# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006781**

ID профиля: **112570**

Вариант 9

Чистовик

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -3 \longrightarrow \text{лишний} \end{array}\right.$

2) $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = \cancel{2} - 3$

$1 = 2\sqrt{24 + 2x - x^2}$

$4x^2 - 8x - 95 = 0$

$D = 64 + 4 \cdot 4 \cdot 95 = 1584$
$= 16 \cdot 99$

$\sqrt{1584} < 40$

$x_1 = \frac{-8 + \sqrt{1584}}{-8} = 1 - \cancel{4}\frac{\sqrt{99}}{2}$
$> -4$
$\to$ корень

$x_2 = \frac{-8 - \sqrt{1584}}{-8} < 6$

$\to$ лишний

Ответ: $\left\{5;\ 1 - \frac{3\sqrt{11}}{2}\right\}$.

211006781 (U112570 M1277332)

Чистовик

3

N1. Дано:

$\triangle ABC$

$D \in AC$

$\omega \mid D \in \omega$, BD - диам.

M - сер. AD

N - сер. CD

$P = AB \cap \omega$

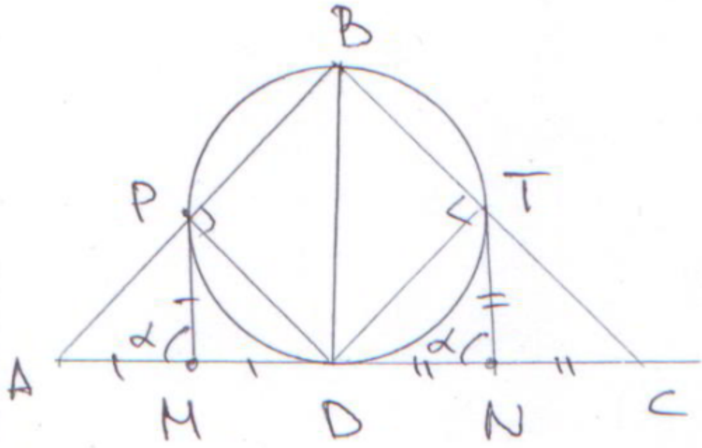
$T = BC \cap \omega$

$PM \parallel TN$

$\angle ABC$ - ?

$S_{ABC}$ - ?

$(MP = \frac{1}{2}; NT = \frac{5}{2}; BD = 2)$



а) 1) Построим PD и TD заметим что $\angle BPD = \angle BTD = 90°$ (впис. на диам.)

Пусть $\angle AMP = \alpha$, тогда $\angle TND = \angle AMP = \alpha$ (при $\parallel$ пр. PM и TN)

2) $PM = MD = AM$, $DN = NC = TN$ (кас. к окр. из одной точки, сер. по условию).

Тогда $\angle PDM = \frac{\alpha}{2}$ (из р/б и смет. углов),

а $\angle TDN = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

$\Rightarrow \angle PDT = 180° - \frac{\alpha}{2} - 90° + \frac{\alpha}{2} = 90°$,

а $\angle ABC = 180° - \angle PDT = 90°$ (и/уг впис в окр.)

Чистовик (4)

б) $BD \perp AC$, т.к. BD – диам., AC – кас., тогда BD – выс. $\triangle ABC$ к AC.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BD \cdot AC$$

$$AC = AD + DC$$

$AD = 2MP$, $DC = 2NT$ (опис. в п. 2)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BD (2MP + 2NT) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{5}{2}\right) = 6$$

Ответ: а) $90°$

б) 6.

№3. $ax^2 + 2a^2x - ay + a^3 + 1 = 0$ $\quad a = 0 \to$ нет кор.

$$y = \frac{ax^2 + 2a^2x + a^3 + 1}{a}$$

5

$$y = x^2 + 2ax + \left(a^2 + \frac{1}{a}\right)$$

$$x_0 = \frac{-2a}{2} = -a$$

$$y(-a) = a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{1}{a} =$$

$$= \frac{1}{a}$$

$$B\left(-a; \frac{1}{a}\right)$$

$$26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$$

$$4y^2 + y(8x - 20a) + (5x^2 - 22ax + 26a^2) = 0$$

$$D = (8x - 20a)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (5x^2 - 22ax + 26a^2)$$

$$= -\underbrace{(64x^2 - 32ax + 16a^2)}_{\geq 0}$$

$y_{1,2}$

$D \geq 0$

211006781 (U112570 M1277332)

Черновик

$0-\sqrt{10}+4=2\sqrt{\phantom{10}}$

$(2\sqrt{10}-1)\rho=\frac{4\pm\sqrt{10}}{121}$

$-\frac{26}{95}$

$\rho-\sqrt{10}+4=2\cdot\sqrt{10}\cdot\rho \qquad 2\sqrt{10}\rho=\rho+4-\sqrt{10}$

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$

$32 \times 32 = 64$, $96$, $31 \times 31$, $31$, $93$, $1024$, $961$

$a=0 \to$ неб кор

$(2y+2x)^2+(x-11a)^2-(121a^2-26a^2)$

$\sqrt{10}\approx 3,1$

$y=\frac{ax^2+2a^2x+a^3+1}{a}$

$\rho=\frac{4-\sqrt{10}}{2\sqrt{10}-1}$

$\cancel{96}a^2-22ax\boxed{-20ay}+5x^2+\boxed{8xy}+4y^2=0$

$=x^2+2ax+\left(a^2+\frac{1}{a}\right)$

$\rho=\frac{4-3,2}{2\cdot 3,2\cdot 0,1}=\frac{0,8}{5,4}=\frac{8}{54}=\frac{4}{27}$

$=\frac{-b}{2a}$

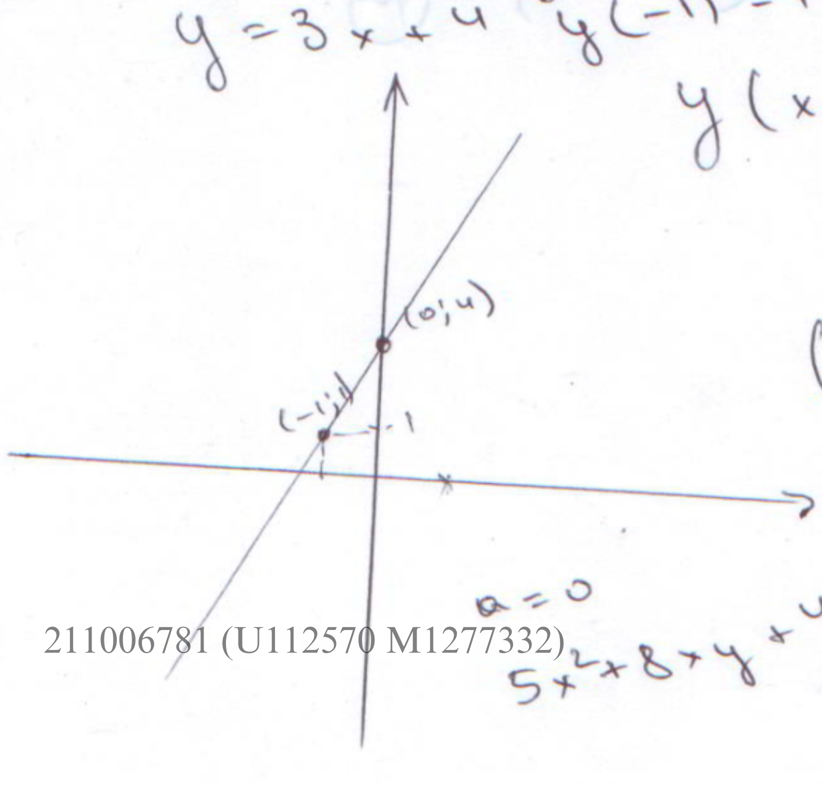
$(x^2-22ax+121a^2)=\frac{-2a}{2}=-a$

$(4x^2+2\cdot2x\cdot2y+4y^2)$ $\cancel{y_0=-\frac{D}{4a}}$

$y(0)=4$

$y=3x+4 \quad y(-1)=1$

$\cancel{D=-4a^2}$




$y(x_0)=\cancel{a^2-2a^2+a^2}-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a}$

$\left(-a;-\frac{1}{a}\right)$

$y=3a+4$

1) $-\frac{1}{a}<-3a+4$

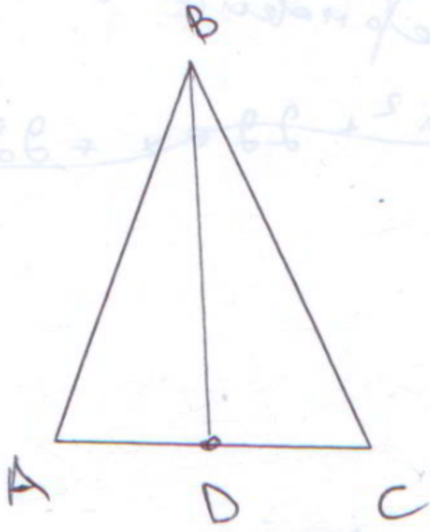
2) $-\frac{1}{a}>-3a+4$

$a=0$

$5x^2+8xy+4y^2$

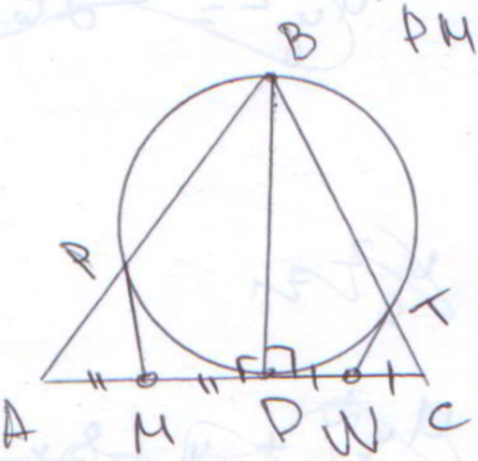
211006781 (U112570 M1277332)

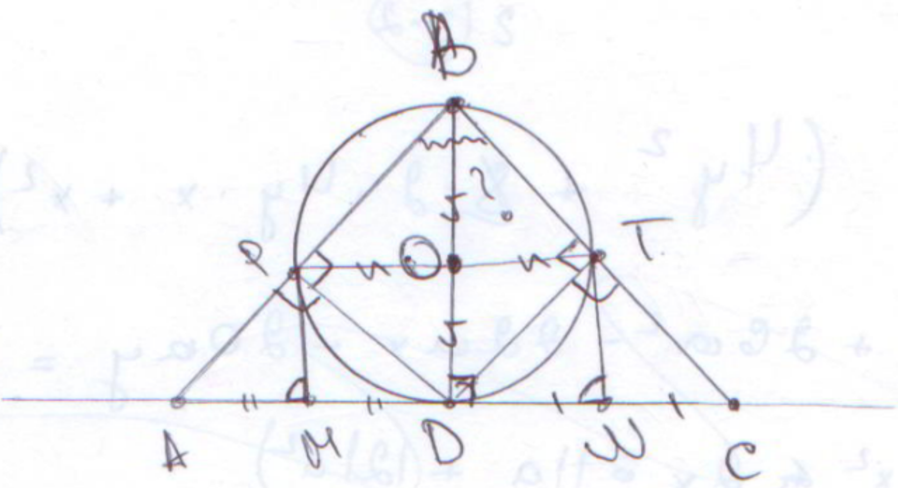
Черновик




$\angle ABC$ - ?

PM || TN




~~BP · AP =~~

$AB \cdot AP = AD^2$

$CD^2 = TC \cdot BC$

Черновик

$$4y^2 + y(8x - 20a) + 5x^2 - 22ax + 26a^2 = 0$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 16 \\ \hline 156 \\ +26 \\ \hline 416 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 \\ \times 22 \\ \hline 32 \\ 32 \\ \hline 352 \end{array}$$

$$D = (8x - 20a)^2 - 16(5x^2 - 22ax + 26a^2)$$

$$= 16x^2 \cancel{- 320ax + 400a^2}$$

$$\pm$$

$$-80x^2 + 32ax - 16a^2$$

$$\begin{array}{r} 80 \\ -16 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$= -64x^2 + 32ax - 16a^2$$

$$= -(64x^2 - 32ax + 16a^2) =$$

$$= \cancel{-(8(x \pm 4a)^2 =}$$

$$= -((8x)^2 - 8x \cdot 4a + (4a)^2)$$

$$\cancel{(8x)^2} \pm$$

$$-((8x - 4a)^2 + 32ax)$$

$$= -(8x \pm 4a)^2 - 32ax$$

211006781 (U112570 M1277332)

Черновик

$\sqrt{x+4} \le \sqrt{6-x} + 4$

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} = -4 \quad 2\sqrt{2} \quad = 2\sqrt{(6-x)(x+4)}$

$\sqrt{2} \quad 2\sqrt{2}$

$\sqrt{x+4} - 2\sqrt{6-x} \cdot \sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 0$

$\sqrt{9} - 2\sqrt{1} \cdot \sqrt{9} - \sqrt{1} + 4 = 0$

$a - 2ab - b + 4 = 0$

$\cancel{a - ab - b - ab + 4 = 0}$

$\cancel{a(1-b) - b(1+a) + 4 = 0}$

$\sqrt{x+4} = \sqrt{6-x} \quad 3 - 6 - 1 + 4 = 0$

$-3 \quad -4$

$a - 2a^2 - a + 4 = 0 \quad \cancel{x = 4}$

$\cancel{2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} - \sqrt{2} + 4}$

$-2a^2 + 4 = 0$

$a^2 = 2 \quad x = -3 \quad \cancel{1 - \sqrt{2} - 8 + 4}$

$a = \sqrt{2}$

$\cancel{a = -\sqrt{2}} \quad \sqrt{1} - 2\sqrt{9} \cdot \sqrt{1} - \sqrt{9} + 4 = 0$

$\sqrt{x+4} = \sqrt{2}$

$x + 4 = 2$

$x = -2$

$1 - 6 - 3 + 4$

$\sqrt{2} - 2 \cdot \cancel{\sqrt{8}} \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

$2\sqrt{2}$

211006781 (U112570 M1277332)

Черновик

$x^2-2x-15=0$

$D=4+60=64$

$\sqrt{D}=8$

$x_1=\frac{2+8}{2}=5 \to \sqrt{9}$

$3-1+4$

$=2\sqrt{24+10-25}$

$9$ $(6)$

$x_2=\frac{2-8}{2}=-3 \to \sqrt{1}$

$1 \neq -3$

$+4$

$=2 \circ 3$

$\Rightarrow$ не к.

$24-6 \neq 9$

$=9$

2) $\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=-3$

$\sqrt{x+4}=\sqrt{6-x}-3$

$x+4=6-x+9-6\sqrt{6-x}$

$\cancel{2x+2}$

$x+4=15-x-6\sqrt{6-x}$

$\frac{-8-\sqrt{1584}}{-8}$

$2x-11=-6\sqrt{6-x}$

$\frac{8+\sqrt{1584}}{8}<6$

$36\cdot 6=180+36=216$

$(2x-11)^2=36(6-x)$

$4x^2-44x+121=216-36x$

$4x^2-8x-95=0$

$x+4+6-x-2\sqrt{24+2x-x^2}=9$

$10-2\sqrt{24+2x-x^2}=9$

$1=2\sqrt{24+2x-x^2}$

$x=95+8x-4x^2$ $D=64+4\cdot 4\cdot 95$

$\cancel{\frac{-8+\sqrt{D}}{-8}}$

$216-121=95$

$95 \times 16 = 570 + 95 = 1520$

$1520+64=1584 \approx 40^2$

$24 \times 4 = 96$

211006781 (U112570 M1277332)

Вариант №9. Часть 1.
Чистовик.

1

№2. $\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$

$$\begin{cases} x+4\geqslant 0 \\ 6-x\geqslant 0 \\ 24+2x-x^2\geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\geqslant -4 \\ x\leqslant 6 \\ x\in[-4;6]. \end{cases}$$

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{6-x}$$

Пусть $t=\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}$, тогда

$$t^2=x+4+6-x-2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{6-x}$$
$$=10-2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{6-x}$$
$$2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{6-x}=10-t^2$$
$$t+4=10-t^2$$
$$t^2+t-6=0$$
$$\left[\begin{aligned} t&=2 \\ t&=-3 \end{aligned}\right.$$

1) $\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=2$
$$\sqrt{x+4}=2+\sqrt{6-x}$$
$$x+\cancel{4}=\cancel{4}+6-x+4\sqrt{6-x}$$
$$x-3=2\sqrt{6-x}$$
$$x^2-6x+9=24-4x$$

211006781 (U112570 M1277332)

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006781**

ID профиля: **112570**

Вариант 9

Чистовик

$a_2 = -1$

$a_3 = 2$

1) $a = -1 \quad x, y \in \varnothing$ 2

2) $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 2 - x^2 \\ x^2(2 - x^2) = 1 \end{cases}$$

$$2x^2 - x^4 = 1$$

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \quad \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -1 \end{array}\right. \\ x = -1 \quad \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{(-1;-1); (-1;1); (1;-1); (1;1)\}$.

211006781 (U112570 M1277333)

Чистовик (3)

№5. Рассмотрим некоторую точку на одной из прямых $y=x$ или $y=59-x$, тогда относительно этой точки все остальные можно разделить на 3 случая:

1) Наша точка и все точки с одной из координат равной нашей, такие точки нас не устраивают. Ответ для этого случая $\boxed{0}$

2) Точки на ~~всех~~ прямых $y=x$ и $y=59-x$. Всего таких точек 113 (116 без нашей и двух точек ~~на~~ ~~бы~~ с одинаковыми координатами). Всего таких пар будет посчитано в ответ $\frac{116 \cdot 113}{2} = 58 \cdot 113 = \boxed{12604}$ (делим на 2, т.к. такие пары войдут дважды)

3) Остались точки, не лежащие на $y=x$ и $y=59-x$, и с координатами отличному от нашей точки. Таких точек всего ~~3~~ 3364 − 228 = 3136. ~~Б~~

211006781 (U112570 M1277333)

Чистовик

А всего в этом случае $116 \cdot 3136 = 363776$ пар.

Суммарно: $12604 + 363776 = 376380$

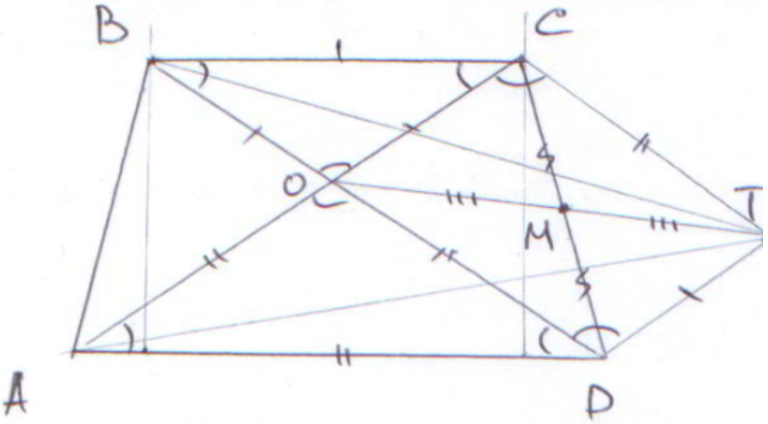
Ответ: 376380.

4

Чистовик

№ 6. Дано:
$ABCD$ – ч/уг
$BD \cap AC = O$
$\triangle BOC, \triangle AOD$ – прав.
т.$T$ симм. т.$O$ отн. сер. $CD$
$M$ – сер. $CD$

Д-ть:
а) $\triangle ABT$ – прав.
Найти:
б) $BC=3$, $AD=7$
$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?




а) 1) $\angle OAD = \angle BCA = 60°$
$\Rightarrow BC \parallel AD \Rightarrow$
$ABCD$ – трап.

2) Построим $CT$, $TD$.
Тогда $OCTD$ – парал.,
т.к. точка $M$ делит
диагонали пополам
(по построению).

5

3) $\angle BOD = \angle COD = 120°$ (см. $\angle c$).
$\Rightarrow \angle BCT = \angle ADT = 60°$ (прил. парал.)
$\Rightarrow \angle ADT = \angle BCT = \angle BOA = 120°$
$BO = BC = TD$,
$AO = AD = CT$ $\Bigg\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle ADT = \triangle BOA = \triangle BCT \Rightarrow$
$\Rightarrow BT = AT = AB \Rightarrow \triangle ABT$ – пр.,
чтд.

б) 1) $S_{\triangle ABT} = \frac{\sqrt{3}}{4} BT^2$
$BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2 \cdot BC \cdot CT \cdot \cos 120°$
$BT^2 = 9 + 49 + 2 \cdot \cancel{9 \cdot 49}^{\,3 \cdot 7} \cdot \frac{1}{2}$



$BT^2 = \cancel{37}\,79$
$S_{\triangle ABT} = \frac{\sqrt{3} \cdot \cancel{37}\,79}{4}$

Чистовик.

2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (BC + AD) \cdot h$

6

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7 = 5\sqrt{3}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{\cancel{37}\sqrt{3}}{4}}{25\sqrt{3}} = \frac{\cancel{37}}{100} = \cancel{0{,}37}\ 0{,}79$$

Ответ: ~~б) 0,37.~~
б) 0,79.

211006781 (U112570 M1277333)

Черновик

1) $a = -1$ — не может быть

2) $a = 2$ $b = 5 - a^2 = 1$

$x^2 + y^2 = 2$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 2 - x^2 \\ x^2(2 - x^2) = 1 \end{cases}$$

$2x^2 - x^4 = 1$

$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

$x^2 = 1$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \quad y = \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \quad y = \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$$

Ответ: $(-1; -1)$
$(-1; 1)$
$(1; -1)$
$(1; 1)$

211006781 (U112570 M1277333)

Черновик.

4. $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 5 \end{cases}$

$(0;0)$ – не реш.

$a = x^2+y^2$

$b = x^2y^2$

$a^2 = x^4+y^4+2x^2y^2$

$a^2 - a - 2 = 0$

$D = 1+8 = 9$

$x^4+y^4 = a^2-2b$

$\sqrt{D} = 3$

$\begin{cases} \dfrac{2}{a} + b = 2 \\ a^2 - 2b + 3b = 5 \end{cases}$

$a_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2$

$a_3 = \dfrac{1-3}{2} = -1$

$\begin{cases} \dfrac{2}{a} + b = 2 \\ a^2 + b = 5 \end{cases}$

$2 - a^3 + 3a = 0$

$+a^3 - 3a - 2 = 0$

$a = -1$ — кор.

$b = 5 - a^2$

$\dfrac{2}{a} + 5 - a^2 = 2$

$\dfrac{2}{a} - a^2 + 3 = 0$

$a^3 - 3a - 2 \;|\; a+1$

$-a^3 + a^2 \;|\; a^2 - a - 2$

$-a^2 - 3a - 2$

$-\;-a^2 - a$

$-2a - 2$

Черновик

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$\cos 120^\circ = \cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ$

$2\cos^2 60^\circ - 1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$= 2 \cdot \frac{3}{4} - 1$

$= \frac{6}{4} - 1 = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r} 58 \\ \times\ 58 \\ \hline 464 \\ +\ 290\phantom{0} \\ \hline 3364 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3364 \\ -\ 228 \\ \hline 3136 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3136 \\ \times\ 116 \\ \hline 18816 \\ 3136\phantom{0} \\ 3136\phantom{00} \\ \hline 363776 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3136 \\ \times\ 116 \\ \hline 18816 \\ +\ 3136\phantom{0} \\ 3136\phantom{00} \\ \hline 363776 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 363776 \\ +\ 12604 \\ \hline 376380 \end{array}$$

211006781 (U112570 M1277333)

Черновик

$\frac{3\sqrt3}{2}\cdot 2 \quad 3\cdot\sin 60^\circ = \frac{3\sqrt3}{2}$

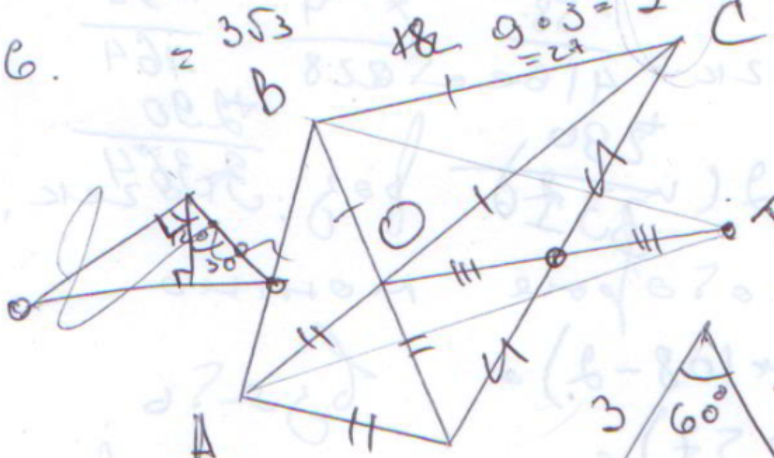
6. $= 3\sqrt3 \qquad 9\cdot 3 = 27$

$\sqrt{18 + 18\cos 120^\circ}$

$\cos 120^\circ =$

$x^2 = 9+9-2\cdot3\cdot3\cdot\cos 60^\circ = 9 \quad -\frac{1}{2}$

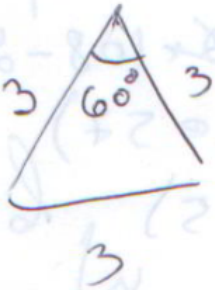
$18 - 18\cdot\frac{1}{2}$

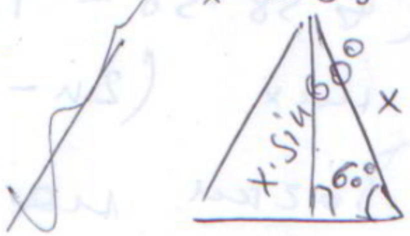


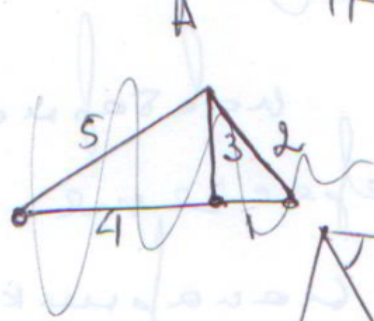
$x^2 = 9+49$

$-2\cdot3\cdot7\cdot\cos 120^\circ$

$x^2 = 58 - 42\cdot\cos 120^\circ$

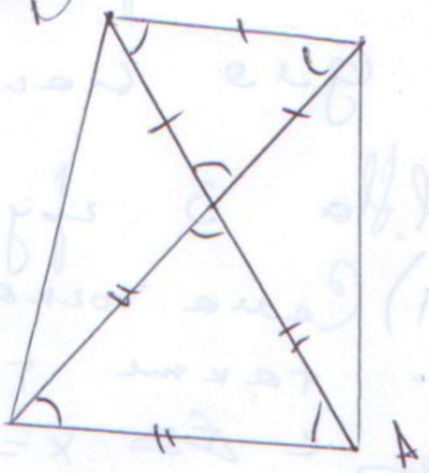


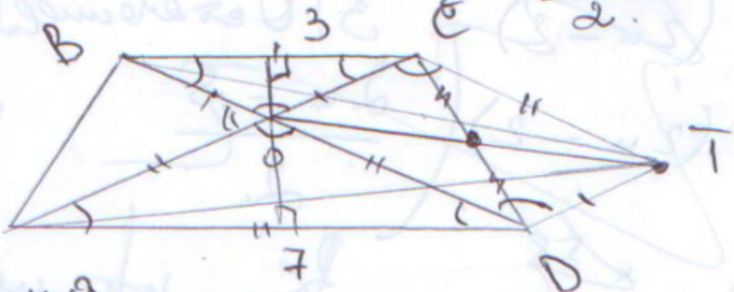




$x^2 = 58-21 = 37$

$x^2\cdot\frac{\sqrt3}{2} = \frac{37\sqrt3}{2}$





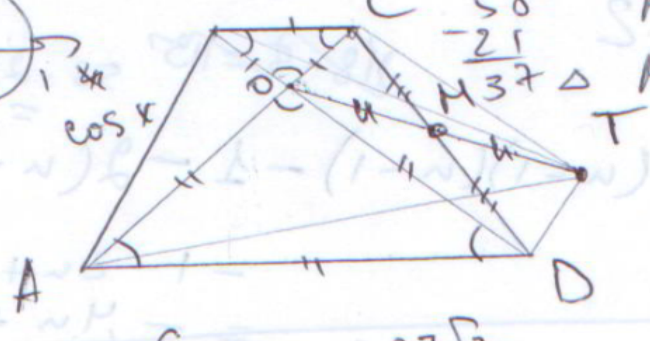
$\begin{array}{r} 49 \\ +\ 9 \\ \hline 58 \end{array}$

AT, AB,

$\begin{array}{r} 58 \\ -21 \\ \hline 37 \end{array}$

AT = AB = BT

△ADT = △ABO = △BCT



$\frac{3+7}{2}\cdot\left(3\cdot\frac{\sqrt3}{2} + 7\cdot\frac{\sqrt3}{2}\right)$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{37\sqrt3}{2}}{25\sqrt3\cdot\left(\frac{3\sqrt3}{2}+\frac{7\sqrt3}{2}\right)} = 25\sqrt3$

$\begin{array}{r} 58 \\ +21 \\ \hline 79 \end{array} \qquad = \frac{\frac{37}{4}}{25} = 37:100 = 0,374$

$\frac{\sqrt3}{4}x^2$

Вариант 9. Часть 2.

Чистовик

4. $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 5 \end{cases}$ $\quad x^2+y^2 \neq 0.$

Пусть $a = x^2+y^2$; $b = x^2y^2$

$a^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2$

1

$\begin{cases} \dfrac{2}{a} + b = 2 \\ a^2 + b = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} b = 5 - a^2 \\ \dfrac{2}{a} + 5 - a^2 = 2 \end{cases}$

$\dfrac{2}{a} + 5 - a^2 - 2 = 0$

$-a^2 + 3 + \dfrac{2}{a} = 0$

$a^2 - 3 - \dfrac{2}{a} = 0$

$a^3 - 3a - 2 = 0$

$a_1 = -1$ — корень

$$\begin{array}{r|l} a^3 - 3a - 2 & a+1 \\ \hline -\;a^3 + a^2 & a^2 - a - 2 \\ \hline -a^2 - 3a - 2 & \\ -\;-a^2 - a & \\ \hline \ldots\ 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$