Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006769**

ID профиля: **377441**

Вариант 9

Чистовик.

№2

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$

ОДЗ: $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \\ 24+2x-x^2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \in [-4;6] \\ (x+4)(6-x) \geq 0 \end{cases}$ $\underline{x \in [-4;6].}$

$-2\sqrt{24+2x-x^2} = -2\sqrt{(x+4)(6-x)} = (\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x})^2 - (x+4) - (6-x)$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 - 2\sqrt{24+2x-x^2} = 0$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 + (\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x})^2 - (x+4) - (6-x) = 0$

Пусть $t = \sqrt{x+4} - \sqrt{6-x}$. Тогда получим:

$t^2 + t - 6 = 0$

$(t+3)(t-2) = 0$

$\left[\begin{array}{ll} t = 2 & (1) \\ t = -3 & (2). \end{array}\right.$

(1): $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2$

$\sqrt{x+4} = 2 + \sqrt{6-x}$

$x+4 = 4+6-x+4\sqrt{6-x}$

$2x-6 = 4\sqrt{6-x}$

$x-3 = 2\sqrt{6-x}$

$x^2-6x+9 = 24-x\cdot 4$

$x^2-2x-15=0$

$(x-5)(x+3)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-3. \end{array}\right.$ Проверка: при $x=5$. $\sqrt{5+4} - \sqrt{6-5} = 2$

$3 - 1 = 2$ - верно.

при $x=-3$: $\sqrt{-3+4} - \sqrt{6+3} = 2$

$1 - 3 = 2$ - неверно

Получаем только $x=5$, ОДЗ удовлетв.

(2): $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = -3$

3) $\sqrt{x+4} = \sqrt{6-x} - 3$

$x+4 = 6-x-6\sqrt{6-x}+9$

$6\sqrt{6-x} = 11-2x$

4) $36(6-x) = 121-44x+4x^2$

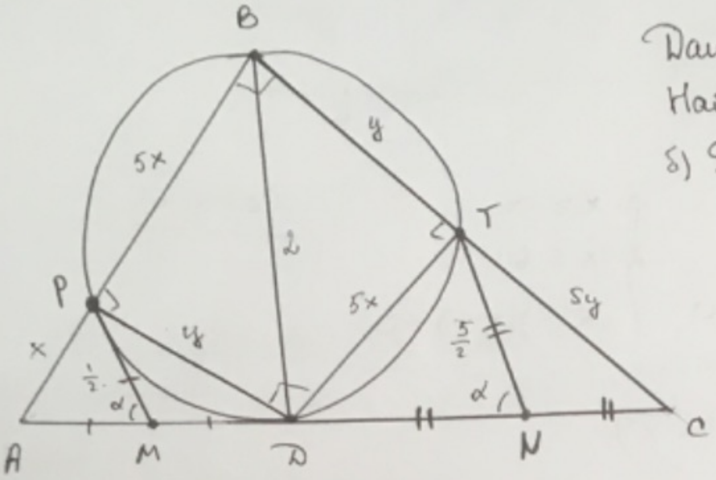
5) $4x^2-8x-95=0$

$D = 64+95\cdot 8\cdot 2 = 64+1520 = 1584 = 12^2\cdot 11$

$x = \frac{8 \pm 12\sqrt{11}}{8} = 1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{11}$

№1

Чистовик



Дано: BD - диаметр, PM ∥ TN.

Найти: а) ∠ABC.

б) S_{ABC} (если $MP = \frac{1}{2}$, $NT = \frac{5}{2}$, $BD = 2$)

(а). Решение: 1) т.к. BD - диаметр, ∠BPD и ∠BTD - вписанные, то ∠BPD = ∠BTD = 90° ⇒

⇒ △APD, △CTD - прямоуг., PM и TN - медианы ⇒ PM = AM = MD, DN = NC = TN

2) ∠PMA = ∠DNT (PM ∥ TN, AC - секущая). Пусть ∠PMA = ∠DNT = α

3) △APM: равноб. (PM = MA) ⇒ $\angle PAM = \angle APM = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$

△APD: ∠APD = 90° ⇒ $\angle PDA = 90° - \angle PAD = 90° - 90° + \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$

4) △TND: равноб. (TN = ND) ⇒ $\angle TDN = \angle DTN = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$

5) $\angle PDT = 180° - \angle PDA - \angle TDN = 180° - \frac{\alpha}{2} - 90° + \frac{\alpha}{2} = 90°$

6) рассм. BTDP: ∠BPD = ∠PDT = ∠DTB = 90°
∠BPD + ∠PDT + ∠DTB + ∠PBT = 360°
(сумма углов четырёхуг.)
⇒ ∠PBT = ∠ABC = 90°

а) ∠ABC = 90°.

(б). Решение: 1) △AMP ~ △DNT ⇒ $\frac{AM}{DN} = \frac{MP}{NT} = \frac{AP}{DT} = \frac{1}{5}$

$\left(\angle AMP = \angle DNT = \alpha,\ \frac{AM}{PM} = \frac{DN}{TN}\right)$

Пусть TD = 5x, AP = x.

2) аналогично CT = 5y, DP = y.

3) PM = AM = MD (п. а.1)
$PM = \frac{1}{2}$ (по усл.)
⇒ $AM = MD = \frac{1}{2}$ ⇒ AD = 1

аналогично $NC = DN = TN = \frac{5}{2}$, CD = 5

4) PBTD - прямоуг. (по опред.) ⇒ PD = BT, PB = DT

5) △PBD: ∠BPD = 90°, по т. Пифагора $PB^2 + PD^2 = BD^2$

$25x^2 + y^2 = 4$

△APD: ∠APD = 90°, по т. Пифагора $PD^2 + AP^2 = AD^2$

$y^2 + x^2 = 1$

Чистовик

Получаем систему: $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 25x^2+y^2=4 \end{cases}$ $\begin{cases} -x^2-y^2=-1 \\ 25x^2+y^2=4 \end{cases}$ $\begin{cases} 24x^2=3 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{8}+y^2=1 \end{cases}$

$(x>0,\ y>0)$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ y=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

б) $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC$ (т.к. $\angle ABC=90^\circ$)

$AB=AP+BP=x+5x$, $BC=BT+TC=y+5y=6y$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 6x\cdot 6y=18\cdot x\cdot y=18\cdot\frac{\sqrt{7}}{8}=\frac{9\sqrt{7}}{4}=2\frac{1}{4}\cdot\sqrt{7}$

(б): $S_{ABC}=2\frac{1}{4}\cdot\sqrt{7}$.

Ответ: а) $\angle ABC=90^\circ$

б) $S_{ABC}=2\frac{1}{4}\cdot\sqrt{7}$.

Черновик.

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{(x+4)(6-x)}$,

$-2\sqrt{(x+4)(6-x)} = (\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x})^2 - (x+4) - (6-x)$ $\quad 5-4,95$

$(\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x}) + 4 - (\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x})^2 + (x+4) + (6-x) = 0$

$~~(\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x}) - (\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x})^2 + x + 4 + 6 - x + 4 = 0~~$

$~~t = \sqrt{x}~~$ $\quad x^2 - 2x - 15 = 0$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = -3$ $\quad \sqrt{5 + \frac{3}{2}\sqrt{11}} - \sqrt{5 - \frac{3}{2}\sqrt{11}} = -3$

$\sqrt{x+4} = \sqrt{6-x} - 3$ $\quad \sqrt{9,45} - \sqrt{0,05} = -3$

$\begin{cases} x+4 = 6-x+9-6\sqrt{6-x} \\ \sqrt{6-x} - 3 \geq 0 \end{cases}$ (1): $\quad 6\sqrt{6-x} = 11 - 2x$

$36(6-x) = 121 + 4x^2 - 44x$

$216 - 36x = 121 + 4x^2 - 44x$

$D = 64 + 95 \cdot 16 = 64 + 1520 =$ $\quad 4x^2 - 8x - 95 = 0$

$= 1584 = 12^2 \cdot 11$

$\sqrt{6 - 1 + \frac{3}{2}\sqrt{11}} - 3 =$

1584 | 12
-12 | 132 | 12
38 | -12 | 11
-36 | 12
24

$= \sqrt{5 + \frac{3}{2}\sqrt{11}} - 3$ $\quad \sqrt{9} = 2 + \sqrt{1}$

$\sqrt{}$

$\frac{3}{2} \cdot 3,3 = \frac{9,9}{2} = 4,95$

$\frac{2 + 3\sqrt{11}}{2} = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{11}$

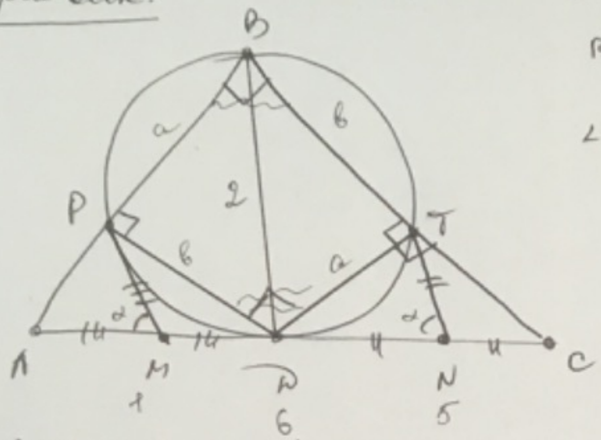
$\sqrt{1} = 2 + \sqrt{}$

$\sqrt{6 - 1 - \frac{3}{2}\sqrt{11}} - 3 =$

$\sqrt{11} \approx 3,3$

$\sqrt{5 - 4,95} - \sqrt{5 + 4,95}$ $\quad = \sqrt{5 - \frac{3}{2}\sqrt{11}} - 3 =$

Черновик.



$\angle ABC - ?$

BD · диаметр, $PM \parallel TN$.

$\angle ABC = 180^\circ - \angle PDT$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ a^2 + CT^2 = 5 \\ b^2 + AP = 1 \end{cases}$$

$\angle AMP = \angle DNT = \alpha$

$\angle PAD = \dfrac{(180^\circ - \alpha)}{2}$

$\angle PDA = 90^\circ - \dfrac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$

$\angle TDN = \dfrac{180^\circ - \alpha}{2}$

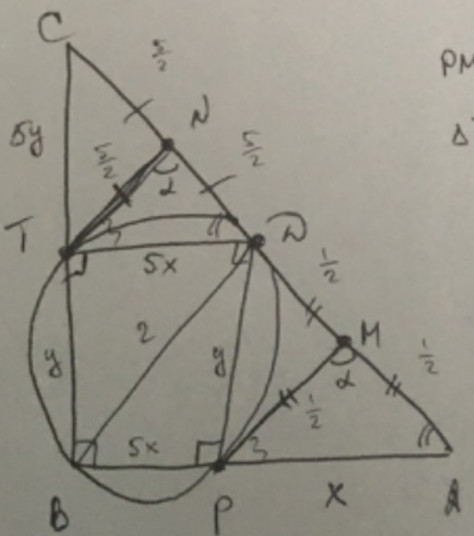
$\angle PDT = 180^\circ - \left(\dfrac{\alpha}{2} + 180^\circ\right)$

$MP = \dfrac{1}{2}$, $NT = \dfrac{5}{2}$, $BD = 2$

$AM = MD = \dfrac{1}{2}$, $AD = 1$ | $DN = NC = \dfrac{5}{2}$, $CD = 5$

$AC = 6$.

$BD = 2$



$PM \parallel TN$

$\triangle TND \sim \triangle PMA \Rightarrow \dfrac{TN}{PM} = \dfrac{ND}{MA} = \dfrac{TD}{PA} = \dfrac{5}{1}$

Пусть $TD = 5x$, $PA = x$.

$\triangle CNT \sim \triangle DMP \Rightarrow \dfrac{CN}{DM} = \dfrac{NT}{MP} = \dfrac{CT}{DP} = \dfrac{5}{1}$

Пусть $CT = 5y$, $DP = y$.

$25x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 6x \cdot 6y$ ~~$25x^2 + 2$~~

211006769 (U377441 M1275338)

Проверка: при $x = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{11}$: $\sqrt{1 + \frac{3}{2}\sqrt{11} + 4} - \sqrt{6 - 1 - \frac{3}{2}\sqrt{11}} = -3$ Чистовик.

$\sqrt{11} \approx 3,3$. тогда: $\sqrt{5 + 4,95} - \sqrt{5 - 4,95} = -3$

$\sqrt{9,95} - \sqrt{0,05} = -3$ - неверно.

при $x = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{11}$: $\sqrt{1 - \frac{3}{2}\sqrt{11} + 4} - \sqrt{6 - 1 + \frac{3}{2}\sqrt{11}} = -3$

$\sqrt{5 - 4,95} - \sqrt{5 + 4,95} = -3$

$\sqrt{0,05} - \sqrt{9,95} = -3$ верно

Получаем корень $x = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{11}$, ОДЗ удовл. (если $\sqrt{11} \approx 3,3$, то $x = 1 - 4,95 = -3,95$)

Ответ: $x \in \{1 - \frac{3}{2}\sqrt{11}; 5\}$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006769**

ID профиля: **377441**

Вариант 9

Чистовик.

№4

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases}$$

Пусть $a = x^2$, $a \geq 0$; $y^2 = b$, $b \geq 0$; $a+b \neq 0$.

Тогда: $\begin{cases} \frac{2}{a+b} + ab = 2 \\ a^2+b^2+3ab=5 \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{4}{(a+b)^2} = (2-ab)^2 \\ (a+b)^2 = 5-ab \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{5-ab} = (2-ab)^2 \quad (1) \\ (a+b)^2 = 5-ab \quad (2). \end{cases}$$

(1): $4 = (5-ab)(4+a^2b^2-4ab)$

$4 = 20+5a^2b^2-20ab-4ab-a^3b^3+4a^2b^2$

Пусть $t = ab$, $t \geq 0$. Тогда

$-t^3+9t^2-24t+16=0$

$t=1$ - корень.

$$\begin{array}{l|l} -t^3+9t^2-24t+16 & t-1 \\ \underline{-t^3+t^2} & -t^2+8t-16 \\ \quad 8t^2-24t & \\ \quad \underline{8t^2-8t} & \\ \qquad -16t+16 & \\ \qquad \underline{-16t+16} & \\ \qquad\quad 0. & \end{array}$$

$-(t-1)(t-4)^2=0$

$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=4. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} ab=1 \\ ab=4. \end{array}\right.$

Если $ab=1$, то (2): $(a+b)^2=4$

$a+b=2$ $(a \geq 0, b \geq 0)$

Если $ab=4$, то (2): $(a+b)^2=1$

$a+b=1$ $(a \geq 0, b \geq 0)$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b=2 \\ ab=1 \end{cases} \text{ - по т. Виета соотв. корням уравнения: } q^2-2q+1=0,\ (q-1)^2=0, \text{ т.е. } a=b=1. \\ \begin{cases} a+b=1 \\ ab=4 \end{cases} \text{ - по т. Виета соотв. корням уравнения: } q^2-q+4=0,\ D<0 \Rightarrow a, b \in \varnothing \end{array}\right.$

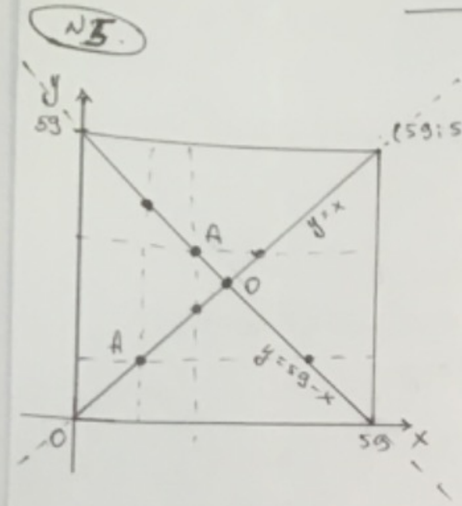
Получаем, что $a=b=1$, т.е. $x^2=y^2=1$

$$\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Ответ: $(-1;-1)$, $(-1;1)$, $(1;-1)$, $(1;1)$.

Чистовик

№5.



Пусть 1 узел сетки – $A(x_1; y_1)$; $x_1, y_1 \in Z$

2 узел сетки – $B(x_2; y_2)$; $x_2, y_2 \in Z$.

Чтобы AB не была параллельна осям, должно выполняться условие: $\begin{cases} x_1 \neq x_2 \\ y_1 \neq y_2 \end{cases}$

Если мы не включаем границы квадрата, то мы получаем внутри сетку из узлов 58×58.

① Если $A \in y = x$, то B может лежать где угодно (на $y = 59 - x$ тоже), кроме точек, где $x_2 = x_1$ или $y_2 = y_1$. То есть мы исключаем 58 вариантов по горизонтали ($y = y_1$) и 57 по вертикали ($x = x_1$) (57, т.к. саму A мы уже исключили).
Посчитаем варианты расположения A: (1;1), (2;2), … (58;58) – всего 58.
Тогда всего вариантов такого расположения: $58 \cdot (58 \cdot 58 - 58 - 57)$. ①

② Если $A \in y = 59 - x$, тогда для B аналогично ① исключаются 58+57 вариантов. Варианты расположения A: (1;58), (2;57), … (58;1) – 58.
Тогда всего вариантов такого расположения: $58 \cdot (58 \cdot 58 - 58 - 57)$. ②

③ При рассмотрении вариантов ① и ② мы два раза учли ситуации, когда либо $A \in x = y$ и $B \in y = 59 - x$, либо $A \in y = 59 - x$ и $B \in y = x$.
Значит из общего кол-ва способов надо вычесть кол-во таких вариантов.
(① + ②)

Сначала отдельно рассмотрим точку O (пересечение $y = x$ и $y = 59 - x$).
Найдем её координаты: $\begin{cases} y = x \\ y = 59 - x \end{cases}$ $\begin{cases} y = x \\ 59 - x = x \end{cases}$ $\begin{cases} y = x \\ x = 29.5 \end{cases}$ – точка O не принадлежит сетке, значит не учитываем.

Для каждого из 58 возможных A исключается 2 варианта расположения B (в которых $y_2 = y_1$ и $x_2 = x_1$) из возможных 58. То есть всего таких вариантов расположения: $58 \cdot 56$ ⑤

(продолжение на стр. 3).

Чистовик

Тогда общее число вариантов выбора таких точек:

$N = ① + ② - ③$, т.е.

$N = 2 \cdot 58(58 \cdot 58 - 58 - 57) - 58 \cdot 56 = 2 \cdot 58 \cdot 57^2 - 58 \cdot 56 =$

$= 58(2 \cdot 57^2 - 56) = 58(2 \cdot 3249 - 56) = 58(6498 - 56) =$

$= 58 \cdot 6442 = 373636$ вариантов.

Ответ: 373636 способов.

$$\begin{cases} \frac{2}{a+b} + ab = 2 \\ a^2 + b^2 + 3ab = 5 \end{cases}$$

Тог

$$\begin{cases} \frac{2}{a+b} + ab = 2 \\ a^2 + b^2 + 2ab + ab = 5 \end{cases}$$

= 5

Отв

$$\begin{cases} \frac{2}{a+b} + ab = 2 \\ (a+b)^2 + ab = 5 \end{cases}$$

$$\frac{2}{a+b} - (a+b)^2 = -3$$

$$\frac{2}{a+b} = (a+b)^2 - 3$$

$$2 = (a+b)^3 - 3(a+b)$$

Черновик.

$$\begin{cases} (a+b)^3 - 3(a+b) - 2 = 0 \\ (a+b)^2 + ab = 5 \\ \frac{2}{a+b} + ab = 2 \end{cases}$$

$$2 + ab(a+b) = 2(a+b)$$

$$\frac{2}{a+b} = 2 - ab$$

$$\begin{cases} \frac{4}{(a+b)^2} = 4 + a^2b^2 - 4ab \\ (a+b)^2 + ab = 5 \end{cases}$$

$$(a+b)^2 = 5 - ab$$

$$\boxed{\frac{4}{5-ab} = 4 + a^2b^2 - 4ab}$$

$$4 = (5-ab)(4 + a^2b^2 - 4ab) =$$

$$= 20 + 5a^2b^2 - 20ab - 4ab - a^3b^3 + 4a^2b^2$$

Пусть $ab = t$

$$-t^3 + 9t^2 - 24t + 16 = 0 \qquad -(x-1)(x-4)^2 = 0.$$

$t = 1 \quad -1 + 9 - 24 + 16 = 0$ · верно

$$-t^3 + 9t^2 - 24t + 16 \;\underline{|\, t-1}$$

$$-t^3 + t^2$$

$$8t^2 - 24t$$

$$8t^2 - 8t$$

$$16t + 16$$

$$16t + 16$$

$$0$$

$$-t^2 + 8t + 16 = -(x-4)^2$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = 4$$

$$a^2 + b^2 = 2$$

$$a^2 + b^2 = 2$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + 2ab = 4 \\ \end{cases}$$

211006769 (U377441 M1275339)

Черновик.

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

$x^2 = a,\ a \geq 0$
$y^2 = b,\ b \geq 0\ ,\ a+b \neq 0$

$$\begin{cases} \frac{2}{a+b} + ab = 2 \\ a^2+b^2+3ab = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{6}{a+b} + 3ab = 6 \\ a^2+b^2+3ab = 5 \end{cases} - \quad \begin{cases} \frac{6}{a+b} - a^2 - b^2 = 1 \\ \frac{2}{a+b} + ab = 2 \end{cases}$$

$$\frac{6}{a+b} - a^2 - b^2 = 1$$

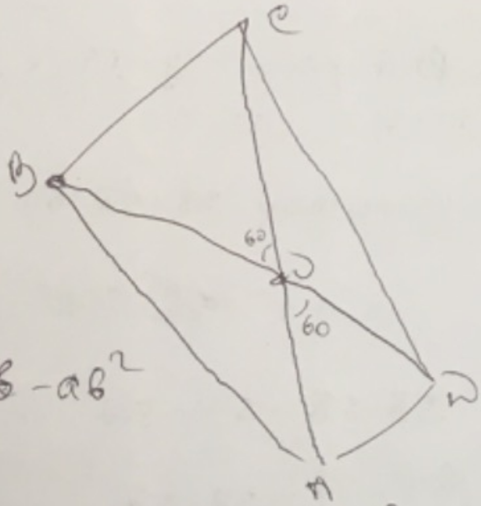
$$\cancel{\frac{6}{a+b} - (a^2+b^2) = 1}$$

$$\cancel{\frac{6-(a^2+b^2)(a+b)-(a+b)}{a+b} = 0}$$

$$\frac{6}{a+b} = 1 + a^2 + b^2$$

$$6 = (a+b)(1+a^2+b^2)$$

$$6 = a + a^3 + ab^2 + b + a^2b + b^3$$



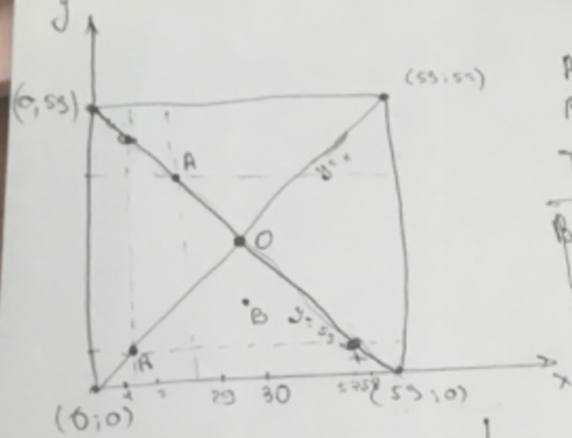
$$\frac{2}{a+b} + ab = 2$$

$$\frac{2}{a+b} = 2 - ab$$

$$2 = (a+b)(2-ab) = a - a^2b + 2b - ab^2$$

$$\left.\begin{aligned} 6 &= 3a - 3a^2b + 6b - 3ab^2 \\ 6 &= a + a^3 + ab^2 + b + a^2b + b^3 \end{aligned}\right\} \to 3a - 3a^2b + 6b - 3ab^2 = a + a^3 + ab^2 + b + a^2b + b^3$$

$$2a - 4a^2b + 5b - 4ab^2 - a^3 - b^3 = 0$$



$x_1; y_1 \in Z$. Черновик.

$A(x_1; y_1)$

$B(x_2; y_2)$. ① Пусть $A \in y = x$. Тогда $x_1 = y_1$

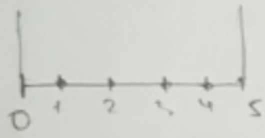
Тогда $x_2 \neq x_1$, $y_2 \neq y_1$

Все кроме границ: по оси Ox: 58 вар.
по оси Oy: 58 вар.

Для B:

Исключаем 58 вариантов (все на прям. $y = y_1$)

Исключаем 57 вариантов (все на прям. $x = x_1$, кроме A, уже исключили).



$59 : 2 = 29$ (ост. 1); $59 - 29 = 30$; $0 + 29$

Для A: 58 вариантов $(1;1), (2;2) \ldots (58;58)$

Всего вариантов, когда A на $y = x$:

$58 \cdot (58 \cdot 58 - 58 - 57)$.

② Пусть A принадл. $y = 59 - x$. Тогда возможно 58 вариантов для A: $(1;58), (2;57) \ldots, (58;1)$.

Для B: исключаем $58 + 57$ вариантов.

~~58·57 — 57~~

$58 \cdot 58 - 58 - 57 = 58(58 - 1) - 57 = 58 \cdot 57 - 57 =$

$= 57(58 - 1) = 57 \cdot 57$

$$\begin{array}{r} 6442 \\ \times \quad 58 \\ \hline 51536 \\ +32210 \\ \hline 373636 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 57 \\ \times 57 \\ \hline 399 \\ +285 \\ \hline 3249 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3249 \\ \times \quad 2 \\ \hline 6498 \\ - \quad 56 \\ \hline 6442 \end{array}$$

Точка пересечения Ox имеет коорд.: $(29{,}5; 29{,}5)$ → не принадл. сетке,

$\begin{cases} y = x \\ y = 59 - x \end{cases}$ $x = 59 - x$

$2x = 59$

$x = 29{,}5$

$\boxed{\text{не учитываем.}}$

$a^2 + b^2 = 2$