Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006725**

ID профиля: **370651**

Вариант 9

Олимпиада «Физтех по математике» Черновик

№2

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$$

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{-(x+4)(x-6)}$$

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{-(x-6)}+4=2\sqrt{-(x+4)(x-6)}$$

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{(x+4)(6-x)}$$

ОДЗ:

1) $\sqrt{x+4}\geq 0$
$x+4\geq 0$
$x\geq -4$

2) $\sqrt{6-x}\geq 0$
$6-x\geq 0$
$x\leq 6$

$x\in[-4;6]$

$$x+4+6-x-2\sqrt{(x+4)(6-x)}=4(x+4)(6-x)-16\sqrt{(x+4)(6-x)}+16$$

$$14\sqrt{(x+4)(6-x)}=4(x+4)(6-x)+6$$

$$14^2\cdot(x+4)(6-x)=16((x+4)(6-x))^2+48(x+4)(6-x)+36$$

$$16((x+4)(6-x))^2-148(x+4)(6-x)+36=0$$

Пусть $((x+4)(6-x)=t)^*$; $t\geq 0$ т.к. $x+4\geq 0$ и $6-x\geq 0$

$$16t^2-148t+36=0$$

$$4t^2-37t+9=0$$

D: $(37)^2-4\cdot4\cdot9=1225\Rightarrow\sqrt{D}=35$

$$t_1=\frac{37+35}{2\cdot4}=9 \qquad t_2=\frac{37-35}{8}=\frac{1}{4};$$

Подставим в $(*)$

$(x+4)(6-x)=9$
$-x^2+2x+24=9$
$x^2-2x-24+9=0$
$x^2-2x-15=0$

По теореме обратной теореме Виета
$x_1=5\quad x_2=-3$

Подставим в $(*)$

$(x+4)(6-x)=\frac{1}{4}$
$x^2-2x-24+\frac{1}{4}=0$
$4x^2-8x-24\cdot4+1=0$
$4x^2-8x-95=0$

D: $64+95\cdot4\cdot4=1584$
$\sqrt{D}=4\cdot3\sqrt{11}=12\sqrt{11}$

$$x_{3,4}=\frac{8\pm12\sqrt{11}}{8}=\frac{2\pm3\sqrt{11}}{2}$$

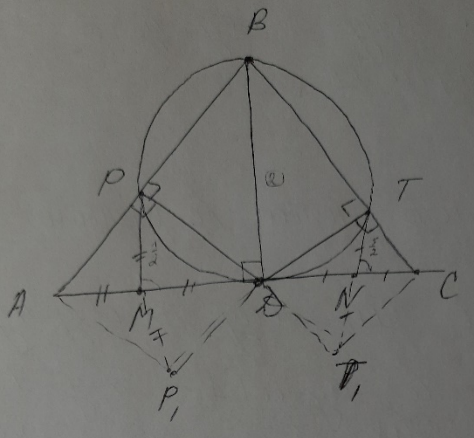
Все x удовлетворяют ОДЗ

Ответ: $x=\left\{-3;\ \frac{2-3\sqrt{11}}{2};\ 5;\ \frac{2+3\sqrt{11}}{2}\right\}$

Задача 1 Чистовик

Дано:
$\triangle ABC$
$D \in AC$
BD - диаметр
M, N - середины AD и CD
$PM \parallel TN$

$\angle ABC$ - ?
S_{ABC}, если
$MP = \frac{1}{2}$
$NT = \frac{3}{2}$
$BD = 2$



Решение: а) 1) рассмотрим $\triangle ABC$ и проведем PD и DT;

2) Т.к. BD - диаметр $\rightarrow \angle BPD = \angle BTD = 90°$ - вписанные углы, опирающиеся на диаметр.

$\angle APD = \angle DTC = 90°$

3) Достроим $\triangle APD$ и $\triangle TDC$ до параллелограммов TDC и APD, а точнее до прямоугольников (углы по прямой)

4) р-м PM и TN (параллельные прямые) при секущей AC:
$\angle PMD = \angle TNC$ - соответственные
Т.к. в прямоугольнике диагонали равны

$(PM = MD) \& (TN = NC) \Rightarrow \angle PDM = \angle TCN$;
Таким образом $\angle PDM$ и $\angle TCN$ - углы соответственные при прямых PD и BC
а т.к. они равны $\Rightarrow PD \parallel BC$ (по призн. $\parallel$-ти прямых)
Если $PD \parallel BC$, то при $PD \perp AB$
$BC \perp AB$ (теорема о двух прямых перпендикулярных третьей)
$\Downarrow$
$\angle ABC = 90°$

Чистовик

б) 1) Р-м $\triangle APD$:

$AM = MD = PM$ (прямоугольн. треугольник, медиана = половине гипотенузы)

$\Downarrow$

$AD = 2 \cdot MP = 1$

Аналогично с $\triangle TDC$

2) $DC = 2TN = \frac{10}{2} = 5$

$\Downarrow$

3) $AC = DC + AD = 6$

$\Downarrow$

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6$$

Ответ: $S_{ABC} = 6$; $\angle ABC = 90^\circ$

Чистовик

Задача № 3

т. А: $26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

п-ла; т. В: $ax^2 + 2a^2x - ay + a^3 + 1 = 0$

прямая: $3x - y = 4$

(1) Точки А и В лежат по разным сторонам, если:

$$(**)\left[\begin{array}{l}\begin{cases}26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 < 3x - y - 4\\ ax_в^2 + 2a^2x_в - ay_в + a^3 + 1 > 3x_в - y - 4\end{cases}\\ \begin{cases}26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 > 3x - y - 4\\ ax_в^2 + 2a^2x_в - ay_в + a^3 + 1 < 3x_в - y_в - 4\end{cases}\end{array}\right.$$

$x_в = -\frac{b}{2a} \Rightarrow$ т.к. $y = x^2 + 2ax + a^2 + \frac{1}{a}$

$x_в = -a \rightarrow y_в = a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{1}{a}$;

$y_в = \frac{1}{a}$;

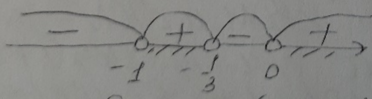
при $x_в$:

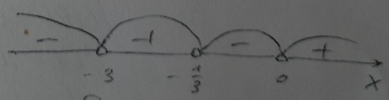
$y_в > y_{прямой}$; $y_{прямой} = 3x_в - 4$;

$\frac{1}{a} > -3a - 4$ или $\frac{1}{a} < -3a - 4$

$3a + 4 + \frac{1}{a} > 0$ $\qquad$ $3a + 4 + \frac{1}{a} < 0$

$a(3a^2 + 4a + 1) > 0$ $\qquad$ $a(3a^2 + 4a + 1) < 0$





при $a \in (-1; -\frac{1}{3}) \cup (0; +\infty)$ $\qquad$ при $a \in (-\infty; -3) \cup (-\frac{1}{3}; 0)$

~~Вспомнили~~

Вернемся к (**)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006725**

ID профиля: **370651**

Вариант 9

Задача №4

Чистовик

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \quad (*) \\ x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 5 \quad (**) \end{cases}$$

[$(**)$: $x^4+y^4+3x^2y^2=5$

$x^4+2x^2y^2+y^4+x^2y^2=5$

$(x^2+y^2)^2+x^2y^2=5$]

Пусть $x^2+y^2=u$, а $x^2y^2=v$; $u, v \geq 0$ т.к. квадраты

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \frac{2}{u} + v = 2 \quad (\square) \\ u^2 + v = 5 \quad (\square\square) \end{cases}$$

Вычтем выражения: $u^2+v-\frac{2}{u}-v=5-2$

$u^2-3-\frac{2}{u}=0$

$u^3-3u-2=0$

Путь поделим на $u+1$:

$$\begin{array}{l|l} u^3-3u-2 & u+1 \\ \hline -(u^3+u^2) & u^2-u-2 \\ -u^2-3u & \\ -(-u^2-u) & \\ -2u-2 & \\ -(-2u-2) & \end{array}$$

$\Downarrow$

u^3 $(u+1)(u^2-u-2)=0$

т.к. $u \geq 0$, а $u=-1$ не уд. этому условию

$\Downarrow$

$u^2-u-2=0$

D. $(-1)^2-(4\cdot1\cdot(-2))=9 \Rightarrow \sqrt{D}=3$

$\Downarrow$

$u_1=\frac{1+3}{2}=2$ $u_2=\frac{1-3}{2}=-1$ - не уд. усл. $u \geq 0$

$\Downarrow$

$u=2$;

Подставим u в $(\square)$

$\frac{2}{2}+v=2 \Rightarrow v=2-1=1$

Получим систему:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2y^2=1 \end{cases}$$

Решим данную систему уравнений: | Честный

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2-y^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2=\frac{1}{y^2} \end{cases}$$

Подставим x^2 в 1 уравнение:

$$\frac{1}{y^2}+y^2=2 \quad |\cdot y^2$$

$$1+y^4-2y^2=0$$

$$y^4-2y^2+1=0$$

$$(y^2-1)^2=0$$

$$(y+1)^2(y-1)^2=0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-1 \end{array}\right.$$

Имеем симметрические уравнения, поэтому

$$\begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

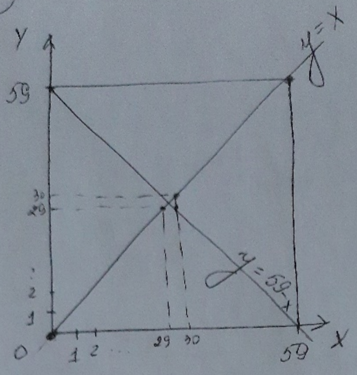
Ответ: $(-1;-1);(-1;1);(1;-1);(1;1)$

Чистовик

Задача 5

Дано:
квадрат в декартовой системе
$y = 59 - x$
$y = x$

Кол-во способов выбрать узлы, чтобы один хотя бы $\in y$, и оба $\notin$ прямым $\parallel (O_x$ или $O_y)$



Решение: 1) Представим, что узлы сетки совершенно равнозначные, и от смены их 1–2 или 2–1 количество способов увеличиваться не будут. вдвое, если поставим 1 на место 2 и наоборот

2) Саму границу сетки не считаем ⇒ найдем, сколько всего есть вариантов поставить 1 узел, удовлетворяющий условию, а для этого:

3) Заметим, что $y = x$ и $y = 59 - x$ – диагонали квадрата d_1 и d_2.

4) Рассмотрим d_1. Количество способов поставить узел на ней: 58 ~~спос~~

Второй узел можем поставить где угодно (внутри квадрата), за исключением прямых $\parallel x$ и y,

т.е. $58 \cdot 58 - \underset{\uparrow}{1}$ – кол-во всех способов расстановки 2 узла

уже постав. на диагонали узел

$\left.\begin{matrix} 58 - 1 = 57 \\ 58 - 1 = 57 \end{matrix}\right\}$ – кол-во способов, где не можем поставить по условию.

для 1 диагонали:

$$58\left(58^2 - 1 - (57 + 57)\right)$$

5) Рассмотрим 2 диагональ

Кол-во точек на стороне квадрата – четное ⇒ пересечение диагоналей не будет целочисленно-координатной точкой ⇒

⇒ на d_2 также можем выбрать 58 точек, так что поступаем аналогично с 4).

6) Просуммируем два возможн. ~~вариан~~ типа расстановки:

Чистовик

$$58\cdot 2\,(58^2-1-57\cdot 2)=376884$$

Т.к. можем провернуть схожую схему если узел 1 = узел 2, то

n - количество способов выбора

$n = 376884\cdot 2 = 753768$

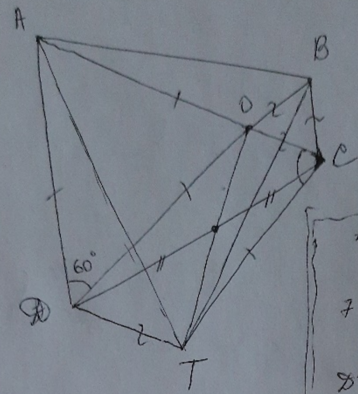
Ответ: $n = 753768$.

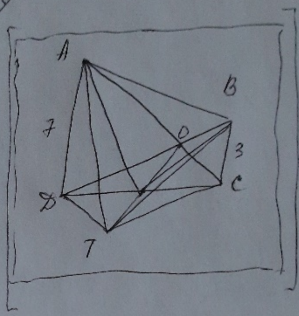
№6.

Чистовик

Дано:
ABCD -
- вып. четырёхугольник
$AC \cap BD =$ т.O
$\triangle BOC$; $\triangle AOD$ -
- правильные
T симметрична т.O отн-о середины CD

Д-ть, что
а) $\triangle ABT$ -
- правильный $\triangle$
б) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ — ?
если $BC = 3$
$AD = 7$





Решение: а) 1) Т.к. т.O симметрична т.T от-но CD ⇒
⇒ Достроим параллелограмм DOCT:
CD; OT - диагонали параллелограмма
Т.к. DOCT - параллелограмм
⇓
$CT \parallel OD$ (по определению)
⇓
по с-ву $\parallel$ прямых (при OC-секущей):
$AOD = \angle OCT = 60°$

2) DOCT - параллелограм
⇓
$\angle DOC + \angle OCT = 180°$ (односторонние углы при $DO \parallel CT$ и OC-секущей)
⇓
$\angle DOC = 120°$
$\angle AOB = 120°$ также, ибо смежный с $\angle DOC$;

3) р-м $\triangle ADT$; $\triangle BCT$; $\triangle AOB$:
1. $BC = DT = BO$ (т.к. $\triangle$ правильный $BC = BO$, а $DT = BC = BO$ т.к. параллелограмм DOCT имеем)
2. $AD = AO = CT$ ($AO = AD = OD$ т.к. $\triangle$ правильный; $OD = CT$ т.к. параллелограмм)
3. $\angle ADT = 60° + \angle ODT$; $\angle ODT = \angle OCT$ (признак параллелограмма)
$\angle ADT = 120°$; $\angle BCT = 60° + \angle OCT = 120°$; $\angle AOB = 120°$ (из 2)

Черновик

$\triangle ADT = \triangle OBA = \triangle BCT$ (по I призн. равенства $\triangle$)

$\Downarrow$

$AT = BT = AB$ т.е. ABT – правильный треугольник

ч.т.д.

б) 1) Найдем S_{ABCD}:

$$S_{ABCD} = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\angle AOB}{2};$$

$d_1 = AO + OC$; $d_2 = DO + OB$ (т.к. $OB = OC$, а $AO = DO$)

то: $d_1 = d_2 = BD + OD$; $\angle AOB = 120°$ (из п. а.2)

$$S_{ABCD} = \frac{(BO+OD)^2 \cdot \sin 120°}{2} =$$

$$= \frac{100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 25\sqrt{3}$$

2) Найдем S_{ABT}:

$$S_{ABT} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$ (по формуле площади равностороннего треугольника)

$\Downarrow$

Найдем a;

$a = AT$; рассмотрим $\triangle ADT$; $\angle ADT = 120°$ (доказано выше)

в $\triangle ADT$ по теореме косинусов:

$$AT^2 = DT^2 + AD^2 - 2\cos 120° \cdot AD \cdot DT; \quad DT = DC - BC$$

$$AT = \sqrt{(3)^2 + (7)^2 + 2 \cdot \cos 60° \cdot 3 \cdot 7} =$$

$$= \sqrt{9 + 49 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 21} = \sqrt{58 + 21} = \sqrt{79};$$

$$AT^2 = a^2 = \sqrt{79}^2 = 79$$

$\Downarrow$

$$S_{ABT} = \frac{79\sqrt{3}}{4};$$

$$\text{т.е. } \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{79\sqrt{3}}{4}}{\frac{100}{4}\sqrt{3}} = 0{,}79$$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = 0{,}79$; док-во „а" ~~...~~ см. выше.