Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006597**

ID профиля: **135356**

Вариант 9

2. $\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$

ОДЗ:
$x\geq -4$
$x\leq 6$
$24+2x-x^2=-(x-6)(x+4)\geq 0$
$x\in[-4;6]$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=2(\sqrt{24+2x-x^2}-2)$

$x+4-2\sqrt{(x+4)(6-x)}+6-x=4((x+4)(6-x)-$

$-4\sqrt{(x+4)(6-x)}+4)$

$\sqrt{(x+4)(6-x)}=t$

$10-2t=4(t^2-4t+4)$

$5-t=2(t^2-4t+4)$

$2t^2-7t+3=0$

$D=49-24=25$

$t_{1,2}=\frac{7\pm5}{4}$

$t_1=3 \quad t_2=\frac{1}{2}$

$(x+4)(6-x)=9$

$24+2x-x^2=9$

$x^2-2x-15=0$

$D=4+60=64$

$x_{1,2}=\frac{2\pm8}{2}$

$x_1=5 \quad x_2=-3$

$(x+4)(6-x)=\frac{1}{2}$

$24+2x-x^2=\frac{1}{2}$

$2x^2-4x-47=0$

$D=16+2\cdot4\cdot47=$

$=8(2+47)=49\cdot8$

$x_{1,2}=\frac{4\pm14\sqrt{2}}{4}=1\pm\frac{7\sqrt{2}}{2}$

$0<1+\frac{7\sqrt{2}}{2}<6$

$-4<1-\frac{7\sqrt{2}}{2}<0$

Ответ: $1\pm\frac{7\sqrt{2}}{2}$; -3; 5.

3. $26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$ — A

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$ вершина — B

$\cancel{\frac{(-2a)^2}{2a}}$

$ay=ax^2+2a^2x+a^3+1$

$y=x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}$

$x_b=\frac{-2a}{2}=-a$

$y_b=(-a)^2-2a^2+a^2+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$

$B=\left(-a;\frac{1}{a}\right)$

$26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$

$\cancel{((\sqrt{\ }a)^2-2\cdot\sqrt{\ }ax+x^2)}$

$3x-y=4$

$K(x_1,y_1)$

$y=3x-4$ если точки лежит выше прямой, то $3x_1-y_1-4>0$, если ниже, то $3x_2-y_2-4<0$

рассмотрим при каком a B лежит выше и ниже прямой

$-3a-4-\frac{1}{a}>0$

$(3a^2+4a+1)a<0$

из $\frac{-3a^2-4a-1}{a}>0$

$D=16-12=4$

$a_{1,2}=\frac{-4\pm2}{6}$

$a_1=-1$

$a_2=-\frac{1}{3}$

$(a+1$

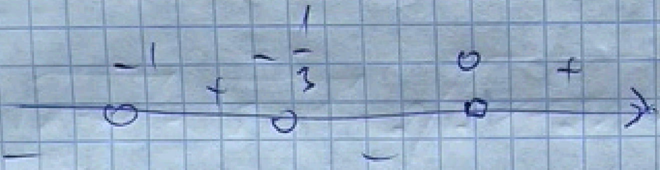
-1

0

при

при a

$$(a+1)\left(a+\frac{1}{3}\right)a<0$$



при $a \in (-\infty; 1) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$ в выше прямой

при $a \in \left(-1; -\frac{1}{3}\right) \cup (0; +\infty)$ в ниже прямой.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006597**

ID профиля: **135356**

Вариант 9

4.
$$\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

$x^2+y^2 = a \quad x^2y^2 = b$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{a} + b = 2 \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 2 - \dfrac{2}{a} \\ a^2 + b = 5 \end{cases}$$

$$a^2 + 2 - \frac{2}{a} = 5$$

$a^3 - 3a - 2 = 0$

$a = 2 \quad 8 - 6 - 2 = 0$

$$\begin{array}{r|l} a^3 - 3a - 2 & a-2 \\ \underline{a^3 - 2a^2} & a^2+2a+1 \\ 2a^2 - 3a & \\ \underline{2a^2 - 4a} & \\ a - 2 & \\ \underline{a - 2} & \\ 0 & \end{array}$$

$(a+1)^2(a-2) = 0$

$a = -1 \quad a = 2$

не подх

т.к. $x^2+y^2 \geq 0$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 2 \\ x^2y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{y^2} \\ \dfrac{1}{y^2} + y^2 = 2 \end{cases}$$

$y^4 - 2y^2 + 1 = 0$

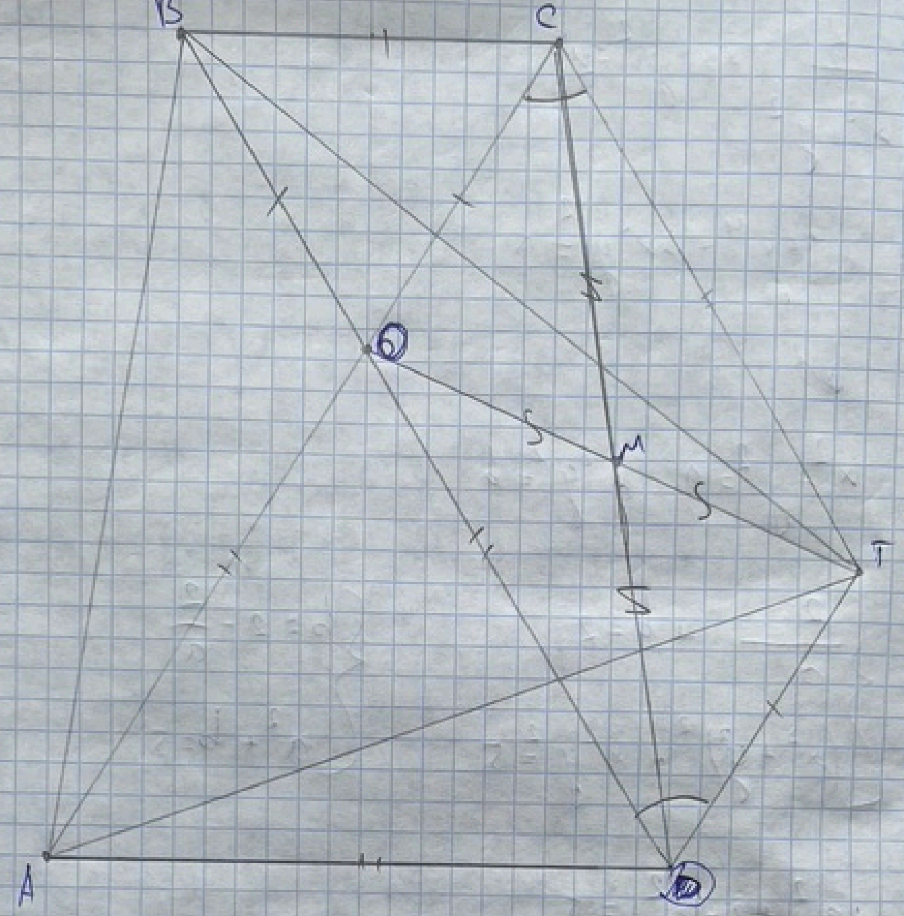
$(y^2 - 1)^2 = 0$

$y^2 = 1$

$y = \pm 1 \quad x = \pm 1$

Ответ: $(1; 1), (1; -1), (-1; 1), (-1; -1)$.

6.



а)

1) т.к. $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - правильные, то

$AD \parallel BC$ чтд.

2) проведем DT, CT заметим, что

$ODTC$ - это пар-м т.к. диагонали делятся пополам $MO = MT$ по постр., $CM = MD$ т.к. середина

значит $CO = DT$, $CT = OD$, $\angle OCT = \angle TDO = 60°$

т.к. $\angle COD = 180° - \angle BOC = 120°$.

3) $\triangle AOB = \triangle ADT = \triangle TCB$ по 2 сторонам и углу

$BC = DT = BO$ по усл и из 2),

$CT = AD = AO$ по усл и из 2), $\angle BOA = \angle ADT = \angle TCB =$
$= 120°$ чтд.

т.к. $\angle BC$

$\angle B$

$\angle A$

значит

б) $BC = 3$,

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$

1) найдё

$AB^2 =$

2) В ABC

значит

$\frac{AD-BC}{2}$

3) $S_{ABT} =$

4) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} =$

Ответ

т.к. $\angle BOA$ - внешний к $\triangle BOC$,

$\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 120^\circ$

$\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 120^\circ$.

значит $AB = BT = AT \Rightarrow \triangle ABT$ - правильный

б) $BC = 3$, $AD = 7$

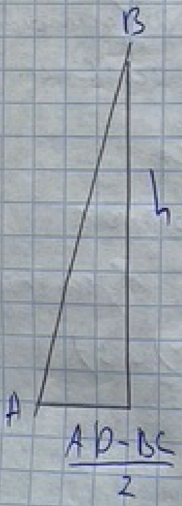
$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$$

1) найдём AB по т. косинусов из $\triangle BOA$

$$AB^2 = BO^2 + OA^2 - 2BO \cdot OA \cos 120^\circ = 9 + 49 + 21 = 79$$

2) $ABCD$ - равнобокая трапеция т.к. $\triangle AOB = \triangle DOC$ и $AD \parallel BC$

значит $S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot h = 5 \cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$



$$h^2 = AB^2 - \left(\frac{AD-BC}{2}\right)^2 = 79 - 4 = 75$$

3) $S_{ABT} = \frac{1}{2} AB^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 79 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{79\sqrt{3}}{4}$

4) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{79\sqrt{3}}{4 \cdot 25\sqrt{3}} = 0{,}79$

Ответ: $0{,}79$

5. Всего узлов внутри квадрата 58^2

заметим, что $y = x$ и $y = 59 - x$ это главные диагонали квадрата, тогда всего ~~тоже~~ узлов лежащих на ~~этой~~ этих прямых в квадрате $2 \cdot 58$ т.к. они пересекаются не в узле (потому что квадрат имеет размеры 61×61, значит центр не яв. узлом)

разберем 2 случая. замечу, что мы выбираем граничные узлы, иначе если выбрать диагон. узел, то эти узлы будут лежать на прямых параллельных осям координат.

1)

~~Один узел~~ 1) один узел лежит на главных диагоналях

выбрать такой узел можно $2 \cdot 58$ способами, а выбрать второй узел можно $58^2 - 2 \cdot 58 - (58+57) + 3$ т.к. узел не лежит на главных диагоналях и т.к. узел не лежит на той же вертикали и горизонтали

$+3$ т.к. 3 дважды посчитали узлы, которые лежат и на диаг и на одной верт и гор.

тогда всего способов $2 \cdot 58(58^2 - 2 \cdot 58 - (58+57) + 3)$

2) оба узла лежат на гл. диаг.

первый узел можно выбрать $2 \cdot 58$ способами, а второй $2 \cdot 58 - 3$ т.к. они не должны лежать на одной гор или верт.

но ~~мы узел выбираем~~ таким образом я посчитал каждый способ 2 раза, значит всего способов

$$\frac{2 \cdot 58(2 \cdot 58 - 3)}{2}$$

тогда всего способов

$$2\cdot 58\cdot\left(58^2-2\cdot 58-(58+57)+3\right)+58\cdot(2\cdot 58-3)=$$

$$=58\left(2\cdot 58^2-4\cdot 58-2(58+57)+6+2\cdot 58-3\right)=$$

$$\cancel{=58\left(2\cdot 58^2-2\cdot 58-2(58^2+258)+6-3\right)}=$$

$$=58\left(2\cdot 58^2-2\cdot 58-2\cdot 58-2\cdot 57+3\right)=$$

$$=58\left(2\cdot 58^2-4\cdot 58-2\cdot\cancel{58}\,57+3\right)=$$

$$=58\left(2\cdot 58^2-6\cdot 58+5\right)=58(6728-348+5)=$$

$$=6385\cdot 58=370330$$

Ответ: всего 370330 способов