Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006552**

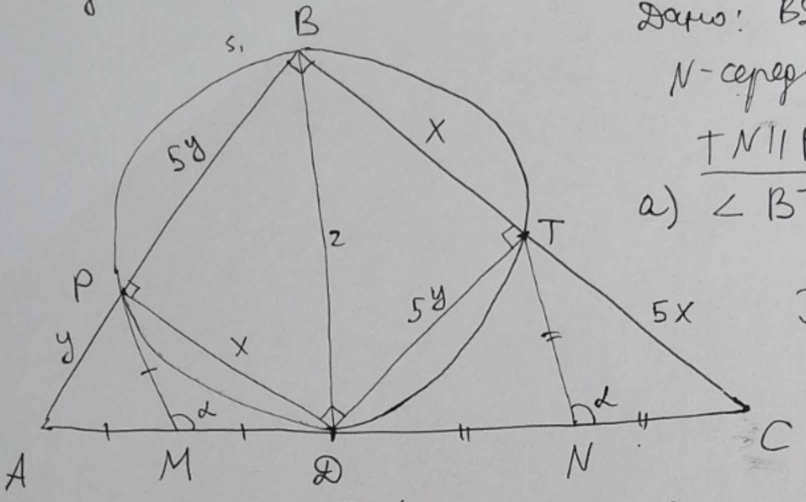
ID профиля: **858105**

Вариант 9

Чистовик 10 класс В. № 9.

(1)

Задача 1.



Дано: BD – диаметр окр. S_1

N – середина DC, M – середина AD.

TN∥PM. Найти: ∠ABC.

а) $\angle BTD = \angle BPD = 90^\circ$ (как впис. углы опирающиеся на диаметр).

Пусть $\angle TNC = \alpha$

$\angle TNC = \angle PMD$, т.к. TN∥PM.

$\angle DTC = 180^\circ - \angle BTD = 90^\circ$

$\angle DPA = 180^\circ - \angle BPD = 90^\circ$

Тогда PM и TN медианы в прямоугольных треугольниках ⇒

$AM = PM = MD$ и $DN = TN = NC$.

$\angle NCT = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$ (по т. о сумме углов в Δ).

$\angle PMA = 180^\circ - \alpha$, тогда $\angle PAM = \frac{180^\circ - 180^\circ + \alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$

В Δ ABC – $\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle BCA = 180^\circ - 90^\circ + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = \underline{\underline{90^\circ}}$

б) $MP = \frac{1}{2}$; $NT = \frac{5}{2}$, $BD = 2$. Найти: $S_{\Delta ABC}$.

$AM = MD = PM \Rightarrow AD = 1$; $DN = TN = NC \Rightarrow DC = 5$.

$\Delta TNC \sim \Delta PMD$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{TC}{PD} = \frac{NC}{MD} = 5$.

$\Delta PAM \sim \Delta DNT$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{AP}{TD} = \frac{AM}{ND} = \frac{1}{5}$.

$\underline{x^2 + y^2 = 1}$ (из Δ PAD).

В PBTD все углы 90° ⇒ прямоугольник.

$PD = BT = x$; $PB = TD = 5y$ Из Δ BDT по т. Пифагора:

$25y^2 + x^2 = 4$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 25y^2 + x^2 = 4 \end{cases}$ $x^2 = 1 - y^2$ $24y^2 = 3$ $y^2 = \frac{1}{8}$ $y = \frac{1}{\sqrt{8}}$ $x = \sqrt{\frac{7}{8}}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6y \cdot 6x = 18xy = 18 \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}} = \frac{18\sqrt{7}}{8} = \underline{\underline{\frac{9\sqrt{7}}{4}}}$

Ответ: а) $90^\circ = \angle ABC$

б) $S_{\Delta ABC} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$.

211006552 (U858105 M1273535)

Чистовик 10 класс в. №9.

②

Задача 3.

1) $4y^2+y(8x-20a)+5x^2-22ax+26a^2=0$ – координаты точки A

$D=-16(x-a)^2$, чтобы решения были: $x=a$, тогда $D=0$.

$y=-\frac{b_x}{2a_x}=1,5a$

$A(a;1,5a)$.

2) Для точки B. (точка B – вершина параболы.

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$.

при $a=0$: $1=0$ решений нет.

$ay=ax^2+2a^2x+a^3+1$, поделим на $a\neq0$.

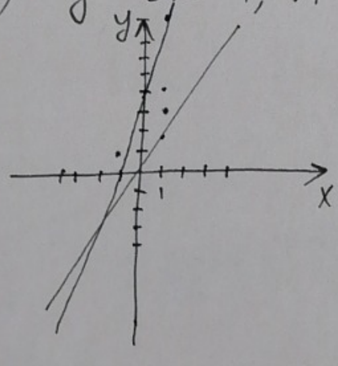
$y=x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}$

Вершина будет в $x_0=-\frac{b_x}{2a_x}=\frac{-2a}{2}=-a$

$y_0=a^2-2a^2+a^2+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$

$B(-a;\frac{1}{a})$.

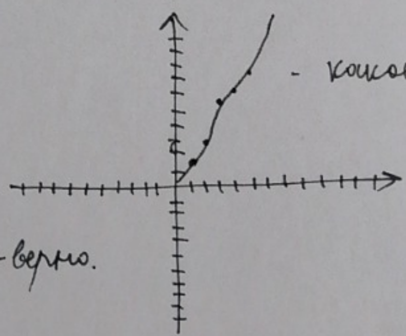
3) $y=3x+4$, A и B – по разные стороны



$a\neq0$ Для B: $\frac{1}{a}=-at+b$ $y=1,5x$.

Для A: $1,5a=al+q$ $y=-\frac{1}{x}$.

При $a>0$.



т.е. уравнение A всегда ниже $y=3x+4$

– какое-то уравнение для A

Для B: $a=1$ $a=0,5$

$x=-1$ $x=-0,5$

$y=1$ $y=2$.

при всех $a>0$ по разные стороны

т.е. уравнение B всегда ~~выш~~ выше.

$a>0$

$3x+4>1,5x$

$1,5x>-4$ $x>-\frac{4}{1,5}$ – верно.

$3x+4<-\frac{1}{x}$. $|\cdot x$

$3x^2+4x+1<0$.

$x_{12}=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\frac{-4\pm2}{6}$ $x=-1$ $x=-\frac{1}{3}$.

$x\in(-1;-\frac{1}{3})$.

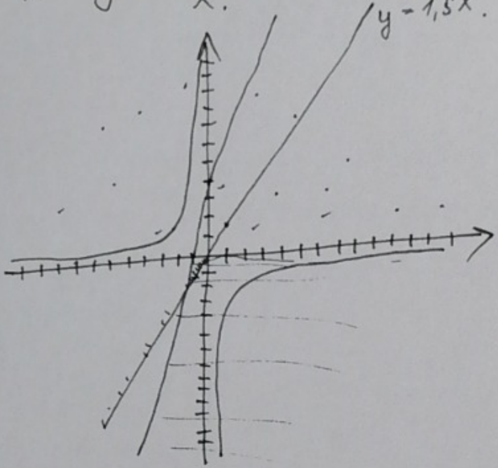
чистовик

Задача 3 (продолжение).

(3).

A: $y=1,5x$

B: $y=-\frac{1}{x}$.



при $a<0$.

$a\neq 0$

$a>-\frac{4}{1,5}$

Ответ: $a\in(-\infty;-\frac{4}{1,5})\cup(-\frac{4}{1,5};0)\cup(0;\infty)$.

При $a<0$ штрих. часть. При $a>0$ часть т. точку.

211006552 (U858105 M1273535)

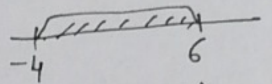
Задача 2

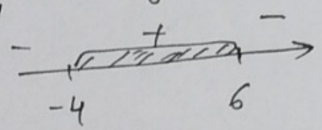
$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{6-x}\sqrt{x+4}$

ОДЗ:

$\begin{cases} x \geq -4 \\ 6-x \geq 0 \end{cases}$ $(6-x)(x+4) \geq 0$

$x \leq 6$





Замена $\sqrt{x+4} = a$ $\sqrt{6-x} = b$.

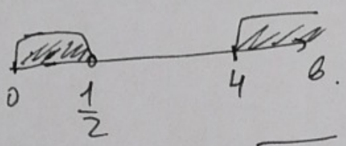
$a \geq 0$ $b \geq 0$

$a - b + 4 = 2ab$.

$a - 2ab = b - 4$

$a(1-2b) = b - 4$

$a = \frac{b-4}{1-2b} \geq 0$



$b = \frac{a+4}{1+2a}$

$\sqrt{6-x} < \frac{1}{2}$.

$6 - x < \frac{1}{4}$

$x > 5\frac{3}{4}$

$\sqrt{6-x} \geq 4$

$6 - x \geq 16$

$-x \geq 10$

$x \geq -10$.

$x \in (5\frac{3}{4}; 6]$

$x = -4$

$-\sqrt{10} + 4 = 0$

$x \neq 4$ и $x \neq 6$.

Ответ: $x \in (5\frac{3}{4}; 6)$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

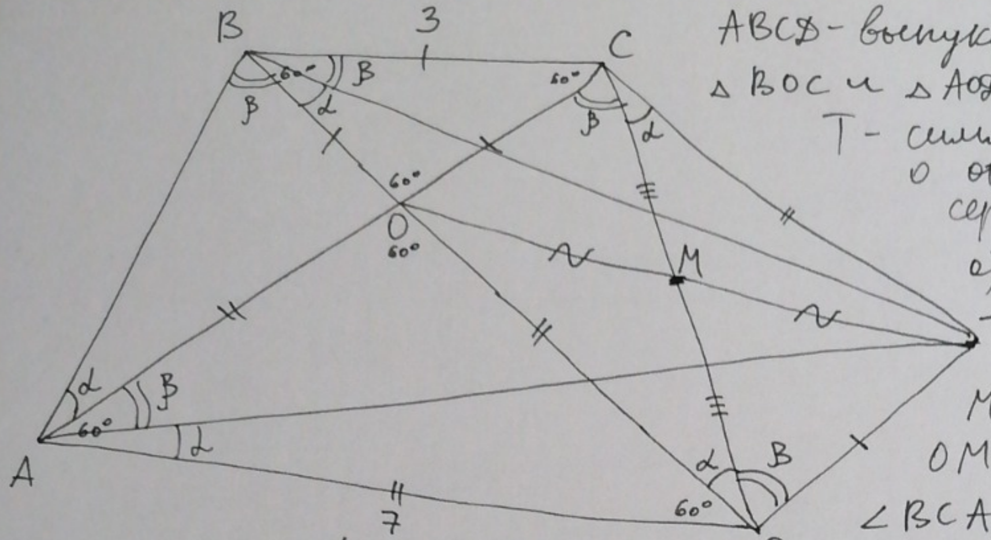
Шифр: **211006552**

ID профиля: **858105**

Вариант 9

Чистовик. 10 класс вар. №9 (1)

Задание 6.



ABCD – выпуклый четырёхугольник. $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ – правильные. T – симметрична точке O относительно середины CD

а) Доказать: $\triangle ABT$ – правильный.

M – середина CD

OM = MT – из симметрии.

$\angle BCA = \angle BDA = 60°$ (по усл.) тогда четырёхугольник ABCD является описанным (равные углы опир. на одну дугу).

Пусть $\angle BAC = \alpha = \angle BDC$

Пусть $\angle ABC = \beta = \angle ACD$

(как впис. углы в опис. четырёхуг. на одну дугу).

Из симметрии: OC = TD; OD = CT => OCTD – параллелограмм (по признаку).

и CM = MD; OM = MT.

$\angle BOA = 180° - \angle BOC = 120° \Rightarrow \boxed{\alpha+\beta=60°}$ $\angle ODC = \angle DCT$, $\angle OCD = \angle CDT$ } как накрест. леж. при ||.

Рассмотрим четырехуг. ACTD

$\angle ADT + \angle ACT = 180° \Rightarrow$ ACTD – описанный.

$\angle CDT = \angle CAT$ (т.к. в опис. четырехуг на одну дугу и впис.

Рассмотрим четырехуг. ABCT

$\angle BAT + \angle BCT = 180° \Rightarrow$ ABCT – описанный.

$\angle CBT = \angle CAT$ (т.к. в опис. четырехуг. на одну дугу опираются два вписанных.

$\angle TBD = 60° - \angle CBT = 60° - \beta = \alpha$

В $\triangle ABT$: $\angle TBA = \alpha+\beta = 60°$; $\angle BAT = 60° = \alpha+\beta \Rightarrow$

$\angle BTA = 180° - 60° - 60° = 60°$

В $\triangle ABT$ все углы по 60° => он правильный ч.т.д.

б) BC = 3; AD = 7. Найти: $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$.

Пусть BT = x; AT = y $S_{\triangle ABT} = \frac{1}{2} xy \cdot \sin 60°$

$S_{ABCD} = S_{\triangle BCT} + S_{\triangle ADT} + S_{\triangle ABT} - S_{\triangle CTD}$

Задание 6 (продолжение)

$\sin 60^\circ = \sin 120^\circ$

$S_{ABCD} = S_{\triangle BCT} + S_{\triangle ADT} + S_{\triangle ABT} - S_{\triangle CTD}$

мы уже доказали, что $OCTD$ – параллелограмм.

$OD = CT$; $OC = TD$

$S_{\triangle BCT} = \frac{1}{2} BC \cdot CT \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ$.

$S_{\triangle ADT} = \frac{1}{2} AD \cdot DT \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ$

$S_{\triangle CTD} = \frac{1}{2} CT \cdot DT \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ$.

$\angle CTD = 120^\circ$ (из симметрии).

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} xy \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ$

$\cancel{\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}\sin 60^\circ (xy - 3\cdot 7)}{\frac{1}{2}\sin 60^\circ \cdot xy} = \frac{xy - 3\cdot 7}{}}$

$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}\sin 60^\circ \cdot x \cdot y}{\frac{1}{2}\sin 60^\circ (xy + 3\cdot 7)} = \frac{xy}{xy+21} = \frac{x^2}{x^2+21}$

$\triangle BCT \sim \triangle ATD$ (по двум углам).

$\triangle BCT = \triangle ATD$ (по двум сторонам и углу между ними).

$\Rightarrow x = y$

~~По т. косинусов:~~ $\cancel{x^2 = 3^2 + 7^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 \cdot 7 = 9 + 21 + 21\sqrt{3} = 30 + 21\sqrt{3}}$.

~~в $\triangle BCT$~~

$\cancel{\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{30+21\sqrt{3}}{51+21\sqrt{3}}}$

~~Ответ:~~ $\cancel{\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{30+21\sqrt{3}}{51+21\sqrt{3}}}$

Задание 6 (продолжение) Чистовик 10 класс вар. №9

По т. косинусов $x^2 = 3^2 + 7^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 = 79$

в Δ BCT

$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$.

$x^2 = 79$

$\frac{S_{\Delta ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{79}{100} = 0,79$

Ответ: $\frac{S_{\Delta ABT}}{S_{ABCD}} = 0,79$.

211006552 (U858105 M1273536)

Задание 1.

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases}$$

$(x^2+y^2)^2 = x^4+2x^2y^2+y^4$

Замена: с ОДЗ на замену.

$x^2+y^2=a$, $a \geq 0$. $a \neq 0$.

$x^2y^2=b$, $b \geq 0$.

$x^4+y^4=a^2-2b$.

$$\begin{cases} \dfrac{2}{a}+b=2 \\ a^2-2b+3b=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+b=5 \\ \dfrac{2+ab}{a}=2. \ \Big| \cdot a>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+ab=2a \\ a^2+b=5. \end{cases}$$

$\boxed{b=5-a^2}$ $b=1$.

$2+a(5-a^2)=2a$

$2+5a-a^3=2a$

$a^3-3a-2=0$ $a=-1$ - корень (не удовл. ОДЗ)

поделим на $(a+1)$ по схеме Горнера

-1	1	0	-3	-2
	1	-1	-2	0

получим $a^2-a-2=0$ $a_1=-1$ $a_2=2$.

не уд. ОДЗ подходит.

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2\cdot y^2=1 \end{cases}$$

$\boxed{y^2=\dfrac{1}{x^2}}$ $x \neq 0$, но он и не подходит.

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=2 \ \Big| \cdot x^2 \neq 0$

$x^4+1-2x^2=0$ $x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$.

при $x=1$

$y_1=1$

$y_2=-1$

при $x=-1$

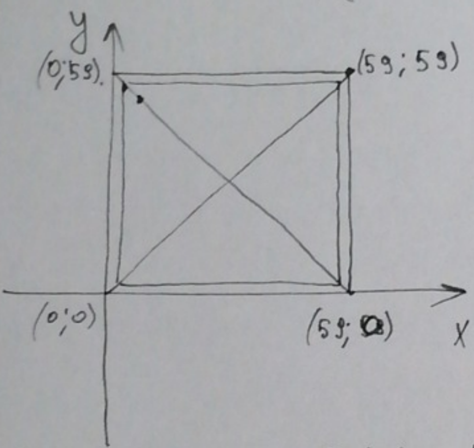
$y_1=1$

$y_2=-1$

Ответ: $(1;1)$; $(1;-1)$; $(-1;-1)$; $(-1;1)$.

Задание 5 Чистовик. 10 класс. вар. №9 5

Всего будет $(59-1)^2$ узлов, т.е. 3364.



т.е. надо взять один узел на диагонали: для 1 диагонали будет 58 вариантов.

мы выбрали узел на диагонали осталось 3363 вариантов.
мы не можем выбирать точки с такой же абсциссой или ординатой.

посчитаем для $y=x$.
берем точку $(1;1)$ остается взять одну из $3363-2\cdot 57$.
~~3247 способов~~.
и так далее

~~$57\cdot 3363-57-2(58+57+\dots+1)=3362\cdot 57-58\cdot 58=$~~
~~$=181634-3422=188212$~~
~~аналогично для $y=58-x$ будет 188212.~~
~~Теперь надо вычесть, когда две точки лежат~~

Нельзя выбирать на каждом шаге $2\cdot 57$ точек.
Берем одну точку 58 способами
вторую берем $3363-2\cdot 57$. способами
3249 способа.

$58\cdot 3249$ способа
Это умножаем на два $2\cdot 58\cdot 3249$, т.к. для $y=59-x$ аналогично.
Два раза будут посчитаны случаи, когда одна точка на $y=x$, другая на $y=59-x$.
Таких точек $2\cdot 28\cdot 56+1$
$2\cdot 58\cdot 3249-2\cdot 28\cdot 56-1$ вариантов.
Ответ: 373749 вариантов.