Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006545**

ID профиля: **323949**

Вариант 9

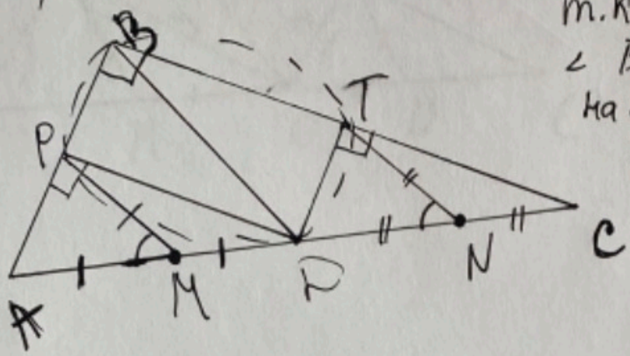
Чистовик

Математика, 10 кл

1. Дано: $\triangle ABC$, $D \in AC$, ω (середина BD; $\frac{BD}{2}$), $AB \cap \omega = P$, $BC \cap \omega = T$, M - сер-а AD, N - сер-а CD, $PM \parallel TN$

Решение:

а) Найти: $\angle ABC$



т.к. BD - диаметр, то $\angle BTD = 90°$, $\angle BPD = 90°$ (впис-й угол, опир-ся на диаметр $= 90°$)

А значит и смежные с ними углы по $90°$ (т.е. $\angle DTC = 90°$, $\angle APD = 90°$, т.к. Σ смежных $= 180°$)

медиана в прям-м $\triangle$, пров-я к гипотенузе равна её половине

$TN = \frac{CD}{2}$, $PM = \frac{AD}{2}$

т.к. $TN \parallel PM \Rightarrow \angle TND = \angle PMA$ (как соответ-е при парал-х прямых и секущей)

$\angle TDN = \frac{180 - \angle DNT}{2}$ (равноб-й $\triangle \Rightarrow$ углы при осн-и равны)

$\angle PAM = \frac{180 - \angle AMP}{2}$ (аналогично $\angle TDN$)

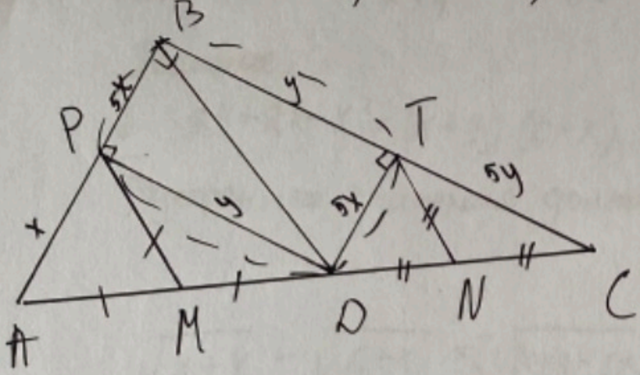
$\Leftarrow$ т.к. $\angle DNT = \angle AMP$ из сказан-о выше, то $\angle TDN = \angle PAM \Rightarrow$ $TD \parallel AB$ (равные соотв-е углы при прямых и секущей)

т.к. $TD \parallel AB$, то $\angle ABC = \angle DTC = 90°$ (соотв-е углы при парал-х прямых)

Ответ: а) $\angle ABC = 90°$

(пункт б) на след-й странице)

1. б) $MP = \frac{1}{2}$, $NT = \frac{5}{2}$, $BD = 2$



$\angle PAD = \angle TDC$, $\angle APD = \angle DTC \Rightarrow$

$\triangle APD \sim \triangle DTC$

(по 2 углам)

(использую данные, полученные при решении пункта а))

Пусть $AP = x$, $PD = y$, тогда:

$$\frac{TD}{AP} = \frac{TC}{PD} = \frac{CD}{AD} = \frac{2NT}{2PM} = 5 \Rightarrow$$

$TD = 5x$, $PD = 5y$

$\angle BPD = 90$, $\angle PBT = 90$, $\angle BTD = 90 \Rightarrow$

$PBTD$ – прямоугольник (3 угла по 90°) $\Rightarrow$

$BT = PD = y$, $BP = DT = 5x$

Из $\triangle APD$ по т. Пифагора:

(1) $x^2 + y^2 = AD^2 = 4PM^2 = 1$

Из $\triangle BTD$ по т. Пифагора:

(2) $25x^2 + y^2 = BD^2 = 4$

Вычтем (2)-(1): $24x^2 = 3$ $\quad x = \sqrt{\frac{1}{8}}$

$y^2 = 1 - x^2 = \frac{7}{8}$ $\quad y = \sqrt{\frac{7}{8}}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 6x \cdot 6y \cdot 1 =$

$= 18 \cdot \frac{\sqrt{7}}{8} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$

Ответ: б) $S_{\triangle ABC} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$

Ответ: а) $\angle ABC = 90^\circ$, б) $S_{\triangle ABC} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$ (2)

Чистовик Математика, 10 кл

2. Решить: $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$

Решение:

$24+2x-x^2 = (x+4)(6-x)$

Подкоренные значения должны быть неотриц-ы => ОДЗ: $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -4 \leq x \leq 6$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{(x+4)(6-x)} - 4$$

$$x+4 - 2\sqrt{x+4}\sqrt{6-x} + 6 - x = 4(x+4)(6-x) - 16\sqrt{x+4}\sqrt{6-x} + 16$$

$$-6 = 4(x+4)(6-x) - 14\sqrt{x+4}\sqrt{6-x}$$

$$7\sqrt{x+4}\sqrt{6-x} = 2(x+4)(6-x) + 3$$

$$49(x+4)(6-x) = 4(x+4)^2(6-x)^2 + 12(x+4)(6-x) + 9$$

$$4(x+4)^2(6-x)^2 - 37(x+4)(6-x) + 9 = 0$$

Пусть $(x+4)(6-x) = t$

$$4t^2 - 37t + 9 = 0$$

$$D = 37^2 - 16 \cdot 9 = 1369 - 144 = 1225 = 35^2$$

$$t_1 = \frac{37+35}{8} = 9$$

$$t_2 = \frac{37-35}{8} = \frac{1}{4}$$

$24+2x-x^2 = 9$

$x^2-2x-15=0$

$D = 4+60 = 8^2$

$x_1 = \frac{8+2}{2} = 5$

$x_2 = \frac{-8+2}{2} = -3$

$24+2x-x^2 = \frac{1}{4}$

$4x^2-8x-95=0$

$D = 64+1520 = (12\sqrt{11})^2$

$x_1 = \frac{8+12\sqrt{11}}{8} = \frac{2+3\sqrt{11}}{2}$

$x_2 = \frac{8-12\sqrt{11}}{8} = \frac{2-3\sqrt{11}}{2}$

3

Продолжение на следующей странице

Чистовик

2. (Продолжение)

Проверим, входят ли наши корни в ОДЗ

$-4 \le 5 \le 6$ - верно

$-4 \le -3 \le 6$ - верно

$$-4 \le \frac{2+3\sqrt{11}}{2} \le 6$$

верно т.к. данное число >0

верно

$2+3\sqrt{11} < 12$

$3\sqrt{11} < 10$

$99 < 100$

$$-4 \le \frac{2-3\sqrt{11}}{2} \le 6$$

верно, т.к. данное число <0

верно

$2-3\sqrt{11} > -8$

$3\sqrt{11} < 10$ знаки разные

$99 < 100$

Ответ: $x_1=5, x_2=-3, x_3=\frac{2+3\sqrt{11}}{2}, x_4=\frac{2-3\sqrt{11}}{2}$

Чистовик

Математика, 10кл

3. Парабола:

$$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$$

$$y=x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}$$

коорд-ы вершины параболы по Ox: $-\frac{b}{2a}$, где b - второй коэф-т, a - первый коэф-т

$$\frac{-2a}{2}=-a \rightarrow \text{коорд-а по } x \text{ т. B}$$

$$(-a)^2-2a^2+a^2+\frac{1}{a}=\frac{1}{a} \rightarrow \text{коорд-а по } y \text{ т. B}$$

$$B\ \left(-a;\ \frac{1}{a}\right)$$

Чтобы точки лежали по разные стороны от прямой $3x-y-4=0$ необходимо, что чтобы выражение $3x-y-4$ (где x, y - коорд-ы т. A и т. B) имело разные знаки

5

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006545**

ID профиля: **323949**

Вариант 9

4. $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2 = \dfrac{2}{2-x^2y^2} \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} \left(\dfrac{2}{2-x^2y^2}\right)^2 + x^2y^2=5 \\ \dfrac{2}{\cancel{x}^2+y^2} + x^2y^2=2 \end{cases}$

$4=(5-x^2y^2)(2-x^2y^2)^2$

$\lrcorner\ 2-x^2y^2=t$

$4=(3+t)t^2$

$t^3+3t^2-4=0$

$$\begin{array}{r|l} t^3+3t^2-4 & t-1 \\ \cline{2-2} -\ t^3-t^2 & t^2+4t+4 \\ \cline{1-1} 4t^2-4 & \\ 4t^2-4t & \\ \cline{1-1} 4t-4 & \\ -\ 4t-4 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$(t-1)(t^2+4t+4)=0$

$(t-1)(t+2)^2=0$

Продолжение на след-й стр.

$t_1 = 1$, $t_2 = -2$ черновик Математика, 10 кл

$2 - x^2y^2 = 1$

$x^2y^2 = 1$

$\frac{2}{x^2+y^2} + 1 = 2$

$x^2 + y^2 = 2$

$\frac{1}{y^2} + y^2 = 2$

$y^4 - 2y^2 + 1 = 0$

$(y^2-1)^2 = 0$

$y_1 = 1$	$y_2 = -1$
$x_1 = 1$	$x_2 = -1$
$x_3 = -1$	$x_4 = 1$

$2 - x^2y^2 = -2$

$x^2y^2 = 4$

$\frac{2}{x^2+y^2} = -1$

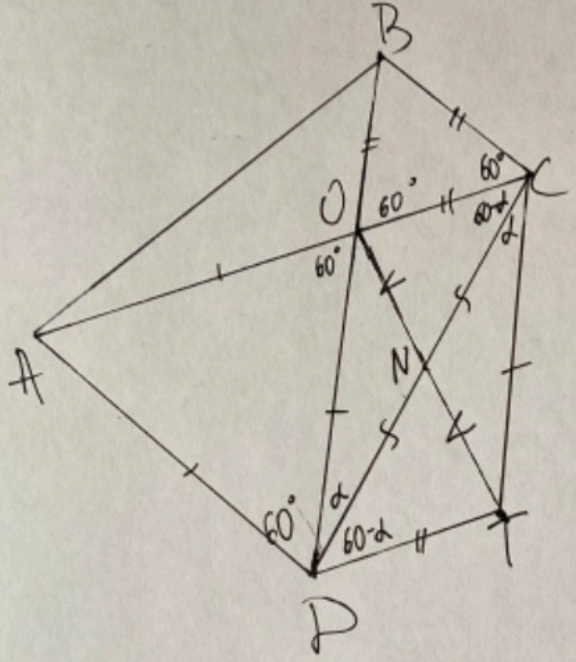
$x^2 + y^2 = -2$, но $x^2 \geq 0$, $y^2 \geq \Rightarrow x^2+y^2 \geq 0 \Rightarrow$ нет решений

Ответ: $(1;1)$, $(1;-1)$, $(-1;-1)$, $(-1;1)$

2

6. Чистовик Математика, 10кл

Пункт а)



$\angle AOB = 180 - \angle AOD = 120°$

$\angle COD = \angle AOB = 120°$ (вертик-е)

$CO = OB$ (по условию)

$DO = AO$

$\Rightarrow \triangle AOB = \triangle COD$ (по 2 стор-м и углу между ними) $\Rightarrow AB = CD$

Пусть N - серед-а CD

в силу центр-й сим-ч

$ON = NT$, $CN = ND \Rightarrow$

$OCTD$ - параллелограмм (диаг-и делятся т. пересеч-я пополам) $\Rightarrow DT = CO$, $CT = OD$

Пусть $\angle ODC = \alpha$, тогда $\angle OCD = 180 - 120 - \alpha = 60 - \alpha$

$\angle DCT = \alpha$ (накрест лежащ-е при парал-х прямых)

аналогично $\angle CDT = \angle OCD = 60 - \alpha$

$\angle ADT = 60 + \alpha + 60 - \alpha = 120°$

$\angle BCT = 60 + 60 - \alpha + \alpha = 120°$

$DT = CO$, $AD = OD$, $\angle ADT = \angle COD = 120° \Rightarrow \triangle ADT = \triangle COD \Rightarrow AT = CD$ (по 2 стор-м и углу между ними)

$CT = DO$, $BC = CO$, $\angle BCT = \angle COD = 120° \Rightarrow \triangle BCT = \triangle COD \Rightarrow BT = CD$ (по 2 стор-м и углу между ними)

$AB = CD$, $BT = CD$, $AT = CD \Rightarrow AB = BT = AT = CD \Rightarrow \triangle ABT$ - правильный

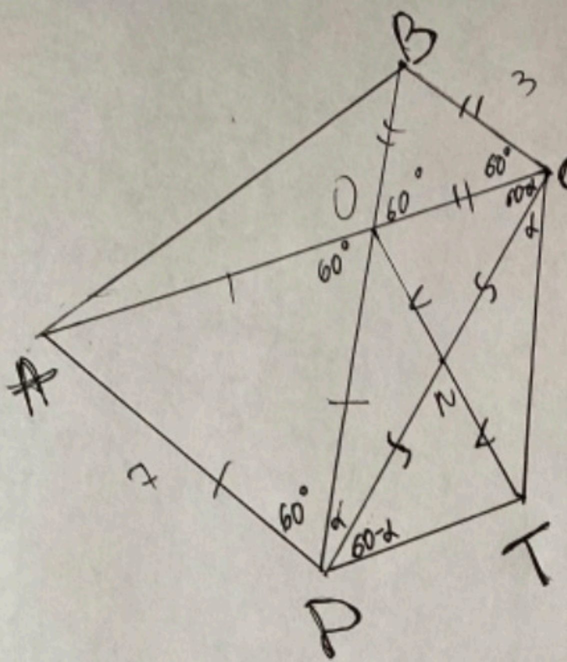
(Пункт б) на ~~другой~~ след-й стр.)

3

211006545 (U323949 M1275159)

6. Пункт б) Чистовик Математика 10кл

$BC=3,\ AD=7$



$$S_{ABCD} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COD} + S_{\Delta AOD} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OB \cdot \sin 120° + \frac{1}{2} \cdot BO \cdot OC \sin 60° + \frac{1}{2} \cdot CO \cdot OD \cdot \sin 120° + \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OD \cdot \sin 60° =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(21+9+21+49) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 100 = 25\sqrt{3}$$

$$S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BT \cdot \sin 60° =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot CD \cdot CD \cdot \sin 60°$$

по т. косинусов в ΔCOD:

$$CD^2 = CO^2 + OD^2 - 2 \cdot CO \cdot OD \cos 120° =$$

$$= 9 + 49 + 2 \cdot 21 \cdot \frac{1}{2} = 58 + 21 = 79$$

$$S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot 79 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 79$$

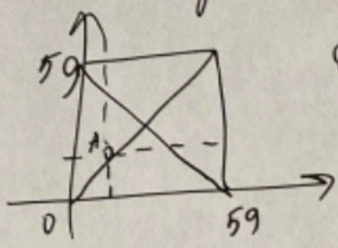
$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\cancel{\sqrt{3}} \cdot 79}{4 \cdot 25 \cdot \cancel{\sqrt{3}}} = 0{,}79$$

Ответ: б) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = 0{,}79$

4

5. Чистовик

Прямые $y = x$ и $y = 59 - x$ задают диагонали заданного квадрата. Т.е. нам нужно найти кол-во способов выбрать 2 узла таких, что один из них лежит обяз-о на одной из диаг-й, а другой не лежит на одной горизонт-е или вертикали с ним



Если мы возьмем в пару к т. A т. на обознач-х штрихами линиях, то ~~они~~ получим противоречие — они будут лежать на прямой, парал-й ~~оси~~ коорд-й оси

Всего на диагоналях узлов $60+60-4$ (верш-ы квад-а не исп-м), т. пересеч-я очевидно будет иметь не целые коорд-ы => мы её и не считали в узлах.

Теперь рассм-м 2 случая:

в пару ей поставим др-ю т. с диаг-й

$\frac{116\cdot(116-3)}{2} = \frac{116\cdot113}{2}$ (каждую пару мы очевидно посчитали 2 раза)

не считая самой этой т. и т. на одной вертик-е /или горизонт-е с ней

в пару ей поставим точку с поля, не леж-ю на диагоналях

Всего на поле 60^2 узлов. Из них $4\cdot60-4 = 4\cdot59$ узла на границах квадрата.

т.на вертик-е / и горизонт-е; т.на диаг-х

$2\cdot60 - 2 - 2 - 4 =$

сама точка, но её мы пост-и 2 раза; т.на границе

$= 2\cdot56$ ~~точки~~

5

116 точек на диаг-х Чистовик Математика, 10 кл

$60^2-4\cdot 59-2\cdot 56-116=3600-236-112-116=$

$=3600-464=3136$

$116\cdot 3136$ способов

$\frac{116\cdot 113}{2}+\frac{116\cdot 6272}{2}=\frac{116\cdot 6385}{2}=$

$=\cancel{58}\ 58\cdot 6385=371330$ способов

Ответ: 371330 способов

6