\ -12 & 396 \\ 38 & \\ -36 & \\ 24 & \\ -24 & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 396 & 4 \\ -36 & 99 \\ 36 & \\ -36 & \\ 0 & \end{array}$$

Черновик

$t=\sqrt{x+4}$

$q=\sqrt{6-x}$

$z=tq$

$t-q+4=2tq$

$t-q \cancel{+4}=2tq-4$

$t^2-2tq+q^2=4t^2q^2-16tq+16$

$t^2+q^2=4t^2q^2-14tq+16$

$\cancel{x+4+x-4}$

$\cancel{x}+4+6-\cancel{x}=4t^2q^2-14tq+16$

$4t^2q^2-14tq+6=0$

$4z^2-14z+6=0$

$\cancel{2z}$ $2z^2-7z+3=0$

$D=49-24=25$

$z_1=\frac{7+5}{4}=3$

$z_2=\frac{7-5}{4}=\frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{24+2x-x^2}=3\\ \sqrt{24+2x-x^2}=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$24+2x-x^2=9$

$15+2x-x^2=0$

$x^2-2x-15=0$

$D=4+60=64$ корни

$\boxed{x_1=\frac{2+8}{2}=5\in ОДЗ}$

$\boxed{x_2=\frac{2-8}{2}=-3\in ОДЗ}$

$$\begin{array}{r}\times\begin{array}{r}95\\16\end{array}\\ \hline 570\\ 95\\ \hline 1520\end{array}\qquad\begin{array}{r}1520\\ +\ 64\\ \hline 1584\end{array}$$

$\sqrt{24+2x-x^2}=\frac{1}{2}$

не корень

$24+2x-x^2=\frac{1}{4}$

$96+8x-4x^2=1$

$95+8x-4x^2=0$

$4x^2-8x-95=0$

$D=\cancel{64}+64+1520=1584=$

$=4\cdot 396=4\cdot 4\cdot 9\cdot 11=$

$=4^2\cdot 3^2\cdot 11$

$\boxed{x_1=\frac{8+\cancel{12}\sqrt{11}}{8}=1+\frac{3\sqrt{11}}{2}}\in ОДЗ$

$\boxed{x_2=1-\frac{3\sqrt{11}}{2}\in ОДЗ}$

$4>\sqrt{11}>3$

$2>\frac{\sqrt{11}}{2}>1{,}5$

$6>\frac{3\sqrt{11}}{2}>4{,}5$

$\frac{3\sqrt{11}}{2}$ 6

$3\sqrt{11}$ 12

$7>\frac{3\sqrt{11}}{2}>5{,}5$

$9\cdot 11<144$

Чистовик Математика 10

$3\sqrt{11} \vee 10$

$99 \vee 100$

$99 < 100 \Rightarrow \frac{3\sqrt{11}}{2} + 1 \in ОДЗ$

$1 - \frac{3\sqrt{11}}{2} \vee -4$

$-\frac{3\sqrt{11}}{2} \vee -5$

$\frac{3\sqrt{11}}{2} \wedge 5$

$\frac{3\sqrt{11}}{2} < 5$

$1 - \frac{3\sqrt{11}}{2} > -4 \Rightarrow 1 - \frac{3\sqrt{11}}{2} \in ОДЗ.$

Проверка:

1) $x = 5$

$\sqrt{5+4} - \sqrt{6-5} + 4 = 2 \cdot \sqrt{24 + 2 \cdot 5 - 5^2} = 2 \cdot \sqrt{5+4}\sqrt{6-5}$

$\sqrt{9} - \sqrt{1} + 4 = 2 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{1}$

$3 - 1 + 4 = 2 \cdot 3$

$6 = 6$ – верно $\Rightarrow x_1$ – корень (5)

2) $x = -3$

$\sqrt{-3+4} - \sqrt{6+3} + 4 = 2\sqrt{4-3}\sqrt{6+3}$

$\sqrt{1} - \sqrt{9} + 4 = 2\sqrt{1}\sqrt{9}$

$1 - 3 + 4 = 3 \cdot 2$

$2 = 6$ – неверно $\Leftrightarrow x = -3$ – посторонний корень

3) $x = 1 + \frac{3\sqrt{11}}{2}$

$\sqrt{5 + \frac{3\sqrt{11}}{2}} - \sqrt{5 - \frac{3\sqrt{11}}{2}} + 4 = 2\sqrt{5 + \frac{3\sqrt{11}}{2}}\sqrt{5 - \frac{3\sqrt{11}}{2}} =$

$= 2\sqrt{25 - \frac{99}{4}} = 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

5

211006803 (U805555 M1274914)

$16\cos\alpha = 2$ Черновик

$\cos\alpha = \frac{1}{8}$

$1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$

$ax^2 + 2a^2x + a^3 + 1 = ay$

$x^2 + 2ax + a^2 + \frac{1}{a} = y$

$16 \cdot 5$

$x_{верш} = \frac{-2a}{2} = -a$

$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 5 \\ \hline 80 \end{array}$

$y_{верш} = a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{1}{a}$

$(-a; \frac{1}{a})$ B

$\begin{array}{r} 22 \\ \times 16 \\ \hline 132 \\ 22 \\ \hline 352 \end{array}$

$4y^2 + 8xy + 5x^2 - 20ay - 22ax + 26a^2 = 0$

$4y^2 + y(8x - 20a) + 5x^2 - 22ax + 26a^2 = 0$

$\begin{array}{r} 16 \\ \times 26 \\ \hline 96 \\ 32 \\ \hline 416 \end{array}$

$64x^2 - 360ax + 400a^2 -$

$-16(5x^2 - 22ax + 26a^2) = -80$

$64x^2 - 360ax + 400a^2 - 80x^2 + 352ax - 416a^2 =$

$= -16x^2 - 8ax - 16a^2 = 8(x^2 + ax + a^2) =$

$\begin{array}{r} 80 \\ -64 \\ \hline 16 \end{array}$

$= -8(x^2 + ax + a^2)$

$\begin{array}{r} 360 \\ -352 \\ \hline 8 \end{array}$

$y_{1,2} = \frac{-8x + 20a \pm 2\sqrt{(-2)(x^2 + ax + a^2)}}{8} =$

$=$

211006803 (U805555 M1274914)

$\sqrt{x+4}=t$ Черновик $10=4z^2-4z+16$

$q=\sqrt{6-x}$ $4z^2-4z+6=0$

$tq=\sqrt{24+2x-x^2}$ $2z^2-2z+3=0$

$D=4$

$t-q+4=2tq$

$t-q=2tq-4$ $t-q=2tq-4$

$t^2-2tq+q^2=4t^2q^2-16tq+16$ $t^2-2tq+q^2=4t^2q^2-16tq+16$

$t^2+q^2=4t^2q^2-14tq+16$ $t^2+q^2=4t^2q^2-14tq+16$

$\cancel{x}+4+6\cancel{-x}=4x^2-14x+16$ $\cancel{x}+4+6\cancel{-x}=4(24+2x-x^2)-$

$\cancel{4x^2+14x}$ $4x^2-14x$ $z=\sqrt{24+2x-x^2}$ $-14\sqrt{24+2x-x^2}+16$

$\sqrt{x+4}=t$ $4z^2-14z+6=0$ $\begin{array}{r}7\\ \times 7\\ \hline 49\end{array}$

$\sqrt{6-x}=q$ $2z^2-7z+3=0$

$D=49-4\cdot 3\cdot 2=25$

$t-q+4=2tq$

$\boxed{z_1=\frac{7+5}{4}=3 \quad z_2=\frac{7-5}{4}=\frac{1}{2}}$

$t-q=2tq-4$

$t^2-2tq+q^2=4t^2q^2-16tq+16$

$t^2+q^2=4t^2q^2-14tq+16$

$\cancel{x}+4+6\cancel{-x}=\cancel{4x}$ $4z^2-4z+16$

$tq=z$

211006803 (U805555 M1274914)

Чистовик Математика, 10

№2

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{24+2x-x^2}=3\\ \sqrt{24+2x-x^2}=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

1) $\sqrt{24+2x-x^2}=3 \Rightarrow 24+2x-x^2=9$

$15+2x-x^2=0$

$x^2-2x-15=0$

$D=4+60=64$

$x_1=\frac{2+8}{2}=5 \in ОДЗ$

$x_2=\frac{2-8}{2}=-3 \in ОДЗ$

2) $\sqrt{24+2x-x^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow 24+2x-x^2=\frac{1}{4}$

$96+8x-4x^2=1$

$95+8x-4x^2=0$

$4x^2-8x-95=0$

$D=64+1520=1584=4^2\cdot3^2\cdot11$

$x_3=\frac{8+4\cdot3\sqrt{11}}{8}=1+\frac{3\sqrt{11}}{2}$

$x_4=\frac{2-3\sqrt{11}}{2}=1-\frac{3\sqrt{11}}{2}$

$3<\sqrt{11}<4$

$9<3\sqrt{11}<12$

$4{,}5<\frac{3\sqrt{11}}{2}<6$

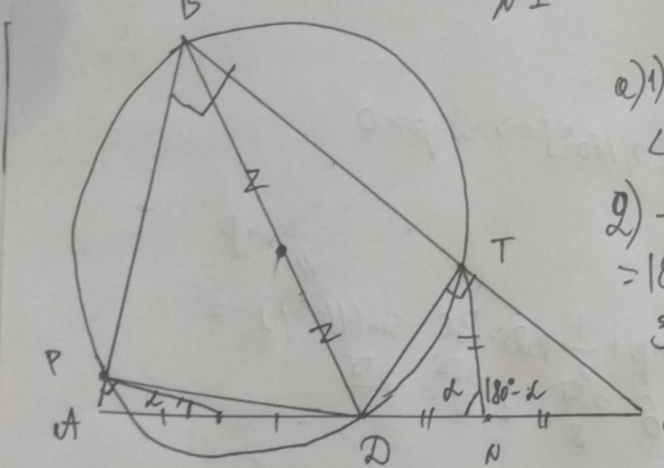
$5{,}5<\frac{3\sqrt{11}}{2}+1<7$

$\frac{3\sqrt{11}}{2}+1 \vee \cancel{\times}\ 6$

$\frac{3\sqrt{11}}{2} \vee 5$

Чистовик Математика, 10

№1



а) 1) т.к. BD - диаметр $\Rightarrow$ $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$

2) т.к. $\angle BPD = \angle BTD = 180^\circ - \angle APD = 180^\circ - \angle DTC = 90^\circ \Rightarrow \angle APD = \angle DTC = 90^\circ$

3) т.к. $\angle APD = \angle DTC = 90^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow PM = \frac{1}{2} AD = AM = MD$ и

$TN = \frac{1}{2} DC = DN = NC$

4) т.к. $PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMA = \angle TND = \alpha$

5) т.к. $\triangle TND$, $\triangle TNC$, $\triangle APM$ и $\triangle PMD$ - равнобедренные $\Rightarrow$

$\angle BAC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ и $\angle TCN = \angle BCA = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle BCA = 90^\circ$

б) 1) $PM = \frac{1}{2} \Rightarrow AD = 1$ и $NT = \frac{5}{2} \Rightarrow DC = 5$ $BD = 2$

2) по т. Пифагора $AB^2 + BC^2 = AC^2 = 6^2 = 36$

из т. косинусов (пусть $\angle BDA = \beta$, тогда $\angle BDC = 180^\circ - \beta$)

$$BD^2 + DA^2 - 2BD \cdot DA\cos\beta = AB^2$$

$$+\ BD^2 + DC^2 + 2BD \cdot DC\cos\beta = BC^2$$

$$2BD^2 + DA^2 + DC^2 + \cos\beta\,(2BD \cdot DC - 2BD \cdot DA) = AB^2 + AC^2 = 36$$

$$2 \cdot 2^2 + 1^2 + 5^2 + \cos\beta\,(2 \cdot 2 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 1) = 36$$

$$8 + 1 + 25 + \cos\beta\,(20 - 4) = 36$$

$\cos\beta \cdot 16 = 2$

$\cos\beta = \frac{1}{8}$ из основного тригонометрического тождества

Черновик

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$$

ОДЗ: $x \in [-4;6]$

$\cancel{24+2x-x^2=0}$

$\cancel{x^2-2x-24}$

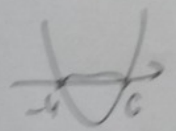
$24 \cdot 4 = 96$

ОДЗ $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \\ 24+2x-x^2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 6 \\ x^2-2x-24 \leq 0 \end{cases}$

$D = 4 + 4 \cdot 24 = 100$

$x_1 = \frac{2+10}{2} = 6$

$x_2 = \frac{2-10}{2} = -4$



$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 \geq 0$

$\sqrt{x+4} \geq -4 + \sqrt{6-x}$

$t - q + 4 = 2tq$

$t = \sqrt{x+4}$

$q = \sqrt{6-x}$

$t - q + 4 = 2tq$

$2tq - t = 4 - q$

$t(2q-1) = 4 - q$

$t = \frac{4-q}{2q-1}$ $\sqrt{x+4} = \frac{4-\sqrt{6-x}}{2\sqrt{6-x}-1}$

$$x+4 = \frac{4^2 - 8\sqrt{6-x} + 6 - x}{4(6-x) - 4\sqrt{6-x} + 1} = \frac{22 - 8\sqrt{6-x} - x}{25 - 4x}$$

$$2t = \frac{8-2q}{2q-1} = -1 + \frac{7}{2q-1}$$

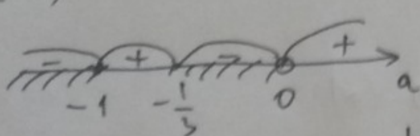
$$2t + 1 = \frac{7}{2q-1}$$

~~Ученик~~ Условие Математика 10

1) предположим, что A лежит выше прямой, а B – ниже

т. е. $\begin{cases} 1{,}5a > 3a-4 \\ \frac{1}{a} < -3a-4 \end{cases}$ $\begin{cases} -1{,}5a > -4 \\ \frac{1+3a^2+4a}{a} < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a < \frac{8}{3} \\ (3a^2+4a+1)a < 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$

(**)



$\begin{cases} a < \frac{8}{3} \\ (a+\frac{1}{3})(a+1)a < 0 \quad (**) \end{cases}$

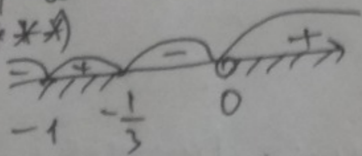
$\boxed{a \in (-\infty; -1] \cup [-\frac{1}{3}; 0)}$

$\begin{cases} a \in (-\infty; -1] \cup [-\frac{1}{3}; 0) \\ a < \frac{8}{3} \end{cases}$

2) Предположим, что A лежит ниже прямой, а B – выше, тогда

$\begin{cases} 1{,}5a < 3a-4 \\ \frac{1}{a} > -3a-4 \end{cases}$ $\begin{cases} 1{,}5a-4 > 0 \\ 0 > -3a-4-\frac{1}{a} \end{cases}$ $\begin{cases} a > \frac{8}{3} \\ \frac{3a^2+4a+1}{a} > 0 \quad (***) \end{cases}$

(***)



$\begin{cases} a \in [-1; -\frac{1}{3}] \cup (0; +\infty) \\ a > \frac{8}{3} \end{cases}$ $a \in (\frac{8}{3}; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [-\frac{1}{3}; 0) \cup (\frac{8}{3}; +\infty)$

8

Часть 2

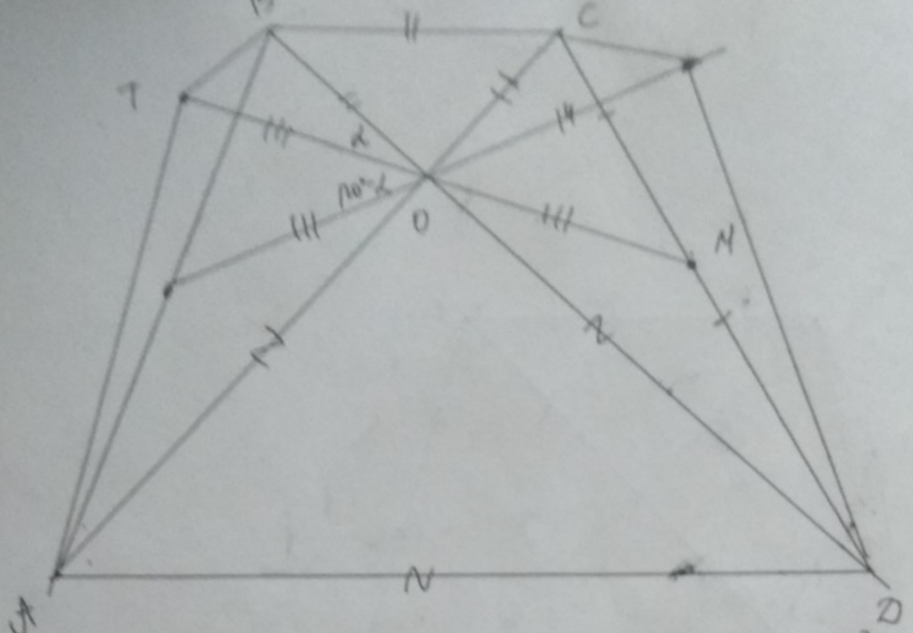
Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006803**

ID профиля: **805555**

Вариант 9

~~Черновик~~ Черновик



$TB^2 = AT^2 =$

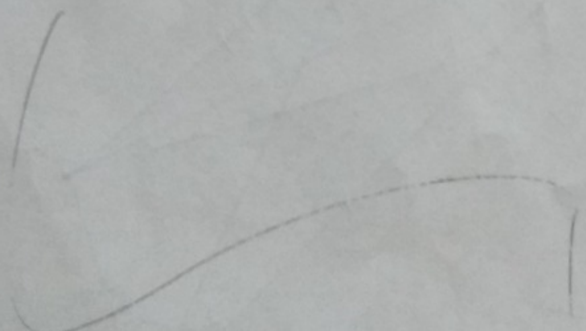
$BO^2 + OT^2 - 2BO\cdot OT\cos\alpha = TB^2$

$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2AO\cdot BO\cdot\cos 120^\circ$

~~BOT~~.

$OT^2 - AO^2 - 2BO\cdot OT\cos\alpha + 2AO\cdot BO\,\cancel{\cos 120^\circ} = 0$

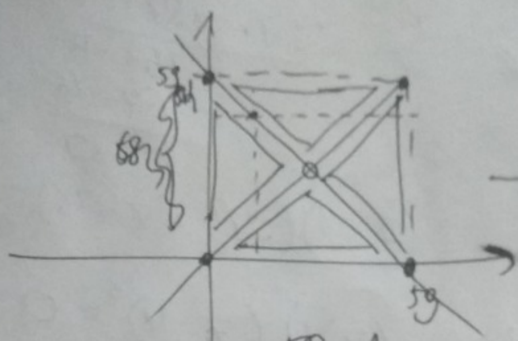
$OT^2 - AO^2 - 2BO\cdot OT\cos\alpha + AO\cdot BO = 0$

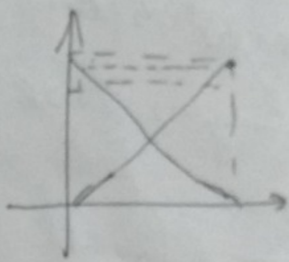


ав = 4

$\frac{2}{a+b} = -2$ невозможно

Чертим





58 · 2

1) Угл

$59 - x = x$

$2x = 59$

$x = \frac{59}{2} \notin \mathbb{Z}$ — не является углом

2 ... 2   1 ... 58

1) Угл на $59-x$; второй угл не на $(59-x)$ и не на $y=x$

$58\cdot 58 - 58 - 58 - 56 - 56$,

$(1;1) \ldots (58;58)$

$2\cdot \underline{58\cdot(58^2-228)} + C_{58}^2\cdot 2 + 58\cdot 56$

$58 \times 2 = 116$

$56 \times 2 = 112$

$112 + 116 = 228$

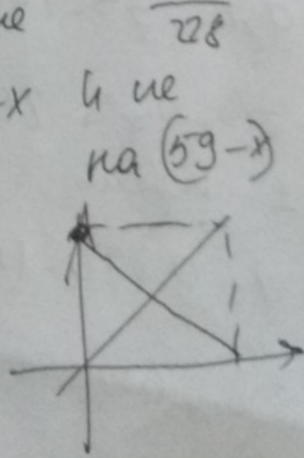
угл на $y=x$; второй угл не на $y=x$ и не на $(59-x)$

угл на $y=x$ и угл не $y=x$

угл не $y=x$ и угл не $59-x$

C_{58}^2

$58\cdot 56$



Числовик Математика 10

№4

$\left[\begin{array}{l} ab=1 \\ ab=4 \end{array}\right.$, подставляя во второе ур-нение системы, получим:

$\frac{2}{a+b}+ab=2$

1) $ab=1$

$\frac{2}{a+b}=1$

$\begin{cases} 2=a+b \\ ab=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2=a+b \\ a=\frac{1}{b} \end{cases}$ $\begin{cases} 2=\frac{1}{b}+b \\ a=\frac{1}{b} \end{cases}$ $\begin{cases} 2b=1+b^2 \\ a=\frac{1}{b} \end{cases}$ $\begin{cases} (b-1)^2=0 \\ a=\frac{1}{b} \end{cases}$

$\begin{cases} b=1 \\ a=1. \end{cases}$ ~~Проверка~~ $\begin{cases} x^2=1 \\ y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$ Проверка показывает, что все эти решения подходят.

2) $ab=4$

$\frac{2}{a+b}=-2$, но $b+a>0$, значит $\frac{2}{a+b}>0$ - противоречие.

Значит $ab=4$ быть не может.

Рассмотрим отдельно случаи $x^2=0$; $y^2=0$; $x^2=0$ и $y^2=0$. Случаи $x^2=0$ и $y^2=0$ аналогичны. Т.к. система симметрична. Пусть, без нарушения общности $x=0$, тогда

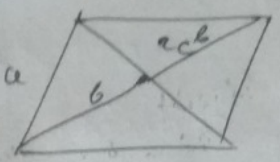
$\begin{cases} \frac{2}{y^2}=2 \\ y^4=5 \end{cases}$ $\begin{cases} 2y^2=2 \\ y^4=5 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2=1 \\ y^4=5 \end{cases}$ - очевидно неверно.

$a^2+b^2-2ab\cos\alpha=c^2$

[illegible]

$c^2-a^2-b^2=-2ab\cos\alpha$

$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\cos\alpha$



$b^2+d^2-2bd\cos\alpha=AT^2$

$b^2+d^2-\cancel{2b}d\frac{a^2+b^2-c^2}{\cancel{2ab}}=AT^2$

$b^2+d^2-d\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{a}=AT^2$

$2a^2+2d^2=4b^2+4c^2$

$\frac{a^2+d^2}{2}=b^2+c^2$

$\cancel{a^2+b}$

$\cancel{b^2}$

$2a^2+2d^2=4b^2+4c^2$

$2a^2+2d^2-4c^2=4b^2$

$\frac{a^2+d^2}{2}-c^2=b^2$

$\frac{a^2+d^2}{2}-c^2-d\cdot\frac{a^2+\frac{a^2+d^2}{2}-c^2-c^2}{2}=AT^2$

$a^2+d^2-2ad\cos 120^\circ=AT^2$

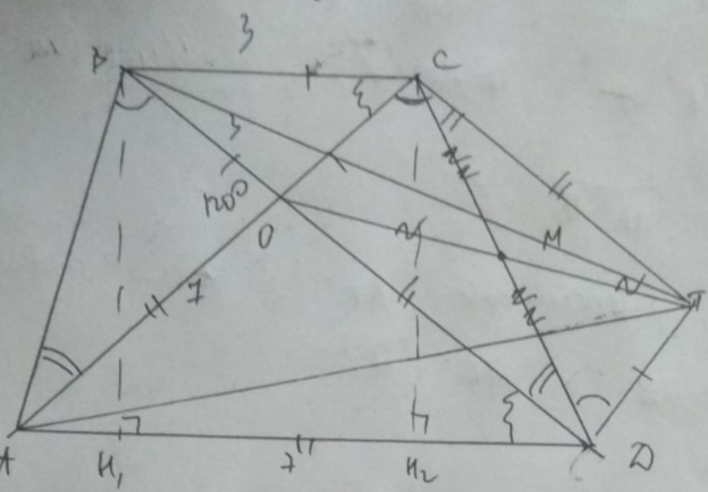
$\cos 120^\circ=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$

$a^2+d^2+ad=\cancel{AT^2}\ c^2$

$\frac{c^2-ad}{2}-c^2-d\cdot\frac{a^2-2c^2+\frac{c^2-ad}{2}}{2a}=$

$=\frac{ac^2-a^2d-ac^2-da^2+2c^2d+\frac{c^2d-ad^2}{2}}{2a}$

Исковин Максимилиан 10



а)

1) $\angle BCA = \angle CAD \Rightarrow BC \parallel AD$

2) $\angle BOA = \angle COA = 120^\circ$ и $BC = CO$ $AO = OD \Rightarrow \triangle BOA = \triangle COD \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABO = \angle OCD$ и $\angle BAO = \angle ODC$

3) $CM = MD$ и $OM = MT \Rightarrow OCTD$ - параллелограм $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CTD = 120^\circ = \angle COD$ $CT = OD = OA$ и $TD = OC = BO \Rightarrow \triangle CTD = \triangle BOA \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABO = CDT$ и $\cancel{\angle BOA} = \angle BAO = \angle DCT$ тогда $\angle BCO = \angle ODA = 60^\circ$

4) $BC = TD$ и $CT = AD$ и $\angle BCT = \angle ADT \Rightarrow \triangle BTC = \triangle ADT$

5) $\angle ACO + \angle DCT = 60^\circ$ (из $\triangle ABO$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BCT = 120^\circ = \angle BOA$ $BO = BC$; $AO = CT \Rightarrow \triangle BCT = \triangle BOA =$

$= \triangle ADT \Rightarrow BT = AB = AT \Rightarrow \triangle ABT$ - р/с $\boxtimes$

б) 1) $S_{ABT} = \frac{\sqrt{3}AB^2}{4}$ 2) Если $\triangle BOC = \triangle AOD \Rightarrow ABCD$ - параллелогр., иначе ~~$\triangle BOC$~~ $ABCD$ - трапеция, но $BC \neq AD$ по условию значит ~~$BC = A$~~ $ABCD$ - трапеция $\triangle ABO = \triangle OCD \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = CD \Rightarrow ABCD$ - равнобокая трапеция

5

Чисовик Математика 10

№4

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases}$$

$\left.\begin{matrix} a=x^2\geqslant 0 \\ b=y^2\geqslant 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+b\geqslant 0 \ (*)$

Замена:

$a=x^2$

$b=y^2$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{a+b}+ab=2 \\ a^2+b^2+3ab=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2}{a+b}+ab=2 \\ (a+b)^2=5-ab \ (**) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{\dfrac{2}{a+b}=2-ab} \\ \cancel{a+b=\sqrt{5-ab}} \text{ с учетом } * \end{cases}$$

~~и того, что~~ $(a+b)^2=5-ab$

$\Downarrow$

$5-ab\geqslant 0$

$\dfrac{2}{a+b}=2-ab$

$\Downarrow$

$\dfrac{4}{(a+b)^2}=(2-ab)^2$

, значит исходную систему можно переписать с учетом $(**)$

$\dfrac{4}{5-ab}=(a^2b^2-4ab+4)$

$4=(5-ab)(a^2b^2-4ab+4) \quad ab=z$

$4=(5-z)(z^2-4z+4)$

$4=5z^2-20z+20-z^3+4z^2-4z$

$-z^3+9z^2-24z+16=0$

$z^3-9z^2+24z-16=0$

Очевидно, что $z=1$ - корень ур-нения. Значит многочлен можно разделить уголком. После деления получим:

$(z-1)(z^2-8z+16)=0$

$(z-1)(z-4)^2=0 \Rightarrow \left[\begin{matrix} z=1 \\ z=4 \end{matrix}\right. \quad \left[\begin{matrix} ab=1 \\ ab=4 \end{matrix}\right.$

$a^2+b^2+2ab=5-ab$ Черпаков

$(a+b)^2=5-ab$

$\frac{2}{a+b}=2-ab$

$\frac{4}{(a+b)^2}=(2-ab)^2$

$\frac{4}{5-ab}=(ab-2)^2$

$ab=z$

$\frac{4}{5-z}=(z-2)^2$

$4=(z^2-4z+4)(5-z)$

$4=5z^2-z^3-\cancel{20z+16}$

$4=\cancel{5z}^2-z^3-20z+\cancel{4z}^2+20-4z$

$4=9z^2-z^3-24z+20$

$9z^2-z^3-24z+16=0$

$z^3-9z^2+24z-16=0$

$z=1$ – корень

$1-9+24-16$

$-8-16$

$$\begin{array}{l|l} z^3-9z^2+24z-16 & z-1 \\ \hline -\,z^3-z^2 & z^2-8z+16 \\ \quad -8z^2+24z & \\ \quad -\,-8z^2+8z & \\ \qquad 16z-16 & \\ \qquad -\,16z-16 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$(z-1)(z^2-8z+16)=0$

$(z-1)(z-4)^2=0$

$\left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=4 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} ab=1 \\ ab=4 \end{array}\right.$

$\frac{2}{a+b}=1$

$\cancel{a+b=2}$

$\cancel{(a+b)^2=4}$

$\begin{cases} a+b=2 \\ ab=1 \end{cases}$

$a+b=2$

$a=\frac{1}{b}$

$\frac{1}{b}+b=2$

$1+b^2+2b$

$b^2-2b+1=0$

$(b-1)^2=0$

$z=1$

$\boxed{\begin{array}{l} b=1 \\ a=1 \end{array}}$

3) Опустим ~~высоты~~ высоты BH_1 и CH_2. т.к. трапеция равнобокая,

то $AH_1 = H_2D = \frac{AD-BC}{2} = \frac{4}{2} = 2$. $BH_1 = CH_2$

~~BH_1^2~~ $BH_1^2 = AB^2 - 4$ (из т. Пифагора)

$BH_1 = \sqrt{AB^2-4}$

$S_{ABCD} = \frac{3+7}{2} \cdot BH_1 = 5 \cdot \sqrt{AB^2-4}$

~~S_{ABT}~~ из $\triangle BOA$ и т. косинусов $AB^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos 120° =$

$= 9 + 49 + 3 \cdot 7 = 30 + 49 = 79 \Rightarrow AB = \sqrt{79}$

$S_{ABCD} = 5 \cdot \sqrt{75}$

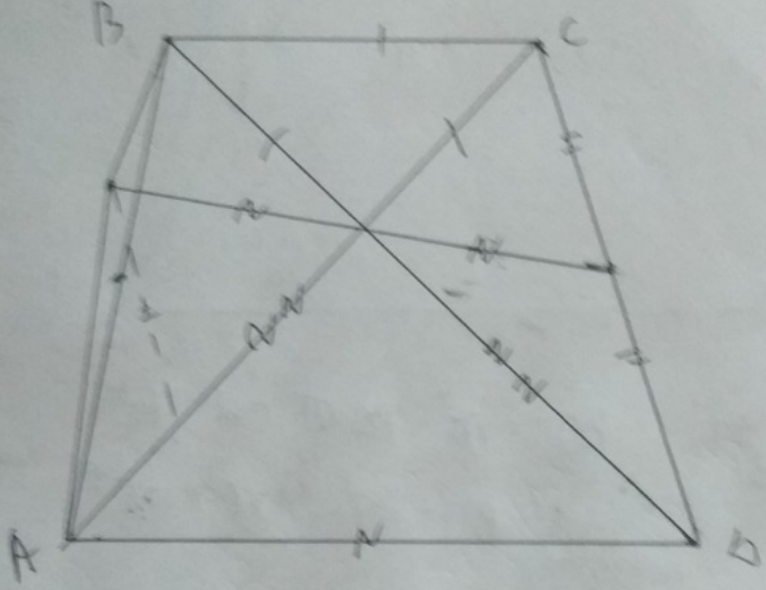
$S_{ABT} = \frac{\sqrt{3} \cdot 79}{4}$

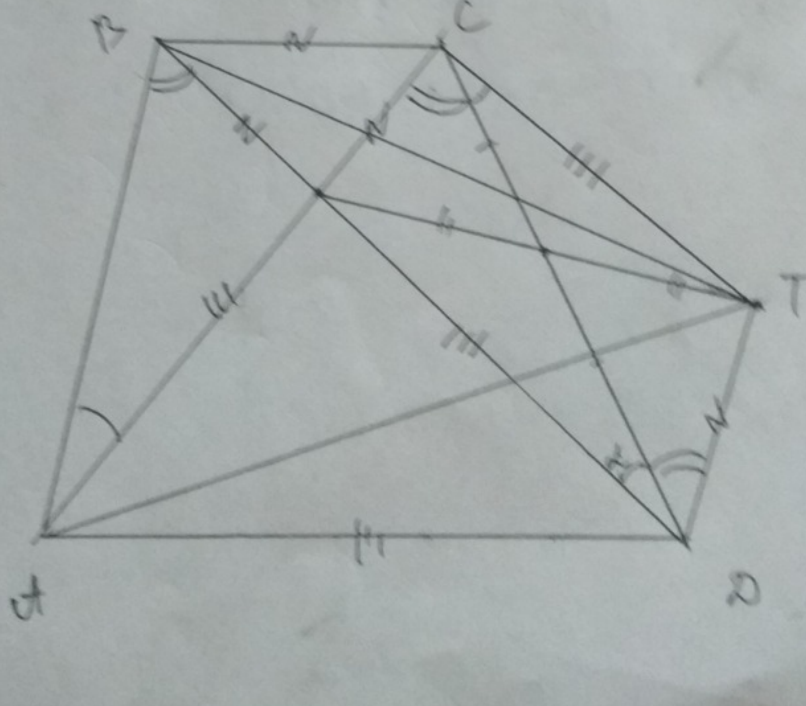
$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\cancel{5 \cdot \sqrt{75}}\ \sqrt{3} \cdot 79}{20\sqrt{75}}$

Ответ: ~~$\frac{\sqrt{3} \cdot 79}{20\sqrt{75}}$~~ а) доказано б) $\frac{\sqrt{3} \cdot 79}{20\sqrt{75}}$

Математика 10
Числовик

~~Чистовик~~
Черновик





таких узлов, которые не находятся на прямых $y=x$ и $y=59-x$ (т.к. их мы уже выбрали) — 56 $(58-2)$, т.е. в общем
вариантов для выбора
сложности кол-во узлов $58^2-2\cdot58-2\cdot56$ для получ. выбранного узла. Всего на прямой $y=58-x$ можно выбрать 58 узлов (узлы пересеч. этой прямой с прямыми $y=1 \dots y=58$).
т.е. всего таких пар. $(58^2-2\cdot58-2\cdot56)\cdot58$.

2) Аналогично п. 1. получаем $(58^2-2\cdot58-2\cdot56)\cdot58$

3) Очевидно нам надо взять число сочетаний из 58 (кол-во узлов) по 2. прямые, образованные этими узлами, не будут параллельны осям координат т.к. будут совпадать с прямой $y=x$. т.е. $C_{58}^2=\frac{58\cdot57}{2}$

4) Аналогично п. 4. получаем $C_{58}^2=\frac{58\cdot57}{2}$

5) нам требуется выбрать один узел на прямой $y=x$ и $y=59-x$. Очевидно это можно сделать $58\cdot56$ способами (взять один из 58 узлов на одной прямой и один из 56 узлов на другой прямой), т.к. два узла вместе с выбранными на первой прямой будут давать прямые, параллельные осям координат.

т.е. всего таких пар. $2\cdot(58^2-2\cdot58-2\cdot56)\cdot58+$ $+58\cdot57+58\cdot56$ (используя правило сложения)

Ответ. $2\cdot(58^2-2\cdot58-2\cdot56)\cdot58+58\cdot57+58\cdot56$

$a^2+b^2+2ab=5-ab$ Черняк

$(a+b)^2=5-ab$

$\frac{2}{a+b}=2-ab$

$\frac{4}{(a+b)^2}=(2-ab)^2$

$\frac{4}{5-ab}=(ab-2)^2$

$ab=z$

$\frac{4}{5-z}=(z-2)^2$

$4=(z^2-4z+4)(5-z)$

$\cancel{4=5z^2-z^3-20z+16}$

$4=5z^2-z^3-20z+\cancel{4z^2}+20-4z$

$4=9z^2-z^3-24z+20$

$9z^2-z^3-24z+16=0$

$z^3-9z^2+24z-16=0$

$z=1$ – корень

$1-9+24-16$

$-8-16$

$$\begin{array}{r|l} z^3-9z^2+24z-16 & z-1 \\ \hline -\;z^3-z^2 & z^2-8z+16 \\ -8z^2+24z & \\ -\;-8z^2+8z & \\ 16z-16 & \\ -\;16z-16 & \\ 0 & \end{array}$$

$(z-1)(z^2-8z+16)=0$

$(z-1)(z-4)^2=0$

$\left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=4 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} ab=1 \\ ab=4 \end{array}\right.$

$\frac{2}{a+b}=1$

$\cancel{a+b=2}$

$\cancel{(a+b)^2=4}$

$\begin{cases} a+b=2 \\ ab=1 \end{cases}$

$a+b=2$

$a=\frac{1}{b}$

$\frac{1}{b}+b=2$

$1+b^2+2b$

$b^2-2b+1=0$

$(b-1)^2=0$

$\boxed{\begin{array}{l} b=1 \\ a=1 \end{array}}$

z=1

211006803 (U805555 M1274915)

$\cancel{t=t}$ $a=x^2$ $b=y^2$ Черновик

$$\begin{cases} \frac{2}{a+b}+ab=2 \\ a^2+b^2+3ab=5 \end{cases}$$

$2+(ab)(a+b)=2(a+b)$

a^2+b^2+3ab

$\cancel{2a^2b+2ab^2}$

$$\begin{cases} 2+a^2b+ab^2=2a+2b \\ a^2+b^2+3ab=5 \end{cases}$$

$(a+b)^2=5-ab$

$a+b=\sqrt{5-ab}$

$ab=t$

$\sqrt{5-ab}=q$

$2+ab\sqrt{5-ab}=\cancel{2ab\sqrt{t}}$ $2\sqrt{5-ab}$

$\cancel{2+tq}$ $2+tq=2t$

$\cancel{\frac{2}{t+q}}$

$$\begin{cases} \frac{2}{a+b}+ab=2 \\ a^2+b^2+3ab=5 \end{cases}$$

$(a+b)^2=5-ab$

$\frac{2}{a+b}=2-ab$

$\frac{2}{(a+b)^2}=(2-ab)^2$

$\frac{2}{5-ab}=(4-4ab+a^2b^2)$

$2=(5-ab)(a^2b^2-4ab+4)$

$ab=\cancel{t}\ z$

$2=(5-z)(z^2-4z+4)$

$2=\cancel{5z^2}-\cancel{20z}+20-$

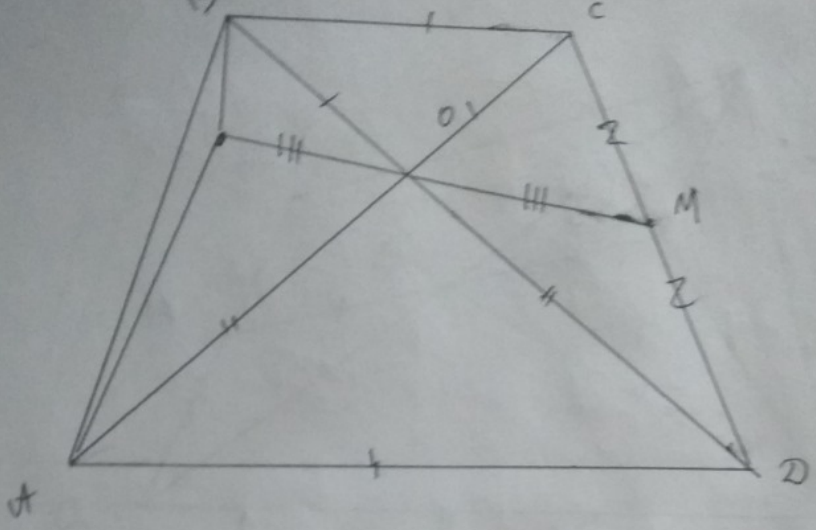
$-z^3+\cancel{4z^2}-\cancel{4z}$

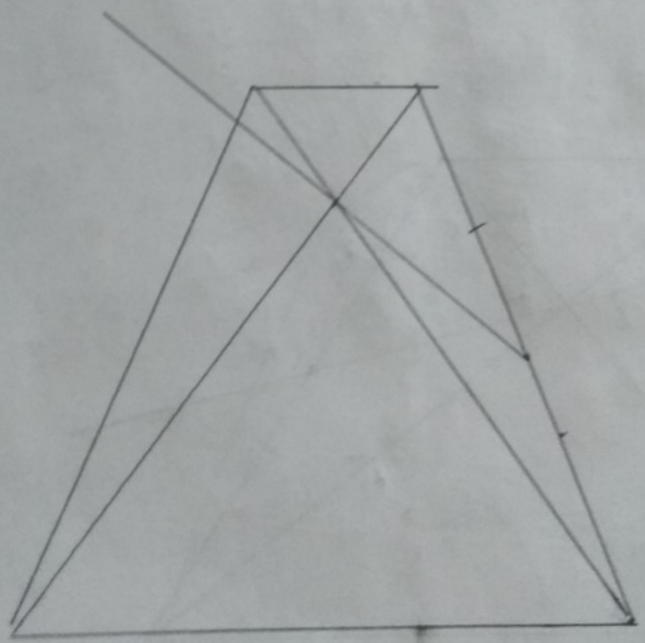
$\cancel{2}\ 9z^2-24z-z^3-18$

$z^3-9z^2+24z+18=0$

1; 2; 3; 6;

Чертежи





~~Чистовик~~
Черновик