Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006660**

ID профиля: **852492**

Вариант 9

Чистовик

10 класс. Вариант №9. Часть 1. 2

2.

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$$

ОДЗ: $x\in[-4;6]$.

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{6-x}.$$

Пусть $\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=t$.

тогда $2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{6-x}=(\sqrt{x+4}^2+\sqrt{6-x}^2)-(\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x})^2=$

$=10-t^2$

$t+4=10-t^2$

$t^2+t-6=0$

$D=1+24=25$

$t=\frac{-1\pm5}{2}=-3;2.$

1) $\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=-3.$

$10-2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{6-x}=9$

$\frac{1}{2}=\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{6-x}$

$24+2x-x^2=\frac{1}{4}.$

$x^2-2x-\frac{95}{4}=0$

$D=4+95=99$

$x=\frac{2\pm3\sqrt{11}}{2}=1\pm\frac{3}{2}\sqrt{11}$

2) $\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=2$

$10-2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{6-x}=4$

$6=2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{6-x}$

$\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{6-x}=3$

$24+2x-x^2=9$

$x^2-2x-15=0$

$D=4+60=64$

$x=\frac{2\pm8}{2}=-3;5.$

Проверка:

1. $x=1-\frac{3}{2}\sqrt{11}.$

$\sqrt{4+1-\frac{3}{2}\sqrt{11}}-\sqrt{6-1+\frac{3}{2}\sqrt{11}}=\sqrt{5-\frac{3}{2}\sqrt{11}}-\sqrt{5+\frac{3}{2}\sqrt{11}}=$

$=\frac{\sqrt{20-6\sqrt{11}}-\sqrt{20+6\sqrt{11}}}{2}=\frac{\sqrt{11}-3-\sqrt{11}-3}{2}=-3.$

Подходит.

2. $x=1+\frac{3}{2}\sqrt{11}.$

$\sqrt{4+1+\frac{3}{2}\sqrt{11}}-\sqrt{6-1-\frac{3}{2}\sqrt{11}}=\sqrt{5+\frac{3}{2}\sqrt{11}}-\sqrt{5-\frac{3}{2}\sqrt{11}}=$

$=\frac{\sqrt{11}+3-\sqrt{11}+3}{2}=3.$ Не подходит.

Проверка:

1. $x=-3.$

$\sqrt{4-3}-\sqrt{6+3}=1-3=-2$

$x=-3$ не подходит.

2. $x=5.$

$\sqrt{5+4}-\sqrt{6-5}=3-1=2.$

$x=5$ подходит.

Ответ: $\{1-\frac{3}{2}\sqrt{11};5\}$

Чистовик

3. 10 класс. Вариант №3. Часть 1 ①

Точка A задана уравнением $26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$.

$4y^2+(8x-20a)y+26a^2-22ax+5x^2=0$.

Решим относительно y

$D=(8x-20a)^2-16(26a^2-22ax+5x^2)=64x^2-320ax+400a^2-416a^2+352ax-80x^2=$

$=-16x^2+32ax-16a^2=-16(a-x)^2\geq 0 \Rightarrow D=0;\ \underline{x=a}$.

Тогда $y=\dfrac{20a-8x}{8}=\dfrac{20a-8a}{8}=\underline{1{,}5a}$.

Следовательно, $x_A=a;\ y_A=1{,}5a$.

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$

Заметим, что $a\neq 0$, т.к. если $a=0$, то $1=0$, $\varnothing$.

Тогда $y=x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}$.

B - вершина $\Rightarrow x_B=\dfrac{-2a}{2}=-a;$

$y_B=a^2-2a^2+a^2+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$.

Для того, чтобы точки A и B находились по разные стороны от $y=3x-4$, необходимо, чтобы $\begin{cases} y_A>3x_A-4 \\ y_B<3x_B-4 \end{cases}$ или $\begin{cases} y_A<3x_A-4 \\ y_B>3x_B-4. \end{cases}$

1) $\begin{cases} y_A>3x_A-4 \\ y_B<3x_B-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}5a>3a-4 \\ \frac{1}{a}<-3a-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1{,}5a<4 \\ \frac{1+3a^2+4a}{a}<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<\frac{8}{3} \\ \frac{3(a+1)(a+\frac{1}{3})}{a}<0. \end{cases}$

$-\quad -1 \quad + \quad -\frac{1}{3} \quad - \quad 0 \quad + \quad a$

Следовательно, $a\in(-\infty;-1)\cup(-\frac{1}{3};0)$.

2) $\begin{cases} y_A<3x_A-4 \\ y_B>3x_B-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1{,}5a<3a-4 \\ \frac{1}{a}>-3a-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1{,}5a>4 \\ \frac{3a^2+4a+1}{a}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>\frac{8}{3} \\ \frac{3(a+1)(a+\frac{1}{3})}{a}>0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a>\frac{8}{3} \\ \left[\begin{array}{l} a>0 \\ -1<a<-\frac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow a>\frac{8}{3}$.

$-\quad -1 \quad + \quad -\frac{1}{3} \quad - \quad 0 \quad + \quad a$

Объединив все решения, получим, что $a\in(-\infty;-1)\cup(-\frac{1}{3};0)\cup(\frac{8}{3};+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-1)\cup(-\frac{1}{3};0)\cup(\frac{8}{3};+\infty)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006660**

ID профиля: **852492**

Вариант 9

Чистовик.

10 класс вариант №3 · часть 2

(1)

4. $\begin{cases} \frac{2}{x^4y^2}+x^2y^2=2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{x^4y^2}+x^2y^2=2 \\ (x^2+y^2)^2+x^2y^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{x^4y^2}+x^2y^2=2 \\ (x^2+y^2)^2-\frac{2}{x^4y^2}=3. \end{cases}$

Пусть $x^2+y^2=t$; $t>0$.

$$t^2-\frac{2}{t}=3$$

$$\frac{t^3-3t-2}{t}=0$$

$$(t-2)(t^2+2t+1)=0.$$

$$(t-2)(t+1)^2=0.$$

$t=-1$ не подходит.

$t=2$.

$$x^2y^2=2-1=1.$$

$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2y^2=1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=2-x^2 \\ (2-x^2)x^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=2-x^2 \\ 2x^2-x^4=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=2-x^2 \\ x^4-2x^2+1=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y^2=2-x^2 \\ (x^2-1)^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=1 \\ x^2=1. \end{cases}$

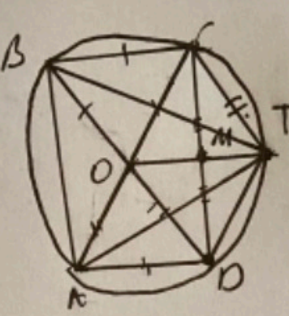
Тогда решения будут $(1;1)$; $(1;-1)$; $(-1;1)$; $(-1;-1)$.

Ответ: $(1;1)$; $(1;-1)$; $(-1;1)$; $(-1;-1)$.

Чистовик

10 класс. Вариант 3. Часть 2. ③

6.



а) ΔAOD и ΔBOC - правильные; $\angle AOD = \angle BOC = 60^\circ$. тогда $\angle BOA = \angle DOC = 120^\circ \Rightarrow AB = DC$.

Также $AD \parallel BC$. Следовательно, ABCD - параллелограмм либо ~~прям~~ р/б трапеция. Если ABCD - параллелограмм, то $AO = OC = OB = OD = BC = AD \Rightarrow \angle BAO = 30^\circ \Rightarrow \angle BAD = 90^\circ \Rightarrow$ прямоугольник. ~~$\angle BAC = \angle BDA$~~ $\angle ABD = \angle ACD$ в обоих случаях.

точка T симметрична O относительно M. тогда $OM = MT$; $CM = MD \Rightarrow$ OCTD - параллелограмм. $CT = OD = AD \Rightarrow$ CTDA - р/б трапеция. тогда вписан CTDA в окружность ω. заметим, что т.к. $\angle ABD = \angle ACD$, оба угла опираются на $AD \Rightarrow$ B также лежит на ω.

заметим, что $\angle BDA = 60^\circ$; т.к. $\angle BDA$ опирается на $BA \Rightarrow \angle BTA = 60^\circ$.

тогда т.к. $\angle BOA = 120^\circ$, $\angle BOA$ опирается на AB, то O - центр ω.

~~Следовательно заметим, что ΔBCT~~

Следовательно, т.к. $CT = AD$, $\angle COT = \angle AOD = 60^\circ$. тогда $\angle BOT = 120^\circ \Rightarrow \angle BAT = 60^\circ$, тогда в ΔBAT 2 угла $60^\circ \Rightarrow \Delta BAT$ - равносторонний. ЧТД.

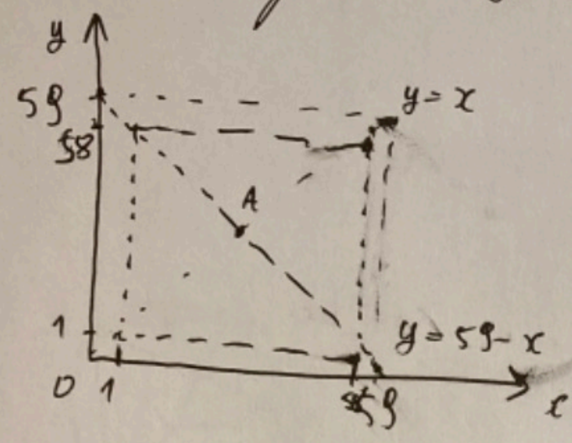
б) $BC = 3$; $AD = 7$. тогда $S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\angle AOD$; $d_1 = d_2 = 10$; тогда $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$.

по т. косинусов $AB = \sqrt{BO^2 + OA^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{49 + 9 + 2 \cdot 21 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{79}$. тогда $S_{\Delta ABT} = \frac{1}{2} AB \cdot AT \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 79 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{79\sqrt{3}}{4}$. ~~$\frac{S_{ABCD}}{S_{ABT}}$~~ $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{79\sqrt{3}}{4 \cdot 25\sqrt{3}} = \frac{79}{100}$. Ответ: 0,79

Чистовик.

10 класс. Вариант 9. Часть 2.

5. ②



в квадрате 58×58 всего 58^2 узлов.

На прямых $y = x$ и $y = 59 - x$ внутри сетки 115 узлов.

Не умаляя общности, пусть 1-й узел лежит на одной из прямых $y = x$; $y = 59 - x$.

2-й узел не может лежать на прямой, параллельной Ox или Oy. Тогда рассмотрим 2 случая.

1). если 2-й узел не лежит на прямых $y = x$ и $y = 59 - x$.

тогда, если 1-й узел не лежит в точке A, то внутри сетки 2-й узел не может лежать в $57 \cdot 2 + 115 - 3 = 114 + 112 = 226$ точках. Значит он может лежать в $58^2 - 226$ точках.

1-й узел может лежать в 114 точках => всего $114(58^2 - 226)$ случаев.

Если же 1-й узел лежит в точке A, то 2-й узел не может лежать в $57 \cdot 2 + 57 \cdot 2 = 228$ точках => может в $58^2 - 228$ точек.

Тогда всего $114 \cdot (58^2 - 226) + 58^2 - 228$ способов.

2) если 2-й узел тоже лежит на одной из прямых, то тогда возможных пар будет всего $\frac{115 \cdot 114}{2} = 115 \cdot 57$.

Но т.к. для каждого узла не лежащего в точке A будет исключаться 2 точке, то всего будет исключаться $4 \cdot 57$ точек => всего имеется $111 \cdot 57$ способов.

Тогда, сложив оба случая, мы имеем $114 \cdot (58^2 - 226) + 58^2 - 228 + 111 \cdot 57 = 366195$ способов.

Ответ: 366195.