Часть 1

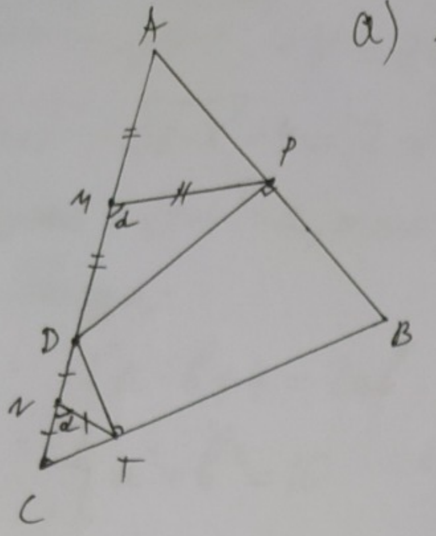
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006619**

ID профиля: **836257**

Вариант 9

Чистовик №1.
часть 1.



а) ~~DB~~ $\angle DPB = \angle DTB$ опирается на диаметр,
значит $\angle DPB = \angle DTB = 90^\circ$

$\Rightarrow PM \parallel NT$ ~~$\angle NTC = $~~

$\angle TNC = \angle PMC = \alpha$

2) $TN = CN$, т.к. TN – медиана прямоугольного $\triangle DTC$

аналогично $PM = MD$

$\angle DNT = 180^\circ - \alpha \Rightarrow$ ~~$\angle NDT = \angle NTD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$~~

$\Rightarrow \angle NDT = \angle NTD = \frac{\alpha}{2}$ (равнобедренный $\triangle$)

$\angle MDP = \angle MPD = 90 - \frac{\alpha}{2}$ (равнобедр. $\triangle$)

$\angle PDT = 180^\circ - \angle MDP - \angle NDT =$

$= 180^\circ - 90 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$

3) из вписанности BPDT:

$\angle ABC = \angle PBT = 180^\circ - \angle PDT = 90^\circ$

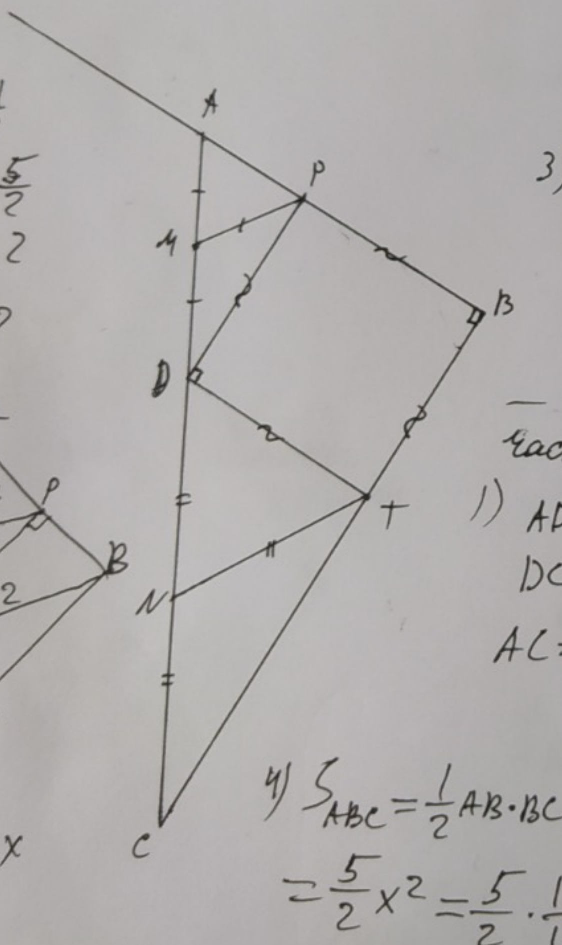
PBDT – прямоугольник ~~квадрат~~ $\quad \angle ABC = 90^\circ$

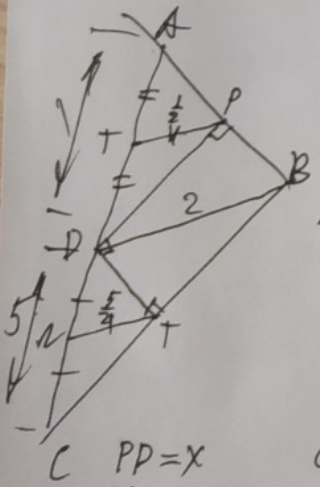
$MP = \frac{1}{2}$

$NT = \frac{5}{2}$

$BD = 2$

S_{ABC} – ?





$PP = x$
$PB =$

часть 2 ~~б)~~

1) $AD = 2MP = 1$

$DC = 2NT = 5$

$AC = AD + DC = 6$

2) BD – биссектриса $\angle ABC$, ведь диагональ квадрата – биссектриса его угла. Значит по св-ву биссектрисы:

$$\begin{cases} \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} = \frac{1}{5} \\ BC = 5AB \end{cases}$$

3) Пусть $AB = x$; $BC = 5x$

По т. Пиф:

$x^2 + 25x^2 = 36$ $(AB^2 + BC^2 = AC^2)$

$x^2 = \frac{36}{26} = \frac{18}{13}$; $x^2 = \frac{18}{13}$

4) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 5x =$

$= \frac{5}{2} x^2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{18}{13} = \frac{45}{13}$

$S_{ABC} = \frac{45}{13} = 3\frac{6}{13}$

Ответ: $S_{ABC} = \frac{45}{13}$; $\angle ABC = 90^\circ$.

Чистовик №2.

2) $\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$ ОДЗ: $x\in[-4;6]$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

Пусть $\sqrt{x+4}=a, a\geq 0$; $\sqrt{6-x}=b, b\geq 0$

Тогда:

$\begin{cases} a-b+4=2ab \\ a^2+b^2=10 \end{cases}$;

вычтем уравнения:

$a^2+b^2-2ab=10-(a-b)-4$

$(a-b)^2=6-(a-b)$

$(a-b)^2+(a-b)-6=0$

По Т. Виета:

$\left[\begin{array}{l} a-b=2 \quad (1) \\ a-b=-3 \quad (2) \end{array}\right.$

Возведём (1) и (2) в квадрат:

(1) $a^2+b^2-2ab=4$

$10-2ab=4$

$ab=3$

$24+2x-x^2=9$

$x^2-2x-15=0$

$D=4+60=8^2$

$x_{1;2}=\frac{2\pm 8}{2}=\left[\begin{array}{l}5\\-3\end{array}\right.$

(2) $a^2+b^2-2ab=9$

$10-2ab=9$

$ab=\frac{1}{2}$

$24+2x-x^2=\frac{1}{4}$

$x^2-2x-23{,}75=0$

$D=4+95=99$

$x_{3;4}=\frac{2\pm\sqrt{99}}{2}$

Отбор корней:

$x_1=5$ подходит

$x_2=-3$ не подходит, ведь при $x_2=-3$ $a-b=-2$

$x_3=\frac{2+\sqrt{99}}{2}$ не подходит, т.к. тогда $a-b>0$

$x_4=\frac{2-\sqrt{99}}{2}$

$\sqrt{\frac{2-\sqrt{99}}{2}+4}-\sqrt{6-\frac{2-\sqrt{99}}{2}}=-3$

$\sqrt{\frac{10-\sqrt{99}}{2}}-\sqrt{\frac{10+\sqrt{99}}{2}}=-3$

$10-2\sqrt{\frac{100-99}{4}}=9$

x_4 подходит ✓

Итого: корни лишь x_1 и x_4

Ответ: $x=5$; $x=\frac{2-\sqrt{99}}{2}$.

Чистовик № 3

3) A: $26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$

$25a^2-20a(x+y)+a^2-2ax+x^2+4x^2+8xy+4y^2=0$

$25a^2-20a(x+y)+(a-x)^2+4(x+y)^2=0$

$(2(x+y)-5a)^2+(x-a)^2=0$

$\begin{cases}x=a\\2x+2y=5a\end{cases}$; $\begin{cases}x=a\\y=1{,}5a\end{cases}$; $A(a;1{,}5a)$ т.е. ГМТ точек A это $y=1{,}5x$ $\left(\begin{cases}x=a\\y=1{,}5a\end{cases}\right)$

B: $ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$; $y=x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}$

$(a\neq 0!)$

$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-2a}{2}=-a$

$y_0=a^2-2a^2+a^2+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$; $B(-a;\frac{1}{a})$

ГМТ точек B: ~~$y=\frac{a}{x}$~~ $y=-\frac{1}{x}$ $\left(\text{т.к.} \begin{cases}x=-a\\y=\frac{1}{a}\end{cases}\right)$

$(y_0=y(x_0))$ $(x_0;y_0$ - координаты вершины$)$

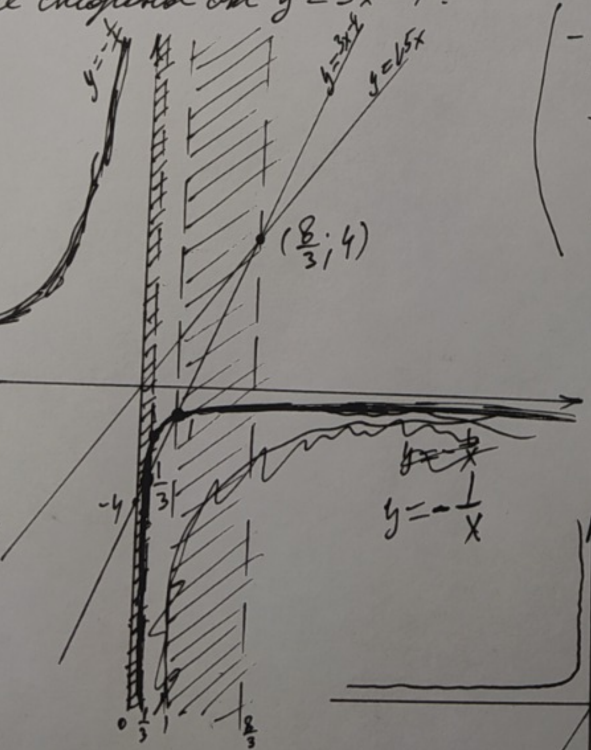
По разные стороны от $y=3x-4$:

Поиск точек пересечения гиперболы и $y=3x-4$.

$\left(\begin{array}{l}-\frac{1}{x}=3x-4\\ -1=3x^2-4x\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{1}{3}\end{array}\right.\end{array}\right)$

Поиск т. пересеч. лин. функций

$\left(\begin{cases}y=3x-4\\y=1{,}5x\end{cases}; (\frac{8}{3};4)\right)$



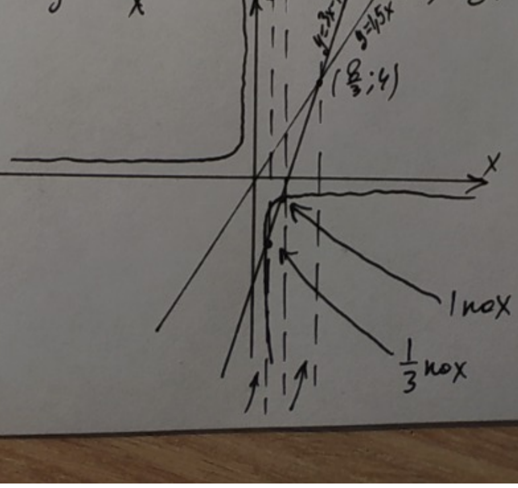
$A;B\notin(y=3x-4)$
Поэтому принадлежности нестрогие

Согласно графику подходит:

~~$a<0$~~

$a\in(0;\frac{1}{3})$

$a\in(1;\frac{8}{3})$



Ответ: $a\in(0;\frac{1}{3})\cup(1;\frac{8}{3})$

Чистовик г. Черновик

2) $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$

ОДЗ: $x \geq -4$
$x \leq 6$

Пусть $\sqrt{x+4} = a,\ a \geq 0;\ \sqrt{6-x} = b,\ b \geq 0$

Тогда

$a - b + 4 = ab$

$* \ a+4 = b(a+1)$

$b = \frac{a+4}{a+1}$ при $a \neq -1$, но $a \geq 0$

$b = 1 + \frac{3}{a+1}$

Кроме того:

$** \ a^2 + b^2 = 10$

$b^2 = 10 - a^2$

$* \ a+4 = b(a+1)$

$(a+4)^2 = (10-a^2)(a+1)^2$

$a^2 + 8a + 16 = (10-a^2)(a^2+2a+1)$

$a^2 + 8a + 16 = 10a^2 + 20a + 10 - a^4 - 2a^3 - a^2$

$a^4 + 2a^3 - 8a^2 - 12a + 6 = 0$

$a^2 + b^2 - 2ab = 10 - 2ab$

$(a-b)^2 = 10 - 2a + 2b - 8$

$(a-b)^2 = 2 - 2(a-b)$

$(a-b)^2 + 2(a-b) - 2 = 0$

$D = 4 + 8 = 12$

$a - b = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = -1 - \sqrt{3}$

$10 -$

~~Чистовик №3~~ Черновик №2

3) A: $26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$ по разные стороны от $y=3x-4$

парабола с верш. B: $ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$

$26a^2$

$26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$

$-22ax$

$26a^2-22ax-20ay+x^2+\underbrace{4(x+y)^2}=0$

$4(x+y)^2-20a(x+y)+25a^2$

$x^2-22ax+11a^2+15a^2-20ay+4(x+y)^2=0$

$(2(x+y)-5a)^2$

~~$(x-11a)^2+15a^2-20ay+4(x+y)^2=0$~~

$a^2-2ax+x^2$

~~$x^2-22ax+11a^2+2y^2-20ay+15a^2$~~

~~$(x^2-22ax+11a^2)+(2y^2-20ay+5a^2)+10a^2+4x^2+8xy+2y^2=0$~~

~~$(x-\sqrt{11}a)^2+(\sqrt{2}y-\sqrt{5}a)^2+10a^2+(2x+\sqrt{2}y$~~

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$

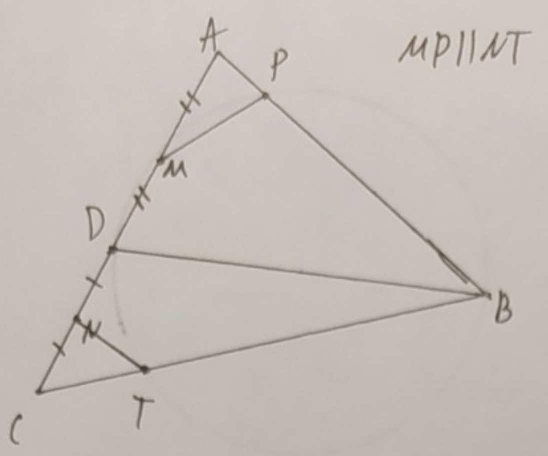
~~$a^3+3a^2x+3ax^2+1-ay-2ax^2-a^2x=0$~~

~~$(a+1)^3$~~

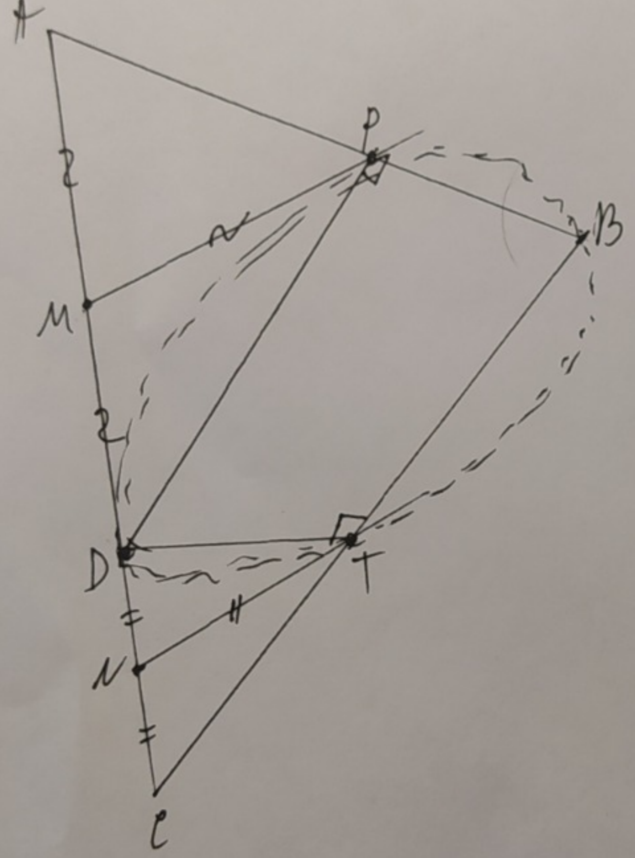
ax^2+

~~Чистовик м.~~ Черновик 3.

1)



МР||NT



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006619**

ID профиля: **836257**

Вариант 9

Чистовик №1 Вариант №9.

4) $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases}$; $\begin{cases} 2 + x^2y^2(x^2+y^2) = 2(x^2+y^2) \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 5 \end{cases}$

$x^2+y^2\neq 0$;
$a\neq 0$

Пусть $x^2+y^2=a$; $a>0$
$x^2y^2=b$; $b\geq 0$

Тогда:

$\begin{cases} \dfrac{2}{a} + b = 2 \\ a^2+b=5 \end{cases}$; $2-\dfrac{2}{a} = 5-a^2$

$a^2-3-\dfrac{2}{a}=0$

$a^3-3a-2=0$

$a=-1$ $a=2$
∅ двойной корень т.к. $a>0$ ✓

$a^3-3a-2=0$
$(a+1)^2(a-2)=0$

$$\begin{array}{r|l} a^3-3a-2 & a+1 \\ \cline{2-2} -\underline{a^3+a^2} & a^2-a-2 \\ -a^2-3a & \\ -\underline{-a^2-a} & \\ -2a-2 & \end{array}$$

$a^2-a-2=0$
$a=2$ $a=-1$

$a=2 \Rightarrow b=1$

$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2y^2=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ xy=\pm1 \end{cases}$;

(1) $y=\dfrac{1}{x}$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=2$

$x^4-2x^2+1=0$

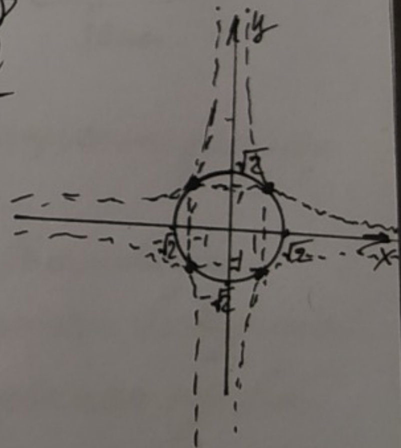
$\begin{cases} x=\pm1 \\ y=\pm1 \end{cases}$

(2) $y=-\dfrac{1}{x}$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=2$

$x^4-2x^2+1=0$

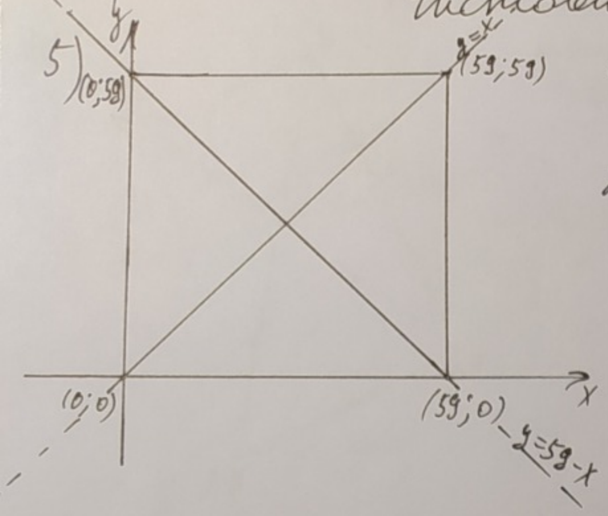
$\begin{cases} x=\pm1 \\ y=\mp1 \end{cases}$



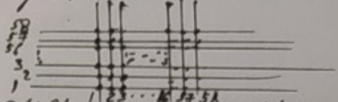
Ответ: четыре решения $(1;1)$ $(-1;-1)$ $(1;-1)$ $(-1;1)$

Чистовик №2. Вариант 9.

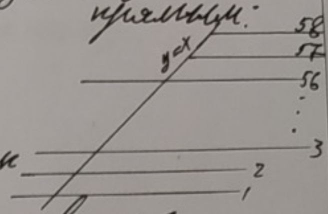
5)



Кол-во внутренних точек квадрата: 58^2 штук



Кол-во точек принадлежащих прямым:

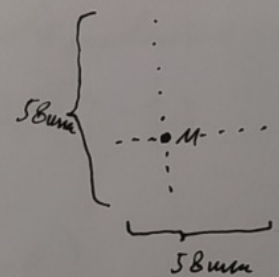


$y=x$ 58 штук

$y=59-x$ 58 штук

Двум ~~пр~~ прямым вместе принадлежит 116 точек, ведь $x=59-x$, $x=\frac{59}{2}$ не узел решётки

Найдём кол-во точек на прямых параллельных OX или OY относительно данной точки:



Итого: 114 штук

Выберем точку лежащую на $y=x$ или $y=59-x$, это можно сделать 116 способами

Вторую точку мы можем выбирать из 58^2 точек за исключением первой точки 1 и 114 точек ~~кот~~ которые образуют с первой прямые $\parallel OX$ или $\parallel OY$. Итого:

$$N=116\cdot(58^2-1-114)=116\cdot(58^2-115)=376884 \text{ способов.}$$

$58^2=2500+64+800=3364$

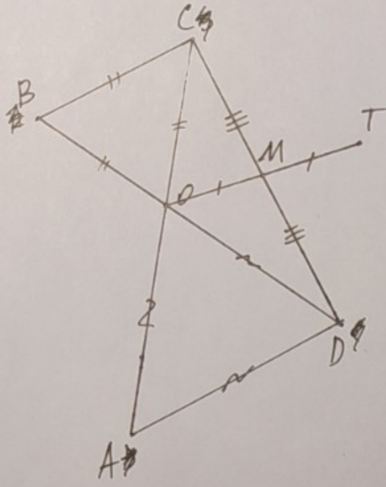
$58^2-115=3249$

$$\begin{array}{r} 3249 \\ \times\ 116 \\ \hline 19494 \\ 3249 \\ 3249 \\ \hline 376884 \end{array}$$

Ответ: 376884 способа.

Чистовик №3. Вариант 9.

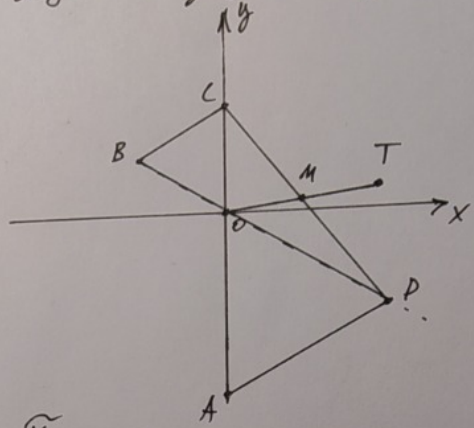
8)



а) Д-ть ABT — правильный $\triangle$

б) $BC = 3$; $AD = 7$; $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$

а) Введём координатную сетку:



Пусть: $O(0;0)$ $C(0;a)$ $A(0;-b)$

Тогда т.к. OCB и ODA правильные $\triangle$

$$B\left(-\frac{\sqrt{3}a}{2}; \frac{a}{2}\right) \quad D\left(\frac{\sqrt{3}b}{2}; -\frac{b}{2}\right)$$

M — середина CD

$$M\left(\frac{\sqrt{3}b}{4}; \frac{a}{2}-\frac{b}{4}\right)$$

$|OM| = \frac{1}{2}|OT|$, а также $\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{OT}$,

значит $T\left(\frac{\sqrt{3}b}{2}; a-\frac{b}{2}\right)$

Найдём теперь AB; BT и AT по ф-ле расстояния между точками $l=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$$AB^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - ab + b^2 = a^2 - ab + b^2$$

$$BT^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{3b^2}{4} + \frac{3ab}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \frac{ab}{2} = a^2 - ab + b^2$$

$$AT^2 = \frac{3b^2}{4} + a^2 + \frac{b^2}{4} + ab = a^2 - ab + b^2$$

ч.т.д. $AB = BT = AT = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$

$\triangle ABT$ правильный все его стороны равны.

б) $BC = 3$, $BC = OC = 3$

$AD = 7$, $AD = OA = 7$

Значит из п. а) $a = 3$, $b = 7$

Тогда:

$$AB = BT = AT = \sqrt{3^2 - 3\cdot 7 + 7^2} = \sqrt{9 + 49 - 21} = \sqrt{37}$$

$$S_{\triangle ABT} = \frac{\sqrt{3}AB^2}{4} = \frac{\sqrt{3}\cdot 37}{4}$$

Найдём S_{ABCD} как $S_{ABC} + S_{ACD}$

$AC = AO + OC = 10$

Высоты из точек D и B это модули соответствующих координат:

высота из D на $AC = \frac{\sqrt{3}b}{2} = \frac{\sqrt{3}\cdot 7}{2}$

высота из B на $AC = \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}\cdot 3}{2}$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot 10\left(\frac{7\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = 25\sqrt{3}$$

$$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\sqrt{3}\cdot 37}{4\cdot 25\sqrt{3}} = \frac{37}{100} = 0{,}37$$

Ответ: д-во выполнено в п. а); $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = 0{,}37$.